Charakterisierung optischer faserbasierter Fabry-Pérot-Resonatoren

Eine Masterarbeit an der FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND PHYSIK DER LEOPOLD-FRANZENS-UNIVERSITÄT INNSBRUCK

> Ein Teil der Voraussetzungen zur Erlangung des akademischen Grades eines

> > MASTER OF SCIENCE

durchgeführt am Institut für Experimentalphysik unter der Leitung von Univ. Prof. Dr. Tracy Northup und mitwirkender Betreuung von Univ. Prof. Dr. Rainer Blatt

> vorgelegt von FLORIAN PHILIPP KRANZL

> > August 2017

Gewidmet meinen Eltern.

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden faserbasierte Resonatoren experimentell und theoretisch charakterisiert. Es wurde ein Versuchsaufbau für die Vermessung der faserbasierten Resonatoren konzipiert und realisiert. Für Resonatoren wurden die Verluste und die Resonanzaufspaltung über einen großen Bereich der möglichen Resonatorlängen gemessen und mit theoretischen Modellen verglichen. Zur Berechnung der Verluste wurde ein Eigenwertmodell des Resonatorfeldes verwendet. Dabei zeigte sich für die (0,0)-Mode eine Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. Für die höheren Moden wurde ein abweichendes Verhalten gemessen. Die gemessene Resonanzaufspaltung der (0,0)-Mode zeigte die theoretisch erwartete Abhängigkeit. iv

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung					
2	The	Leorie der Fabry-Pérot-Resonatoren				
	2.1	Paraxiale Näherung und deren Lösungen				
	2.2	Fabry-Pérot-Resonatoren	9			
		2.2.1 Herleitung der Felder des Fabry-Pérot-Resonators 10	0			
		2.2.2 Fabry-Pérot-Resonatoren hoher Finesse	5			
		2.2.3 Resonatoren mit sphärischen Spiegeln 1	7			
	2.3	Verluste in Resonatoren				
		2.3.1 Verlustberechnung durch die Eigenwertmethode 2	1			
		2.3.2 Abschätzung durch Abschneideverluste	3			
	2.4	Doppelbrechung in Resonatoren	4			
	2.5	Zusammenfassung				
3	Ver	rsuchsaufbau 2				
	3.1	Experimenteller Aufbau	9			
		3.1.1 Planspiegel und Faserspiegel	0			
		3.1.2 Verwendete Faserspiegel	1			
		3.1.3 Beschreibung des experimentellen Aufbaus 34	4			
		3.1.4 Messung der Moden mittels der Kamera 4	0			
		3.1.5 Reinigung der Faserspiegel	1			
		3.1.6 Hinweise zur Erzeugung der Resonatormoden 4	1			
	3.2	Bestimmung der Resonatorlänge	2			
	3.3	Methode zur Bestimmung der Verluste	4			
	3.4	Methode zur Bestimmung der Doppelbrechung 44	6			
	3.5	Zusammenfassung 4	7			
4	Val	idität der Messmethode 49	9			
	4.1	.1 Einfluss der Durchstimmgeschwindigkeit				
		4.1.1 Längenabhängigkeit der Linienverbreiterung 5	2			
	4.2	Rauschspektrum der Linienbreite				

INHALTSVERZEICHNIS

	4.3	ss der Resonanzamplitude	55	
	4.4	Einflu	ss der Polarisationsoptik der Detektion	57
		4.4.1	Motivation	58
		4.4.2	Modell der Polarisationsmischung	59
		4.4.3	Beobachtung der Polarisationsmischung im Experiment	64
		4.4.4	Linienformen bei Polarisatorfehlstellung	66
		4.4.5	Auffindung und Überprüfung der korrekten Polarisa-	
			torstellung	68
		4.4.6	Längenabhängigkeit der Polarisatorstellung	71
		4.4.7	Auswirkungen einer Polarisatorfehlstellung	72
	4.5	ımenfassung	74	
5	Mes	sunge	n an faserbasierten Resonatoren	77
	5.1	Messb	arkeit der Moden unterschiedlicher Ordnung	78
	5.2 Längenabhängigkeit der Verluste			
		5.2.1	Beispiel einer Verlustberechnung	80
		5.2.2	Einfluss der maximalen Basisordnung	82
		5.2.3	Messergebnisse für die Faser M9	83
		5.2.4	Messergebnisse für die Faser M11	87
		5.2.5	Vergleich mit dem Eigenwertmodell und Diskussion	87
	5.3 Längenabhängigkeit der Doppelbrechung		nabhängigkeit der Doppelbrechung	91
		5.3.1	Messergebnisse für die Faser M9	91
		5.3.2	Messergebnisse für die Faser M11	94
		5.3.3	Diskussion	94
	5.4	Zusam	menfassung	95
6	Zus	amme	nfassung und Ausblick	97

vi

Kapitel 1

Einleitung

Optische Resonatoren können als Mittel zur Verstärkung der Licht-Materie-Wechselwirkung dienen. Auf diese Weise lassen sich Experimente zur Wechselwirkung von einzelnen Photonen und einzelnen Atomen durchführen [1]. Hierdurch lässt sich Information zwischen einem Atom und einem Photon austauschen. Dies könnte zukünftig eine Übertragung von quantenmechanischer Information zwischen mehreren Quantencomputern ermöglichen [2]. Photonen besitzen den Vorteil, über große Strecken übertragbar zu sein und kaum Wechselwirkung untereinander zu zeigen. Für eine schnelle Informationsübertragung zwischen Atom und Photon ist es notwendig, eine möglichst starke Wechselwirkung zwischen ihnen herzustellen. Dies geschieht mittels Resonatoren, wobei die Wechselwirkung umso größer ist, je kleiner das Modenvolumen des Resonators ist.

Eine Möglichkeit, ein kleines Modenvolumen zu realisieren, besteht in der Verwendung von Resonatoren, deren Spiegel in die Enden von Glasfasern eingearbeitet sind [3]. Die Herstellung der Spiegel kann durch Laser-Ablation erfolgen. Dabei wird durch einen fokussierten CO_2 -Laserstrahl Material an der Faserspitze lokal so stark erhitzt, dass es zu einer konkaven Einbuchtung kommt. Durch die Verwendung einer Vielzahl von Laserpulsen kann eine annähernd sphärische Form des Spiegels erreicht werden [4].

Resonatoren, die mit derartigen Faserspiegeln hergestellt sind, zeigen ein Verhalten, das von dem eines idealen Resonators abweicht. Ziel dieser Arbeit ist es nun, dieses reale Verhalten von faserbasierten Resonatoren zu untersuchen. Es werden zwei Effekte analysiert: die Entstehung von Resonatorverlusten und die polarisationsabhängige Aufspaltung von Resonanzen. Hierfür wurden im Zuge der Arbeit sowohl ein Messaufbau realisiert, als auch Berechnungen durchgeführt. Die Resonatorverluste sind bei Faserspiegeln deshalb von besonderer Bedeutung, da die Oberfläche von Faserspiegeln durch die Herstellung mittels Laserablation im Vergleich zu herkömmlichen, großen Resonatorspiegeln wenig formgenau ist.

Für die Beschreibung von Resonatorverlusten gibt es bisher folgende Modelle: Eine einfache Abschätzung gibt ein Abschneidemodell [3]. Ein besseres Modell [5] berechnet das Resonatorfeld und die Verluste iterativ unter Verwendung des Huygensschen Prinzips. Eine ähnliche iterative Methode berechnet die Propagation des elektromagnetischen Feldes in faserbasierten Resonatoren unter Verwendung der Fourier-Transformierten des elektromagnetischen Feldes [6]. Ein weiteres Modell basiert auf einer Beschreibung des Resonatorfeldes durch ein Eigenwertproblem [7]. Dieses Eigenwertmodell hat den Vorzug, dass es für Resonatoren hoher Finesse durch Lösung einer einzigen Gleichung die Verluste liefert, anstatt eine Vielzahl von Iterationen zu benötigen. Das Eigenwertmodell wurde erfolgreich zur Beschreibung von Verlusten der (0,0)-Mode angewendet [8].

Die polarisationsabhängige Resonanzaufspaltung lässt sich durch ein einfaches Modell aus der Elliptizität der Faserspiegel ableiten [9]. Die in der zitierten Arbeit veröffentlichten Ergebnisse beziehen sich nur auf die (0,0)-Mode.

In der vorliegenden Arbeit soll geklärt werden, ob das Eigenwertmodell für die Beschreibung der in Innsbruck verwendeten Faserspiegel geeignet ist. Die hier verwendeten Fasern unterscheiden sich von dem in Ref. [8] verwendeten, als dass sie durch eine Vielzahl von Laserpulsen hergestellt wurden und eine Oberfläche besitzen, die näher an eine sphärische Form herankommt. Ebenso soll geklärt werden, ob die vorhandenen Messungen der Faseroberflächen für die Berechnung der Resonatoreigenschaften geeignet sind.

Im Unterschied zu den oben genannten Arbeiten werden in der vorliegenden Arbeit die Resonatorverluste und die Resonanzaufspaltung auch für höhere Moden gemessen. Es lässt sich daher ein vollständigerer Vergleich mit den theoretischen Modellen anstellen.

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit ist folgendermaßen: In einem ersten Kapitel wird die Theorie von Fabry-Pérot-Resonatoren zusammengefasst. Neben der Beschreibung idealer Resonatoren werden zwei Modelle vorgestellt, welche das Verhalten realer Resonatoren beschreiben. Ein erstes Modell leitet aus der geometrischen Form der Resonatorspiegel die Verluste des Resonators her. Ein zweites Modell beschreibt die Resonanzaufspaltung durch die Spiegelgeometrie in Verbindung mit einem Korrekturterm für die paraxiale Näherung des elektromagnetischen Feldes.

Nach einer Erklärung des verwendeten Versuchsaufbaus wird dessen Charakterisierung beschrieben. Es wird gezeigt, welche systematischen und statistischen Fehlerquellen existieren und unter welchen Umständen eine Messung korrekte Resultate liefert. Ein Hauptaugenmerk wird dabei auf den Einfluss der Polarisationsoptik für die Messung des Resonatorsignals gelegt. Ist diese falsch eingestellt, kann sie eine Verbreiterung oder eine Verschmälerung einer Resonanz vortäuschen.

Schlussendlich werden Messergebnisse für zwei faserbasierte Resonatoren gezeigt. Für beide Resonatoren wurden die Resonatorverluste und die Resonanzaufspaltung als Funktion der Resonatorlänge ermittelt. Die Ergebnisse des Experiments werden mit numerischen Berechnungen verglichen.

Kapitel 2

Theorie der Fabry-Pérot-Resonatoren

Optische Resonatoren sind Systeme, die eingestrahltes Licht für eine gewisse Zeit in einem Raumvolumen einfangen können. Durch wiederholte Umläufe des eingefangenen Lichts zeigen optische Resonatoren ein ausgeprägtes Resonanzverhalten. Das Verhalten eines Resonators wird wesentlich durch das eingeschlossene elektromagnetische Feld bestimmt. Zur genauen Charakterisierung ist es daher notwendig, die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes zu kennen. Im Allgemeinen geschieht dies durch Lösen der Maxwellschen Gleichungen. Für eine wichtige Unterart optischer Resonatoren, die Fabry-Pérot-Resonatoren, genügt es, das elektromagnetische Feld für eine stark vereinfachte Gleichung, die paraxiale Helmholtz-Gleichung, zu lösen.

Die Feldverteilungen, die sich in einem Fabry-Pérot-Resonator ausbilden, werden durch die Lösungen dieser Gleichung beschrieben und als Resonatormoden bezeichnet. Eine Vielzahl von Eigenschaften eines Fabry-Pérot-Resonators lässt sich damit bereits mit ausreichender Genauigkeit beschreiben. Dies gelingt allerdings nur für den Fall eines idealen Fabry-Pérot-Resonators, also eines Resonators mit unendlich ausgedehnten, perfekt sphärisch geformten Spiegeln. Im Fall eines realen Resonators lässt sich diese Beschreibung strenggenommen nicht mehr anwenden und es müssen Korrekturen hinzugefügt werden.

In diesem Kapitel werden zwei Korrekturen beschrieben. Eine erste Korrektur wird nötig, wenn der vorliegende Resonator eine endliche Spiegelausdehnung besitzt und die Spiegel nicht mehr perfekt sphärisch geformt sind. In einem solchen Fall weichen Resonatormoden von den Lösungen des idealen Resonators ab. Dies führt insbesondere zu zusätzlichen Verlusten und in Folge zu einer Verbreiterung der Resonanzen.

Eine zweite Korrektur wird ebenso aufgrund einer nicht sphärischen Spie-

geloberfläche nötig. Die bislang vernachlässigte Vektornatur des Lichts führt dann zu einer Aufspaltung der Resonanz in zwei Resonanzen, je eine für eine der zwei Polarisationen des Resonators.

Um diese Korrekturen einführen zu können, wird zunächst eine Theorie von Fabry-Pérot-Resonatoren dargestellt. Den Beginn macht die Beschreibung der Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes in paraxialer Näherung. Anschließend werden alle später benötigten Eigenschaften von Fabry-Pérot-Resonatoren hergeleitet oder eingeführt. Nach dieser Behandlung des idealen Falls werden zwei Modelle zur Beschreibung des realen Resonators vorgestellt. Insbesondere werden diese Modelle zur Berechnung der Resonatorverluste und der Resonanzaufspaltung der Resonatorpolarisationen angewendet und mit in dieser Arbeit durchgeführten Messungen verglichen (Kapitel 5).

2.1 Paraxiale Näherung und deren Lösungen

Die folgende Beschreibung der paraxialen Näherung der Helmholtz-Gleichung folgt der Behandlung von Milonni und Eberly [10, S. 480ff]. Ausgangspunkt für die Beschreibung des Resonatorfeldes sind die Maxwellschen Gleichungen. Aus den Maxwellschen Gleichungen lässt sich für eine Komponente des elektromagnetischen Feldes $E(\mathbf{r}, t)$ die skalare Wellengleichung

$$\nabla^2 E(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(\boldsymbol{r},t) = 0$$
(2.1)

ableiten, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Durch Einsetzen des speziellen Ansatzes $E(\mathbf{r},t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ mit der Kreisfrequenz der Welle ω in diese Wellengleichung erhält man die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (2.2)$$

wobei k die Wellenzahl bezeichnet.

In dieser Arbeit wird ein spezieller Typ von Resonatoren behandelt: bei diesem wird ein Hohlraum auf zwei Seiten von Spiegeln begrenzt und das Licht wird in einer Richtung zwischen diesen beiden Spiegeln hin- und herreflektiert. Die beiden einfachsten Lösungen der Helmholtz-Gleichung werden durch ebene Wellen und durch Kugelwellen gebildet. Für die Beschreibung eines Resonatorfeldes sind diese einfachen Lösungen aber unbefriedigend: Ebene Wellen eignen sich nur für Resonatoren mit planparallelen Spiegeln, da ihre Wellenfronten durch Ebenen gebildet werden und sich keinen sphärischen Spiegeloberflächen anpassen können. Ein fokussiertes Lichtfeld, wie es bei Reflexion an einem sphärischen Spiegel entsteht, lässt sich mit ihnen nicht beschreiben. Kugelwellen wiederum besitzen eine Feldverteilung, die in alle Ausbreitungsrichtungen die gleiche Stärke besitzt. Für eine allgemeine Beschreibung von Resonatoren sind sie deshalb ebenso nicht geeignet.

Mit der paraxialen Näherung lässt sich ein nutzbarer Mittelweg beschreiten. Die dort auftretenden Lösungen besitzen zum einen im Wesentlichen eine Ausbreitungsrichtung entlang einer Achse und zum anderen annähernd sphärische Wellenfronten. Ebenso lassen sich mit den paraxialen Lösungen beliebige Feldverteilungen im Rahmen der Näherung beschreiben, da sie eine Basis darstellen.

Zur Gewinnung der paraxialen Helmholtz-Gleichung bzw. paraxialen Wellengleichung aus der Helmholtz-Gleichung wird angenommen, dass sich das elektromagnetische Feld in zwei Anteile faktorisieren lässt: einen Anteil, der die räumliche Feldverteilung beschreibt und der in Ausbreitungsrichtung nur langsam veränderlich ist, sowie einen zweiten Anteil, der eine ebene Welle beschreibt. Dieser Ansatz besitzt die Form

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{E}_0(\boldsymbol{r}) \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}.\tag{2.3}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Helmholtz-Gleichung ein und berücksichtigt, dass sich der Anteil $\mathcal{E}_0(\mathbf{r})$ in z-Richtung nur langsam ändert erhält man schließlich die paraxiale Helmholtz-Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i2k\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathcal{E}_0(\boldsymbol{r}) = 0.$$
(2.4)

Unter Einführung des transversalen Laplace-Operators

$$\nabla_{\mathrm{T}}^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.5}$$

kann die paraxiale Helmholtz-Gleichung auch in der Form

$$\left(\nabla_{\mathrm{T}}^{2} + \mathrm{i}2k\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathcal{E}_{0}(\boldsymbol{r}) = 0$$
(2.6)

geschrieben werden.

Einfache Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung werden in kartesischen Koordinaten durch die Hermite-Gauß-Moden oder in Polarkoordinaten durch die Laguerre-Gauß-Moden beschrieben [11, Kap. 16]. Mit den Hermite-Gauß-Moden $\operatorname{HG}_{n,m}(\mathbf{r})$ wird der langsam veränderliche Anteil $\mathcal{E}_0(\mathbf{r})$ in den Koordinaten x und y separiert, es gilt also für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{E}_0(\boldsymbol{r}) e^{ikz} = HG_{n,m}(\boldsymbol{r}) e^{ikz} = \tilde{u}_n(x,z)\tilde{u}_m(y,z) e^{ikz}.$$
 (2.7)



Abb. 2.1: Von Kugelwellen hin zur paraxialen Näherung. Die Wellenfronten einer bei z = 0 entstandenen Kugelwelle gehen in der paraxialen Näherung in Paraboloide über.

Die dabei auftretenden Funktionen $\tilde{u}_n(x,z)$ sind durch

$$\tilde{u}_{n}(x,z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^{n} n! w(z)}} e^{-i\frac{1}{2}(2n+1)(\psi(z)-\psi_{0})} H_{n}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-i\frac{kx^{2}}{2R(z)} - \frac{x^{2}}{w^{2}(z)}\right]$$
(2.8)

gegeben [11, S. 646] (analog für $\tilde{u}_m(y, z)$). Diese Moden sind normiert und bilden eine Orthonormalbasis. Dabei bezeichnen H_n die Hermite-Polynome und

$$\psi(z) = \arctan \frac{z}{z_{\rm R}} \tag{2.9}$$

die Gouy-Phase mit $\psi_0 = \phi(z_R)$. Des Weiteren ist

$$z_{\rm R} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{2.10}$$

die Rayleigh-Länge des Gauß-Strahls, λ die Lichtwellenlänge, w_0 die Strahltaille,

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_{\rm R}}\right)^2} \tag{2.11}$$

der Strahlradius und

$$R(z) = z + \frac{z_{\rm R}^2}{z}$$
(2.12)

der Krümmungsradius der Wellenfronten. Die Wellenfronten werden in der paraxialen Näherung durch Paraboloide gebildet (vgl. Abb. 2.1). Die geometrischen Größen des Gauß-Strahls sind in Abb. 2.2 aufgetragen.

Wichtige Lösungen $\mathcal{E}(r,\theta,z) = \mathrm{LG}_{n,m}(r,\theta,z) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}$ in Polarkoordinaten werden durch die Laguerre-Gauß-Moden gebildet, welche die (normierte)



Abb. 2.2: Gauß-Strahl. Ein divergenter Gauß-Strahl mit Strahltaille w_0 und Rayleigh-Länge $z_{\rm R}$ propagiert entlang der z-Achse. Der Strahl besitzt einen Strahlradius w(z) und Wellenfronten mit Krümmungsradius R(z). Abb. adaptiert nach [11, Abb. 17.1].

Form

$$LG_{p,m}(r,\theta,z) = \tilde{u}_{p,m}(r,\theta,z) = = \sqrt{\frac{2p!}{(1+\delta_{0,m})\pi(m+p)!}} \frac{1}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^{m} e^{i(2p+m+1)(\psi(z)-\psi_{0})} L_{p}^{m} \left(\frac{2r^{2}}{w(z)^{2}}\right) \exp\left[-ik\frac{r^{2}}{2\tilde{q}(z)} + im\theta\right]$$
(2.13)

besitzen [11, S. 647], wobei L_p^m die zugeordneten Laguerre-Polynome und δ das Kronecker-Delta bezeichnen, $p \ge |m| \ge 0$ gilt und $\tilde{q}(z)$ durch

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$
(2.14)

gegeben ist. Alle weiteren Größen sind gleich wie im Fall der Hermite-Gauß-Moden. Die explizite Darstellung der Hermite-Gauß-Moden bzw. der Laguerre-Gauß-Moden wird in dieser Arbeit für die Durchführung numerischer Berechnungen benötigt.

Nachdem nun Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung bekannt sind, können diese angewandt werden, um das Feld in einem Resonator zu beschreiben. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

2.2 Fabry-Pérot-Resonatoren

Das Prinzip eines Fabry-Pérot-Resonators beruht auf Vielstrahlinterferenz (Abb. 2.3). Im einfachsten Fall besteht ein Fabry-Pérot-Resonator aus zwei planparallelen Flächen A und B. Eine einfallende elektromagnetische Welle



Abb. 2.3: Vielstrahlinterferenz in einem Fabry-Pérot-Resonator. Der schräge Einfallswinkel der Welle wurde nur zur einfacheren Darstellbarkeit gewählt. In der Abbildung bezeichnen $E_{\rm e}$ die Amplitude der einfallenden Welle, $E_{\rm r}$ die Amplitude der reflektierten Welle, $E_{\rm t}$ die Amplitude der transmittierten Welle und E die Amplitude der im Resonator umlaufenden Welle. Die indizierten Größen $E_{\rm r,i}$, $E_{\rm t,i}$ und E_i für $i = 0, 1, 2, \ldots$ beziehen sich auf die jeweiligen Amplituden nach dem i-ten Umlauf im Resonator. Die beiden planparallelen Platten A und B besitzen den Abstand L, die Reflektivität $r_{\rm A}$ bzw. $r_{\rm B}$ und die Transmission $t_{\rm A}$ bzw. $t_{\rm B}$.

wird an diesen Flächen zum Teil reflektiert und zum Teil transmittiert. Die beiden Flächen besitzen die Reflektivität r_A bzw. r_B und die Transmission t_A bzw. t_B , bezogen jeweils auf die Amplitude E des elektrischen Feldes. Der dabei zwischen den beiden Flächen verbleibende Teil des Feldes hat wieder die Möglichkeit zum Teil reflektiert und zum Teil transmittiert zu werden. Es zeigt sich, dass sich, unter bestimmten Bedingungen, die im Resonator befindlichen Feldanteile gegenseitig verstärken können und ein großer Teil der einfallenden Welle für eine bestimmte Wellenlänge und für einen bestimmten Abstand zwischen den Flächen transmittiert werden kann. In diesem Fall ist der Fabry-Pérot-Resonator in Resonanz. Im Folgenden soll eine Herleitung für das Verhalten eines Fabry-Pérot-Resonators geben werden. Die Herleitung lehnt sich an die Behandlung von Born und Wolf [12, S. 323ff] sowie von Bergmann-Schäfer [13, S. 343ff] an.

2.2.1 Herleitung der Felder des Fabry-Pérot-Resonators

Ausgangspunkt für die Herleitung ist eine ebene, in x-Richtung polarisierte, elektromagnetische Welle mit dem elektrischen Feldvektor

$$E(r,t) = (E(r,t), 0, 0).$$
(2.15)

Wird zusätzlich angenommen, dass sich die Welle in Richtung der z-Achse ausbreitet, so lautet die explizite Darstellung

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = (Ee^{i(kz-\omega t)}, 0, 0), \qquad (2.16)$$

10

wobei E die Amplitude, k die Wellenzahl und t die Zeit bezeichnen.

Trifft die einfallende Welle der Amplitude $E_{\rm e}$ senkrecht auf die erste Platte A, so wird der Anteil $E_{\rm r,0} = r_{\rm A}E_{\rm e}$ reflektiert und der Anteil $E_0 = t_{\rm A}E_{\rm e}$ in den Resonatorzwischenraum transmittiert. Der auch von der zweiten Platte B transmittierte Anteil ist dann $E_{\rm t,0} = t_{\rm B}E_0{\rm e}^{{\rm i}\phi/2} = t_{\rm B}t_{\rm A}E_{\rm e}{\rm e}^{{\rm i}\phi/2}$. Mit ϕ wird dabei die Phase bezeichnet, die durch einen vollständigen Umlauf zwischen den Resonatorplatten aufgesammelt wird. Der Bezugspunkt für alle angeführten Phasen sei die Innenseite der Platte A. Wird das Schema der Reflexionen und Transmissionen gemäß der Abbildung 2.3 fortgesetzt, so ergibt sich insgesamt die Folge

$$E_0 = t_{\rm A} E_{\rm e} \tag{2.17}$$

$$E_{\mathrm{r},0} = -r_{\mathrm{A}}E_{\mathrm{e}} \tag{2.18}$$

$$E_{\rm t,0} = t_{\rm B} e^{i\frac{1}{2}\phi} E_0 = t_{\rm B} t_{\rm A} e^{i\frac{1}{2}\phi} E_{\rm e}$$
(2.19)

$$E_1 = r_{\rm B} r_{\rm A} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} E_0 \tag{2.20}$$

$$E_{\mathrm{r},1} = r_{\mathrm{B}} t_{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} E_0 \tag{2.21}$$

$$E_{\rm t,1} = t_{\rm B} {\rm e}^{{\rm i}\frac{1}{2}\phi} E_1 = t_{\rm B} r_{\rm B} r_{\rm A} {\rm e}^{{\rm i}\frac{3}{2}\phi} E_0$$
(2.22)

$$E_n = r_{\rm B} r_{\rm A} e^{i\phi} E_{n-1} \tag{2.23}$$

$$E_{\mathbf{r},n} = r_{\mathbf{B}} t_{\mathbf{A}} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\boldsymbol{\varphi}} E_{n-1} \tag{2.24}$$

$$E_{t,n} = t_{B} e^{i\frac{t}{2}\phi} E_{n} = t_{B} r_{B} r_{A} e^{i\frac{t}{2}\phi} E_{n-1}.$$
 (2.25)

Die globale Phase $e^{i(kz-\omega t)}$ ist für alle Anteile gleich und wird unterdrückt. Bei der Reflexion an einer Grenzfläche tritt auf einer Seite ein Phasensprung auf. Um diesen zu berücksichtigen wird für den sofort reflektierten Feldanteil $E_{r,0}$ die Reflektivität mit einem negativen Vorzeichen versehen.

Auflösen dieser Rekursionsrelation ergibt unter Verwendung der Abkürzung $r := r_{\rm A} r_{\rm B}$ die Beziehung

$$E_n = r e^{i\phi} E_{n-1} = \left(r e^{i\phi} \right)^n E_0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots$$
 (2.26)

Analog ergeben sich die reflektierten Felder zu

$$E_{\rm r,n} = \frac{r_{\rm B} t_{\rm A}}{r} \left(r {\rm e}^{{\rm i}\phi} \right)^n E_0 \quad \text{für } n \ge 1, \quad E_{\rm r,0} = -\frac{r_{\rm A}}{t_{\rm A}} E_0 \tag{2.27}$$

und die transmittierten Felder zu

$$E_{\mathrm{t},n} = t_{\mathrm{B}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\phi} \left(r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^n E_0.$$
(2.28)

Die hier angeführten Felder sind die Anteile einer Welle, welche nur für eine kurze Zeit auf den Resonator fällt. Für das Verhalten des Resonators ist es jedoch interessanter, den Fall zu betrachten, bei dem die Welle ständig einstrahlt. Dieser Vorgang kann dargestellt werden, indem für jeden Iterationsschritt $n \rightarrow n + 1$ von neuem ein eintreffender Anteil der Amplitude $E_{\rm e}$ überlagert wird. Für das Resonatorfeld, das reflektierte Feld und das transmittierte Feld ergeben sich dann die Reihenausdrücke

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right)^n E_0, \qquad (2.29)$$

$$E_{\rm r} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{{\rm r},n} = -\frac{r_{\rm A}}{t_{\rm A}} E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{\rm B} t_{\rm A}}{r} \left(r {\rm e}^{{\rm i}\phi} \right)^n E_0 \quad \text{und}$$
(2.30)

$$E_{\rm t} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{{\rm t},n} = \sum_{n=0}^{\infty} t_{\rm B} {\rm e}^{{\rm i}\frac{1}{2}\phi} \left(r{\rm e}^{{\rm i}\phi}\right)^n E_0.$$
(2.31)

Der Kern aller dreier Ausdrücke ist die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right)^n = \frac{1}{1 - r \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \quad \text{für } |r| < 1.$$
 (2.32)

Die drei Felder lauten damit ausgewertet $(t := t_A t_B)$

$$E = \frac{1}{1 - r e^{i\phi}} E_0 = \frac{1}{1 - r e^{i\phi}} t_A E_e, \qquad (2.33)$$

$$E_{\rm r} = -\frac{r_{\rm A} - (r_{\rm A}^2 + t_{\rm A}^2) r_{\rm B} \, {\rm e}^{{\rm i}\phi}}{1 - r \, {\rm e}^{{\rm i}\phi}} E_{\rm e} \quad \text{und}$$
(2.34)

$$E_{\rm t} = \frac{1}{1 - r {\rm e}^{{\rm i}\phi}} t_{\rm B} {\rm e}^{{\rm i}\frac{1}{2}\phi} E_0 = \frac{1}{1 - r {\rm e}^{{\rm i}\phi}} t {\rm e}^{{\rm i}\frac{1}{2}\phi} E_{\rm e}.$$
 (2.35)

Das Verhalten des Resonatorfeldes, des reflektierten Feldes und des transmittierten Feldes ist in Abb. 2.4 dargestellt. Der Betrag der Feldstärke nimmt für eine Phasenverschiebung von $\phi = 0$ ein Maximum an und fällt daneben schnell ab. Die Phasenverschiebung zeigt um $\phi = 0$ eine schnelle Änderung.

Die Intensität I einer ebenen Welle berechnet sich durch das zeitliche Mittel des Betragsquadrats der Feldamplitude [10, S. 51],

$$I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c \overline{|\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)|^2},$$
(2.36)

worin ε_0 die Permeabilität des Vakuums und
 c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen.



Abb. 2.4: Feldstärken bei der Vielstrahlinterferenz. Das einfallende Feld besitzt die Amplitude $E_{\rm e} = 1$. Dargestellt ist (a) der Betrag und (b) das Argument des Resonatorfeldes E, des reflektierten Feldes $E_{\rm r}$ und des transmittierten Feldes $E_{\rm t}$, berechnet nach den Gln. (2.33)-(2.35). Die Spiegel sind verlustfrei und besitzen eine Reflektivität von $r_{\rm A} = r_{\rm B} = 0.9$.

Für die Berechnung der Intensitäten wird vereinfachend angenommen, dass der bei der Transmission und der Reflexion auftretende Phasensprung ein Vielfaches von π ist, dass also $r_{A,B}$ und $t_{A,B}$ reell sind. Damit erhält man dann

$$I_{\rm t} = \left| \frac{1}{1 - r {\rm e}^{{\rm i}\phi}} t {\rm e}^{{\rm i}\frac{1}{2}\phi} \right|^2 I_{\rm e}$$
(2.37)

$$=t^{2}\frac{1}{1+r^{2}-2r\cos\phi}I_{e}$$
(2.38)

$$=\frac{t^2}{(1-r)^2}\frac{1}{1+\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{\phi}{2}}I_{\rm e}.$$
(2.39)

Die vom Resonator transmittierte relative Lichtleistung ist in Abb. 2.5 dargestellt. Der Verlauf der transmittierten Intensität wiederholt sich nach einer Phasenverschiebung von 2π . Die Phasenverschiebung lässt sich aus dem Abstand der Resonatorspiegel durch

$$\phi = k2L = \frac{2\pi}{\lambda} 2L = \frac{2\pi\nu}{c} 2L \tag{2.40}$$

berechnen, wobei hier für das Medium im Resonator die Brechzahl 1 gesetzt wurde und $\nu = c/\lambda$ die Frequenz des Lichts bezeichnet. Es wurde dabei beachtet, dass das Licht die Resonatorlänge zweimal durchquert. Die Phase durchläuft also einen Bereich von 2π , wenn die Frequenz des Lichts bei



Abb. 2.5: Transmittierte Intensität und Definition von Resonatorkenngrößen. Die vom Resonator transmittierte Intensität nach Gl. (2.39) ist in Abhängigkeit der Phasenverschiebung aufgetragen. Die Halbwertsbreite der transmittierten Intensität wird mit γ_{ϕ} bezeichnet. Der Freie Spektralbereich für die Phasenverschiebung ϕ_{FSB} beträgt 2π . Die Intensität ist für verschiedene Reflektivitäten r dargestellt.

konstanter Resonatorlänge über einen Bereich von

$$\nu_{\rm FSB} = \frac{c}{2L} \tag{2.41}$$

durchstimmt wird. Diese Frequenz ν_{FSB} wird als Freier Spektralbereich (FSB) bezeichnet.

Eine zweite Kenngröße des Resonators ergibt sich aus der Halbwertsbreite γ_{ϕ} der Resonanz. Das Verhältnis von Halbwertsbreite und Freiem Spektralbereich,

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_{\text{FSB}}}{\gamma_{\phi}} = \frac{\nu_{\text{FSB}}}{\gamma_{\nu}},\tag{2.42}$$

wird als Finesse des Resonators bezeichnet. Dabei wurde die Linienbreite γ_{ν} in Frequenzeinheiten dargestellt. Der qualitative Zusammenhang zwischen Linienbreite und Reflektivität lässt sich bereits aus Gl. (2.39) ablesen. Die Linienbreite wird durch das Verhalten des Ausdrucks

$$\frac{4r}{(1-r)^2}\sin^2\frac{\phi}{2}$$
 (2.43)

im Nenner bestimmt. Das Maximum einer Resonanz wird für $\phi = 0$ erreicht. Der Abfall der transmittierten Intensität geschieht umso schneller, je schneller der Nenner in (2.43) anwächst. Der Nenner wächst genau dann schnell an, wenn der Vorfaktor $4r/(1-r)^2$ groß ist. Da dieser Vorfaktor streng monoton mit r anwächst, wird die Resonanz umso schmäler, je näher die Reflektivität an 1 liegt. Für hohe Reflektivitäten nahe 1 tritt die Resonanz damit nahe bei $\phi = 0$ auf.

2.2.2 Fabry-Pérot-Resonatoren hoher Finesse

Von besonderem Interesse für diese Arbeit sind Resonatoren mit hoher Finesse. Für diese lassen sich besonders einfache Ausdrücke für die Form der Resonanzen angeben, namentlich Lorentz-Kurven. Für diesen Grenzfall hoher Finesse lässt sich die transmittierte Intensität (2.39) nähern durch

$$I_{\rm t} = \frac{t^2}{(1-r)^2} \frac{1}{1 + \frac{4r}{(1-r)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2}} I_{\rm e}$$
(2.44)

$$\stackrel{\phi \ll 1}{\approx} \frac{t^2}{(1-r)^2} \frac{1}{1 + \frac{r}{(1-r)^2} \phi^2} I_{\rm e}. \tag{2.45}$$

Der genäherte Ausdruck beschreibt eine Lorentz-Kurve mit Halbwertsbreite

$$\gamma_{\phi} = 2\frac{1-r}{\sqrt{r}}.\tag{2.46}$$

Die Finesse für eine Resonator hoher Reflektivität nahe 1 ergibt sich aus Gl. (2.42) damit zu

$$\mathcal{F} = \frac{\phi_{\text{FSB}}}{\gamma_{\phi}} \approx \frac{\pi \sqrt{r}}{1 - r}.$$
(2.47)

Die Finesse eines Resonators, und damit auch die Linienbreiten der Resonanzen, wird also ausschließlich durch die Reflektivität der Resonatorspiegel bestimmt.

Finesse und Spiegelverluste

Ein hilfreicher Zusammenhang ergibt sich, wenn die Reflektivität mithilfe der Spiegelverluste ausgedrückt wird. Unter Spiegelverlusten sollen hier alle Prozesse verstanden werden die dazu führen, dass das Licht nicht reflektiert wird. Die Spiegelverluste umfassen also sowohl tatsächliche Verluste wie Absorption oder Streuung aus dem Resonator, als auch Transmission aus dem Resonatorinneren heraus. Aufgrund der Energieerhaltung müssen die Intensitäten aller Prozesse in Summe eins ergeben,

$$1 = r_i^2 + \mathcal{L}_i \quad \text{für } i = A, B. \tag{2.48}$$

Werden die Spiegelverluste in die Gleichung der Finesse (2.47) eingesetzt, erhält man

$$\mathcal{F} \approx \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \tag{2.49}$$

$$\stackrel{\sqrt{r}\approx 1}{\approx} \frac{\pi}{1 - \sqrt{1 - \mathcal{L}_{\mathrm{A}}}\sqrt{1 - \mathcal{L}_{\mathrm{B}}}} \tag{2.50}$$

$$\approx \frac{\pi}{1 - (1 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{A}})(1 - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{B}})}.$$
(2.51)



Abb. 2.6: Entstehung einer Resonanz. Dargestellt sind die Werte der relativen Resonatorfeldstärke $E/E_{\rm e}$. Links: Im allgemeinen Fall wird die Resonatorfeldstärke durch einen Kreis in der komplexen Zahlenebene mit Radius r bestimmt. Resonanzen treten in der Nähe des Ursprungs auf, wenn die Phase ϕ des Resonatorfeldes ein Vielfaches von 2π annimmt. Rechts: Im Grenzfall hoher Reflektivitäten nähert sich der Kreis immer mehr der imaginären Achse an und entartet zu einer Geraden. In diesem Fall lässt sich eine Resonanz besonders einfach beschreiben. Die Größe $1 - e^{i\phi}$ besitzt dabei den Betrag r' und das Argument ϕ' .

Da im Grenzfall hoher Finesse die Spiegelverluste klein sein müssen, kann das Produkt $\mathcal{L}_A \mathcal{L}_B$ vernachlässigt werden und man erhält den Zusammenhang zwischen der Finesse des Resonators und den Spiegelverlusten,

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{\mathcal{L}_{\rm A} + \mathcal{L}_{\rm B}} = \frac{2\pi}{\mathcal{L}_{\rm ges}},$$
 (2.52)

wobei die Gesamtverluste $\mathcal{L}_{ges} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$ eingeführt wurden.

Geometrische Herleitung der transmittierten Leistung

Alternativ zur oben gezeigten Herleitung der Linienform eines Resonators hoher Finesse aus der expliziten Gleichung der transmittierten Leistung lassen sich die Näherungsausdrücke für den benötigten Vorfaktor sofort aus der Graphik 2.6 ablesen. Der Übergang vom allgemeinen Fall zum Fall eines Resonators hoher Finesse ist in Abb. 2.6 dargestellt. Die am Resonator auftretenden Felder lassen sich im Wesentlichen durch den Vorfaktor

$$\frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}\tag{2.53}$$

beschreiben, der sich aus der geometrischen Reihe (2.32) ergibt. Dieser Vorfaktor lässt sich geometrisch interpretieren, indem seine einzelnen Bestandteile in der komplexen Zahlenebene dargestellt werden. Der Ausdruck $1-re^{i\phi}$

16

beschreibt einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt 1, der im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird. Der gesuchte Vorfaktor ergibt sich dann durch Inversion der Punkte dieses Kreises.

Wird der Übergang zu einem Resonator hoher Finesse, bzw. $1 - r \ll 1$, gemacht, nähert sich der Kreis immer mehr der imaginären Achse an. In einer kleinen Umgebung des Ursprungs lässt sich der Kreis im Grenzfall durch eine Gerade beschreiben, die im Abstand 1 - r parallel zur imaginären Achse verläuft.

Das Argument ϕ' eines Kreispunktes lautet

$$\phi' = \arctan \frac{r\phi}{1-r} \tag{2.54}$$

und sein Betrag

$$r' = \sqrt{(r\phi)^2 + (1-r)^2}.$$
 (2.55)

Der gesuchte Vorfaktor besitzt dann das Argument $-\phi'$ und den Betrag

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(r\phi)^2 + (1-r)^2}}.$$
(2.56)

Zur Berechnung der transmittierten Intensität muss das Betragsquadrat $1/r^{\prime 2}$ berechnet werden und man erhält

$$I_{\rm t} \sim \frac{1}{|r'|^2} = \frac{1}{(1-r)^2} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{(1-r)^2} \phi^2}.$$
 (2.57)

Da der Resonator eine hohe Reflektivität $r \approx 1$, also $r^2 \approx r$ besitzt, ist die hier gewonnene Linienbreite gleich jener aus der Näherung (2.45).

2.2.3 Resonatoren mit sphärischen Spiegeln

Der bisher beschriebene Fabry-Pérot-Resonator wurde durch zwei planparallele Spiegel gebildet. Es lassen sich allerdings auch mit gekrümmten Spiegeln Resonatoren realisieren. Diese sind deshalb interessant, da sie stabile Resonatormoden ausbilden können. Im Gegensatz dazu sind Resonatoren mit planparallelen Spiegeln instabil und können das Licht nicht einschließen. Die Eigenmoden eines Resonators mit gekrümmten Spiegeln werden etwa durch Hermite-Gauß-Moden gebildet. Dies ist möglich, da diese Moden annähernd sphärische Wellenfronten besitzen und sich an die Spiegelkrümmung anpassen können. Die Stabilität solcher Resonatoren lässt sich mit Hilfe eines Ersatzsystems aus sich periodisch wiederholenden Linsen untersuchen [14]. Es zeigt sich dabei, dass nur für bestimmte Kombinationen von Spiegelkrümmungen und -abständen stabile Resonatoren entstehen.



Abb. 2.7: Sphärischer Resonator. Der sphärische Resonator besteht aus zwei Spiegeln mit Krümmungsradius R_A bzw. R_B , welche in einem Abstand L voneinander positioniert sind. Die Spiegel sind nicht gegeneinander verkippt.

Stabilitätsdiagramm

Zur Formulierung einer Stabilitätsbedingung werden die Größen

$$g_{\rm A} = 1 - \frac{L}{R_{\rm A}}$$
 und $g_{\rm B} = 1 - \frac{L}{R_{\rm B}}$ (2.58)

eingeführt, wobei L die Resonatorlänge und $R_{\rm A}$ bzw. $R_{\rm B}$ den Krümmungsradius der Resonatorspiegel bezeichnen (vgl. Abb. 2.7). Mit diesen beiden Größen lässt sich eine Bedingung für einen stabilen Resonator formulieren [10, S. 478],

$$0 \le g_{\rm A} g_{\rm B} \le 1. \tag{2.59}$$

Die Stabilität der verschiedenen Resonatortypen kann in einem Stabilitätsdiagramm veranschaulicht werden (Abb. 2.8). Der für diese Arbeit relevante Resonatortyp ist der plan-konkave Resonator. Im Stabilitätsdiagramm bewegt sich dieser Resonator wegen des vorhandenen Planspiegels ($R_A = \infty$) parallel zur senkrechten Koordinatenachse. Ein Resonator mit verschwindender Länge liegt im Punkt (1,1) und bei wachsender Länge bewegt sich der Resonator senkrecht nach unten. Das Ende des Stabilitätsbereichs wird für den plan-konkaven Resonator erreicht, wenn die Resonatorlänge den Wert des Krümmungsradius annimmt, $L = R_B$.

Kenngrößen der Resonatormoden

Eine wichtige Kenngröße der Resonatormoden ist ihre Strahltaille. Allgemein lässt sich für einen Resonator mit sphärischen Spiegeln die Strahltaille berechnen zu [14]

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{L(R_{\rm A} - L)(R_{\rm B} - L)(R_{\rm A} + R_{\rm B} - L)}{(R_{\rm A} + R_{\rm B} - 2L)^2}.$$
 (2.60)

Im wichtigen Spezialfall eines plan-konkaven Resonators erhält man den Ausdruck für die Strahltaille

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \sqrt{R_{\rm B}L - L^2}.$$
 (2.61)



Abb. 2.8: Stabilitätsdiagramm. Eingezeichnet sind die Grenzen der Stabilitätsbedingung $0 < g_A g_B < 1$ für verschiedene Resonatorkonfigurationen. In den weißen Bereichen sind die gebildeten Resonatoren stabil, in den grauen instabil. Ein plan-konkaver Resonator besitzt einen Stabilitätsbereich entlang der dicken, gestrichelten Linie. Abbildung adaptiert nach [14].

Ein Beispiel für den Verlauf der Strahltaille und des Strahlradius auf dem gekrümmten Spiegel ist in Abb. 2.9 dargestellt. Das Verhalten der Strahltaille zeichnet sich dabei dadurch aus, dass sie sowohl für kurze, als auch für lange Resonatoren gegen null geht. Der Strahlradius auf dem gekrümmten Spiegel wird durch die Strahltaille und die Aufweitung der Mode nach Gl. (2.11) bestimmt. Für kurze Resonatoren besitzt der Strahl eine verschwindende Ausdehnung auf dem gekrümmten Spiegel, bei Annäherung an das Ende des Stabilitätsbereichs für lange Resonatoren weitet sich die Mode immer mehr auf und der Strahlradius divergiert.

Die Resonanzen, die sich im Resonator ausbilden, werden durch eine Reihe von Einflussgrößen bestimmt. Die Resonanzfrequenz ν einer Mode lässt sich durch die Resonanzbedingung

$$\frac{\nu}{\nu_{\rm FSB}} = (q+1) + \frac{1}{\pi}(n+m+1)\arccos\sqrt{\left(1 - \frac{L}{R_{\rm A}}\right)\left(1 - \frac{L}{R_{\rm B}}\right)} \quad (2.62)$$

ausdrücken [14], wobe
iqdie Anzahl von Knoten der stehenden Welle in axialer Richtung ist
,(n,m) die Moden
indizes der Hermite-Gauß-Mode be-



Abb. 2.9: Strahltaille und Strahlradius auf dem gekrümmten Spiegel eines plankonkaven Resonators. Für ein Beispiel eines plankonkaven Resonators ($R_{\rm B} = 250\,\mu{\rm m}, \lambda = 845\,{\rm nm}$) ist die (a) Strahltaille und der (b) Strahlradius in Abhängigkeit der Resonatorlänge dargestellt. Die Parameter des Resonators wurden derart gewählt, dass sie etwa den später im Experiment auftretenden entsprechen.

zeichnen und die Bezugsfrequenz

$$\nu_{\rm FSB} = \frac{c}{2L} \tag{2.63}$$

durch den Freien Spektralbereich gebildet wird.

Diese Gleichung hat insbesondere eine wichtige Konsequenz: Sie zeigt, dass die Moden höherer Ordnung entartet sind. Eine Mode mit Ordnung N = n + m ist demnach (N + 1)-fach entartet. Diese Entartung gilt nur für den Fall des idealen Resonators, also eines Resonators mit sphärischen, unendlich ausgedehnten Spiegeln. Liegt hingegen ein realer Resonator mit deformierten Spiegeln vor, so kann die Entartung der höheren Moden aufgehoben werden.

2.3 Verluste in Resonatoren

Die bisher behandelten Resonatoren waren ausschließlich ideale Resonatoren, das heißt Resonatoren mit perfekt sphärisch geformten, unendlich ausgedehnten Spiegeln. Nur für solche ideale Resonatoren bilden die Hermite-Gauß- oder die Laguerre-Gauß-Moden Lösungen für das Resonatorfeld. Für einen realen Resonator, also einen Resonator mit nicht sphärischen, endlich ausgedehnten Spiegeln, müssen andere Lösungen gefunden werden.

Eine Methode, die Anfang der 1960er Jahre von Fox und Li vorgeschlagen wurde, berechnet das entstehende Resonatorfeld durch Iteration des Umlaufs

20

des Feldes [5]. Nach einer Vielzahl von Umläufen stellt sich ein stationärer Zustand ein, welcher eine Mode des Resonators darstellt.

Eine numerische Implementierung einer ähnlichen iterativen Methode zur Berechnung des Resonatorfeldes stellt das Matlab-Modul OSCAR dar [15]. In der vorliegenden Arbeit wurde zu Beginn versucht, das Resonatorfeld mittels OSCAR zu berechnen. Es stellte sich dabei allerdings als Problem heraus, dass die Resonatoren eine sehr hohe Finesse ($\gtrsim 10^5$) hatten, da hierdurch eine sehr große Zahl von Iterationen nötig wurde, bis ein stationärer Zustand erreicht wurde. Diese Methode wurde daher nicht weiter verfolgt.

Neben dieser iterativen Methode wurde von Kleckner et al. eine Beschreibung des skalaren Resonatorfeldes durch eine Eigenwertmethode vorgestellt [7]. Ein Vorteil der Eigenwertmethode ist, dass sie unabhängig von der Finesse des Resonators nur die Lösung einer einzelnen Eigenwertgleichung verlangt.

Die Berechnung der Verluste wird im Folgenden mittels zweier Methoden durchgeführt. Die erste Methode besteht in der direkten numerischen Lösung der Eigenwertgleichung des Umlaufoperators eines realen Resonators. Die zweite Methode ist eine Abschätzung der Verluste aus der Größe der (0,0)-Mode auf dem Resonatorspiegel und dem daraus resultierenden abgeschnittenen Anteil.

2.3.1 Verlustberechnung durch die Eigenwertmethode

Die Eigenwertmethode von Kleckner geht direkt davon aus, dass das sich ausbildende elektromagnetische Feld E stationär ist und sich daher bei einem weiteren Umlauf des Feldes nur dessen Betrag und Phase ändern, d.h.

$$\hat{M} \left| E \right\rangle = \gamma \left| E \right\rangle, \tag{2.64}$$

wobei mit \hat{M} der Umlaufoperator des Resonators und mit γ dessen Eigenwert bezeichnet wird. Der Umlaufoperator beschreibt, wie das elektromagnetische Feld durch einen Umlauf im Resonator verändert wird. Mit ihm lässt sich die Bestimmung des stationären Resonatorfeldes auf ein Eigenwertproblem zurückführen.

Eine Anwendung dieses Eigenwertmodells unter Verwendung einer speziellen Basis wurde von Kleckner et al. beschrieben [7] und zur Berechnung der Resonatorverluste eines Resonators mit endlichen Spiegelausdehnungen verwendet. Bei dieser Berechnung wurde die Oberflächenform der Spiegel als ideales Paraboloid angenommen. Die Verwendung von Paraboloiden anstatt von Sphären hat den Grund, dass in der paraxialen Näherung die Wellenfronten durch Paraboloide beschrieben werden. Für den Fall einer nicht idealen Spiegeloberfläche wurde von Benedikter et al. [8] eine numerische Implementierung von Kleckners Modell vorgestellt. Die Eigenwertgleichung (2.64) lässt sich direkt numerisch lösen, wenn der Umlaufoperator in einer bestimmten Basis als Matrix dargestellt wird. In der Arbeit von Benedikter et al. wird dieser Ansatz verfolgt, der im Folgenden wiedergegeben wird. Als Basis werden die Hermite-Gauß-Moden $\psi :=$ $\mathrm{HG}_{n,m}$ verwendet. Die Matrixelemente des Umlaufoperators \hat{M} bezüglich dieser Basis besitzen die Darstellung

$$M_{t,s} = \left. e^{-4i\pi L/\lambda} \int_{-x_0}^{x_0} \int_{-y_0}^{y_0} \psi_t^-(x,y,z) \psi_s^{+*}(x,y,z) e^{-4i\pi\Delta(x,y)/\lambda} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right|_{\substack{z=z_\mathrm{B}\\(2.65)}},$$

wobei L die Resonatorlänge, $z_{\rm B}$ die z-Koordinate des Spiegels B und $\Delta(x, y)$ die Spiegeloberfläche als Abstand zur Transversalebene durch $z_{\rm B}$ bezeichnen. Für die Indizes wurden die Abkürzungen $t = (n_t, m_t)$ und $s = (n_s, m_s)$ eingeführt. Die Darstellung erfolgt hier direkt in nicht reduzierten Koordinaten (x, y, z). Der hochgestellte Index bezeichnet eine rechts- oder linkslaufende Welle.

Die Hermite-Gauß-Moden bilden die Basis zu einem unendlichdimensionalen Vektorraum. Für die numerische Berechnung muss eine endliche Zahl von Hermite-Gauß-Moden ausgwählt und diese für eine näherungsweise Berechnung verwendet werden. Bei Benedikter et al. geschieht dies, indem alle Moden bis zu einer gewählten Ordnung N_{max} benutzt werden, also alle Moden für die die Modenindizes $n + m \leq N_{\text{max}}$ erfüllen.

Die Verluste δ_n eines Eigenzustandes $|n\rangle$ des Resonators ergeben sich aus dem Fehlbetrag zu einem idealen Resonator mit Eigenwerten des Betrags 1, bzw. genauer

$$\delta_n = 1 - |\gamma_n|^2. \tag{2.66}$$

Zur Durchführung der numerischen Berechnungen wurde in der vorliegenden Arbeit das Rechen-Script von Benedikter et al. verwendet, welches von der Erstautorin auf Nachfrage zur Verfügung gestellt wurde. Das Rechen-Script ist eine Implementierung der beschriebenen Methode in Mathematica. Die Resonatorverluste werden dabei durch folgende Schritte für mehrere Resonatorlängen berechnet:

- 1. Die Spiegeloberfläche $\Delta(x, y)$ wird eingelesen. Die Spiegeloberfläche gibt dabei die Differenz zur Ebene $z = z_{\rm B}$ an und ist auf einem Gitter mit den gleichmäßig verteilten Punkten (x_i, y_i) gegeben. Die Gitterauflösung muss fein genug sein, um die räumliche Verteilung der Hermite-Gauß-Moden erfassen zu können. Gleichzeitig darf die Gitterauflösung aber auch nicht unnötig groß sein, um die Rechenzeit und den Speicherbedarf nicht zu groß werden zu lassen.
- 2. Der Basisparameter der Strahltaille w_0 wird ermittelt, um die Basisfunktionen festlegen zu können. Die später verwendete Strahltaille

wird berechnet, indem das Matrixelement M_{00} unter Variation von w_0 maximiert wird. Im Rechen-Script von Benedikter et al. geschieht dies sowohl für eine Strahltaille $w_{0,x}$ in x-Richtung, als auch unabhängig davon für eine Strahltaille in $w_{0,y}$ -Richtung. Die Strahltaille wird für jede gewünschte Resonatorlänge neu ermittelt.

- 3. Die Matrixdarstellung des Umlaufoperators wird für jede Resonatorlänge berechnet.
- Die Eigenwerte des Umlaufoperators in Matrixdarstellung werden f
 ür jede Resonatorl
 änge berechnet.
- 5. Die Verluste und die Finesse der Eigenzustände werden für jede Resonatorlänge aus den Eigenwerten berechnet.

2.3.2 Abschätzung durch Abschneideverluste

Die Verluste der (0,0)-Mode bei endlicher Resonatorausdehnung können durch eine einfache Überlegung abgeschätzt werden [3]. Es wird dabei angenommen, dass sich die Resonatorverluste durch den Anteil des Lichts nähern lassen, der nicht auf dem Spiegel auftrifft. Diese Überlegung führt zu einem Abschneideverlust von

$$\mathcal{L} = e^{-2\frac{r_{\rm b}^2}{w(z)^2}},\tag{2.67}$$

mit dem Spiegelhalbmesser $r_{\rm b}$ und dem Strahlradius w(z) am Ort des Spiegels.

Es muss dabei betont werden, dass diese Methode die Physik des Resonatorfeldes nicht korrekt beschreibt. Durch das Abschneiden der äußeren Bereiche der (0,0)-Mode wird diese verändert und die neu entstehende Feldverteilung wird einen anderen Anteil außerhalb der Spiegelausdehnung haben. Der Abschneideverlust (2.67) ist daher nur eine Abschätzung, welche für den Fall zu gebrauchen ist, für den die Spiegelausdehnung groß gegenüber der Ausdehnung der Mode auf dem Spiegel ist.

In Abbildung 2.10 ist an einem Beispielresonator das Verhalten dieser Abschneideverluste dargestellt. Der angenommene Resonator ist plankonkav und besitzt einen Spiegel mit Krümmungsradius 250 µm und Spiegelhalbmesser $r_{\rm b}$ im Bereich von 20 bis 50 µm, was in etwa den später im Experiment zugänglichen Parametern entspricht.

Für verschwindende Resonatorlängen gehen die Abschneideverluste gegen null und mit steigender Resonatorlänge gehen die Verluste gegen eins. Je kleiner der Spiegelhalbmesser ist, desto größer sind die Verluste bei einer gegebenen Länge.

Da im Experiment die Finesse die direkt zugängliche Messgröße ist, werden diese Abschneideverluste in eine Finesse umgerechnet. Hierfür werden



Abb. 2.10: Resonatorverluste nach dem Abschneide-Modell. (a) Die Abschneideverluste nach Gl. (2.67) für einen plan-konkaven Resonator mit Krümmungsradius 250 µm sind für verschiedene Spiegelradien $r_{\rm b}$ aufgetragen. (b) Die Finesse zeigt je nach Spiegelradius einen unterschiedlich früh einsetzenden Abfall, unter der Annahme von 50 ppm zusätzlicher Verluste.

zusätzliche Resonatorverluste (insbes. Transmission) von 50 ppm angenommen. Dadurch ergibt sich ein Verlauf für die Finesse, bei dem die Finesse zunächst praktisch konstant ist und ab einer gewissen Resonatorlänge schnell abzufallen beginnt. Der Abfall beginnt bei jener Resonatorlänge, bei der die Abschneideverluste die Größenordnung der Zusatzverluste erreichen.

2.4 Doppelbrechung in Resonatoren

In der bisherigen Beschreibung von Resonatoren wurde das elektromagnetische Feld stets durch ein skalares Feld beschrieben. Damit können Phänomene, die auf der Vektornatur des Lichts beruhen, nicht erfasst werden. Ein solches Phänomen, das auf der Polarisation der Resonatormoden beruht, ist die Aufspaltung der Resonanzen der beiden Resonatorpolarisationen. Grund für diese Aufspaltung ist ein geringfügiger Resonanzlängenunterschied für die beiden Polarisationen. In einer Arbeit von Uphoff et al. [9] wurde diese Aufspaltung für verschiedene Resonatoren gemessen und ein einfaches Modell vorgestellt, welches die Resonanzaufspaltung alleine anhand der Elliptizität der Faserspiegel erklärt. Im Folgenden soll dieses Modell wiedergegeben werden.

Die Grundidee des Modells basiert darauf, die Resonanzaufspaltung aus einer Störung des Randwertproblems des elektromagnetischen Feldes im Resonator zu berechnen. Die Störung des Randwertes wird dabei durch die Polarisation des Feldes in Kombination mit einer Korrektur der paraxialen Näherung hervorgerufen.

Grund für die Korrektur der paraxialen Näherung ist, dass das elektromagnetische Feld der paraxialen Näherung nicht mit den Maxwellschen Gleichungen vereinbar ist. Diese Korrektur wurde durch Lax et al. [16] vorgestellt. In der üblichen paraxialen Approximation werden die Felder durch eine Polarisation in eine konstante Richtung beschrieben. Wird ein solches Feld konstanter Polarisation in die Maxwellschen Gleichungen eingesetzt, zeigt sich, dass es diese nicht erfüllt. Durch einen Reihenansatz lassen sich anschließend Korrekturterme zur bekannten paraxialen Näherung herleiten. Der leitende Korrekturterm ist eine longitudinale Korrektur, deren Feldvektor in Ausbreitungsrichtung zeigt.

Unter Verwendung dieser longitudinalen Korrektur kann eine Störung der Eigenwerte der Resonatormoden hergeleitet und daraus schließlich die Resonanzaufspaltung der Resonatorpolarisationen berechnet werden [9]. Die Störung der Eigenwerte wird dabei lediglich durch die Geometrie der Resonatorspiegel bestimmt. Die Störung der Randwerte wird dabei verursacht, weil die longitudinale Korrektur der Resonatormoden zu einer nicht verschwindenden Feldkomponente auf der Spiegeloberfläche führt.

Zunächst liegt das Feld E_x mit Polarisation in x-Richtung vor, das die Helmholtz-Gleichung $\Delta E_x + k^2 E_x = 0$ erfüllt, wobei k die Wellenzahl des Feldes bezeichnet. Dieses Feld soll auf der metallischen Resonatoroberfläche S verschwinden, $E_x|_S = 0$, also die Lösung des ungestörten Randwertproblems darstellen. Anschließend wird das longitudinal korrigierte Feld \tilde{E}_x betrachtet. Dieses Feld verschwindet im Allgemeinen nicht mehr auf der Spiegeloberfläche, es gilt also $\tilde{E}_x^S := \tilde{E}_x|_S \neq 0$. Mit diesen Feldern ergibt sich die Frequenzverschiebung $\delta \nu$ der Resonanz nach einer von Cullen [17] gegebenen Formel zu

$$\delta\nu \approx \frac{c}{4\pi k} \frac{\int_{S} \dot{E}_{x}^{S} \nabla E_{x} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\int_{V} E_{x}^{2} \mathrm{d}\boldsymbol{V}}, \qquad (2.68)$$

wobe
icdie Lichtgeschwindigkeit und Vdas zu integrierende Raumvolumen des Resonators bezeichnet.

Die Spiegeloberfläche S des Resonators soll ein elliptisch verformter Spiegel sein, der durch zwei Parabeln mit Krümmungsradien R_x und R_y in xund y-Richtung beschrieben wird. Eine elliptische Verformung wird betrachtet, da dies für faserbasierte Resonatoren eine dominante Störung ist. Der Resonator besitzt die Länge L und der zweite Resonatorspiegel wird durch einen Planspiegel gebildet, d.h.

$$S: \quad z = L - \frac{x^2}{2R_x} - \frac{y^2}{2R_y}.$$
 (2.69)



Abb. 2.11: Resonanzaufspaltung nach Uphoffs Modell. Dargestellt ist die Resonanzaufspaltung der beiden Resonatorpolarisationen in Abhängigkeit der Resonatorlänge. Der verwendete Resonator besitzt die Krümmungsradien $R_x = 260 \,\mu\text{m}$ und $R_y = 240 \,\mu\text{m}$ und die Wellenlänge des Lichts beträgt $\lambda = 845 \,\text{nm}$. Die 1/L-Abhängigkeit der Resonanzaufspaltung ist klar zu erkennen.

Wird nun die longitudinale Korrektur erster Ordnung [16]

$$E_z = \frac{\mathrm{i}}{k} \frac{\partial E_x}{\partial x} \tag{2.70}$$

verwendet, um die Feldkomponente auf der Spiegeloberfläche zu berechnen, erhält man für das in x-Richtung polarisierte Feld die Störung der Eigenfrequenz [9]

$$\delta \nu_{\rm PolX} \approx -\frac{c}{4\pi kL} \frac{1}{R_x}.$$
 (2.71)

Entscheidend ist nun, dass die beiden Resonatorpolarisationen eine unterschiedlich starke Frequenzverschiebung $\delta \nu_{\text{PolX}}$ bzw. $\delta \nu_{\text{PolY}}$ erfahren. Hierdurch kommt es insgesamt zu einer Aufspaltung der Resonanzen der beiden Resonatorpolarisationen. Die Frequenzaufspaltung der beiden Polarisations-Eigenmoden ergibt sich für die (0,0)-Mode TEM₀₀ schließlich zu

$$\Delta \nu = \delta \nu_{\text{PolX}} - \delta \nu_{\text{PolY}} = -\frac{c}{4\pi kL} \frac{R_y - R_x}{R_y R_x}.$$
(2.72)

Dies ist eine bemerkenswert einfache Gleichung. In ihr bestimmen lediglich die Resonatoreigenschaften der Resonatorlänge und der beiden Krümmungsradien die Stärke der Resonanzaufspaltung. Insbesondere sagt die Gleichung eine 1/L-Abhängigkeit der Resonanzaufspaltung voraus.

Ein Beispiel für die Resonanzaufspaltung in einem Resonator ist in Abb. 2.11 dargestellt. Der Resonator ist ein plan-konkaver Resonator und besitzt einen Spiegel mit den Krümmungsradien $R_x = 260 \,\mu\text{m}$ und $R_y = 240 \,\mu\text{m}$. Die Wellenlänge des eingestrahlten Lichts beträgt $\lambda = 845$ nm. Die Parameter bewegen sich in einem Bereich, der später in dieser Arbeit durch Messungen zugänglich war. Die auffälligste Eigenschaft ist die 1/L-Abhängigkeit der Resonanzaufspaltung.

2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Theorie von Fabry-Pérot-Resonatoren beschrieben. Die Feldverteilung innerhalb eines Fabry-Pérot-Resonators mit gekrümmten Spiegeln wird durch die Lösungen der paraxialen Helmholtz-Gleichung beschrieben. Die Resonanzen lassen sich aus dem Prinzip der Vielstrahlinterferenz herleiten. Für einen Resonator mit ideal sphärisch geformten Spiegeln werden die Resonatormoden durch Hermite-Gauß- oder durch Laguerre-Gauß-Moden gebildet.

Im Fall eines realen Resonators mit endlicher Spiegelausdehnung und nicht perfekt sphärisch geformten Spiegeln werden zwei Korrekturen notwendig. Zum einen treten Verluste auf, welche durch ein Eigenwertmodell beschrieben werden. Zum anderen spalten sich die Resonanzen der beiden Resonatorpolarisationen auf, was seinen Grund in der longitudinalen Korrektur der Resonatormoden hat.

Die beiden Methoden zur Verlustberechnung und die Methode zur Berechnung der Resonanzaufspaltung werden in Kapitel 5 für einen Vergleich mit Messdaten verwendet.

Kapitel 3

Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau hat die Aufgabe, die Eigenschaften von Faserspiegeln zu untersuchen. Faserspiegel sind Spiegel, der in das Ende einer Glasfaser eingearbeitet sind. Herzstück des Versuchsaufbaus ist ein optischer Resonator. Der Resonator wird aus zwei Spiegeln gebildet, wobei einer der Spiegel der zu untersuchende Faserspiegel und der andere ein Planspiegel ist. Die Spiegeleigenschaften werden aus dem Verhalten des Resonators abgeleitet. Als wichtigste Kenngröße werden die Spiegelverluste aus der Finesse des Resonators bestimmt. Aus der Messung der Längenabhängigkeit der Spiegelverluste können Rückschlüsse auf den Verlustmechanismus gezogen werden.

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über die Komponenten des Versuchsaufbaus gegeben und deren Funktion gegeben. Es wird erklärt, wie die Resonatorlänge durch Verstimmen der Laserwellenlänge bestimmt werden kann. Anschließend werden die Messmethoden vorgestellt, mit denen die Resonatorverluste und die Resonanzaufspaltung gemessen werden.

3.1 Experimenteller Aufbau

Der Kern des Versuchsaufbaus wird durch einen plan-konvexen Resonator gebildet, also durch einen Resonator, welcher aus einem Planspiegel und einem sphärischen Spiegel besteht. Der sphärische Spiegel wird dabei durch einen Faserspiegel gebildet, der charakterisiert werden soll. Als zweiter Spiegel wird ein Planspiegel gewählt, da dieser zum einen die einfachste mögliche Form besitzt und zum anderen diese Form auch zuverlässig hergestellt werden kann. Hierdurch ist das Verhalten dieses Spiegels bekannt. Auf diese Weise wird die Anzahl unbekannter Parameter minimiert.

Zur Erzeugung des Resonatorspektrums wird die Länge des Resonators durchgestimmt. Der Planspiegel ist dabei fixiert und der Faserspiegel wird mittels eines Piezos bewegt. Hierfür wird an den Piezo eine Spannung aus



Abb. 3.1: (a) Prinzip des verwendeten Resonatoraufbaus. Die Resonatorlänge L(t) wird mit einer Frequenz f durchgestimmt. Die Bewegung wird durch einen Piezo erzeugt. Die transmittierte Lichtleistung $I_t(t)$ wird mittels einer Photodiode als Funktion der Zeit t detektiert. (b) Resonator bestehend aus einer Faser und einem Planspiegel. Der Außendurchmesser der Faser beträgt 220 µm.

einem Funktionsgenerator angelegt. Die transmittierte Lichtleistung wird durch eine Photodiode detektiert. Eine vereinfachte schematische Darstellung des Resonators ist in Abb. 3.1a gezeigt.

3.1.1 Planspiegel und Faserspiegel

Der Planspiegel des Resonators wird durch einen dielektrischen Spiegel realisiert (ATFilms). Die Transmittivität bezogen auf die Lichtintensität beträgt dabei nominell T = 15 ppm für eine Wellenlänge von 866 nm. Die Verluste des verwendeten Planspiegels wurden durch eine Abklingzeitmessung des Resonatorfeldes (*Cavity ring-down*) bestimmt¹. Ursprünglich lag der Spiegelverlust bei 21(3) ppm (Verlust eines einzelnen Spiegels ohne Transmittivität). Zur Verminderung der Verluste wurde der Spiegel einer Wärmebehandlung unterzogen. Hierbei wurde die Temperatur über einen Zeitraum von vier Stunden von Raumtemperatur auf 450 °C gesteigert, für zwei Stunden dort gehalten und über Nacht wieder auf Raumtemperatur abgekühlt. Nach dieser Wärmebehandlung betrugen die Spiegelverluste 7(3) ppm.

Die Wärmebehandlung wurde nicht von der Herstellerfirma selbst durchgeführt, da unsere Arbeitsgruppe die Möglichkeit haben wollte, die Beschichtungen der Planspiegel gemeinsam mit den Beschichtungen der Fa-

¹Hierfür einen Dank an Josef Schupp für die Zurverfügungstellung seines Messaufbaus sowie Instruktionen zur Messung
serspiegel einer Wärmebehandlung zu erzielen. Auf diese Weise bestand die Möglichkeit, den Einfluss der Wärmebehandlung auf die Beschichtung durch eine einfach durchzuführende Messung an einem Planspiegel zu ermitteln.

Der Faserspiegel wurde durch Laserablation [3] an einem Ende einer Glasfaser hergestellt². Bei der Laserablation wird ein leistungsstarker CO₂-Laser auf das Ende einer Glasfaser fokussiert. Durch die entstehenden hohen Temperaturen entsteht eine konkave Einbuchtung, welche als Spiegel verwendet werden kann. Die Spiegelherstellung mittels Laserablation zeichnet sich dadurch aus, dass es ermöglicht, Spiegel mit sehr kleinen Krümmungsradien hinab bis zu wenigen Dutzend Mikrometern herzustellen. Durch Auftragen einer dielektrischen Vielfachschicht entstehen Spiegel für Resonatoren hoher Finesse (bis $\mathcal{F} > 10^5$).

Die Formgenauigkeit dieser Faserspiegel wurde durch die Verwendung einer Vielzahl von Laserpulsen verbessert [4]. Hierdurch ließen sich annähernd sphärische Spiegel (Abweichungen von ca. 20 nm bei 70 µm Spiegeldurchmesser) mit einem Durchmesser von bis zu 100 µm herstellen. Als Durchmesser wird hierbei die Größe desjenigen Bereichs bezeichnet, der innerhalb der bestimmten Genauigkeit (≤ 30 nm) einer sphärischen Form folgt. Die Krümmungsradien dieser Spiegel³ liegen im Bereich von 175 bis 1900 µm.

3.1.2 Verwendete Faserspiegel

Die verwendeten Faserspiegel wurden durch zwei Multimodenfasern gebildet. Die reflektierende Schicht der Fasern wurde durch eine dielektrische Vielfachschicht gebildet. Dabei sind 47 Viertelwellenlängenschichten aus abwechselnd Ta_2O_5 und SiO_2 auf das Faserende aufgebracht⁴. Der Sollwert der Transmission der Beschichtung betrug jeweils 2 ppm. Eine Zusammenfassung aller Faser-Parameter ist in Tabelle 3.1 gegeben.

Die Fasern werden durch eine Reihe von Parametern charakterisiert. Die Transmittivität ist ein vom Hersteller umgesetzter Sollwert. Die Multimodenfasern besaßen einen mittleren Krümmungsradius von rund 221 µm und 230 µm. Die Krümmungsradien wurden durch Anpassung einer Parabel an das Oberflächenprofil bestimmt. Das Oberflächenprofil der Fasern war bereits von Klemens Schüppert mittels Weißlichtinterferometrie [4, S. 37] vermessen worden. Neben dem zweidimensionalen Oberflächenprofil wurde dabei der Stirnflächenwinkel $\alpha_{\rm SF}$ der Oberflächennormalen zur Aus-

²Herstellung durch Klemens Schüppert in einer Kollaboration mit Prof. Jakob Reichel, Sébastien Garcia und Konstantin Ott am LKB an der ENS Paris

³ Die Messdaten dieser Spiegel sind in der Datei annac704.uibk.ac.at/anna/fibercavity/data/FiberProduction/Fibers2014.ods auf dem Server unserer Arbeitsgruppe zu finden.

⁴Siehe Labblog-Eintrag vom 17.2.2015

sir	de	T_{θ}
Id d	r Fe	,bell
ie fi	lser	e S
ir d	obei	i I: I
lie I	rfläc	Fige
Bere	che	nsc
chn	von	haft
nng	ein	en (
en	em	der
verv	idea	verv
venc	len	wen
lete	Pa	dete
p m	rabo	ň F
eglä	oloic	aser
ittet	hm	n. 1
jen :	it K	Die
Proj	rün	geoj
file.	nuu	met
	ngs	riscl
	radi	ıen
	r sn	Gri
	20	jßen
	(R)	sin
	+	d ir
	$R_{2})$	ı At
	2^{-1}	Ъ.
	larg	3.7
	este	defii
	llt.	nier
	Die	ť. U
	abg	ntei
	ŗebi	n sii
	ldet	nd c
	en ∤	lie ∤
	Αbw	₹bw
	eich	eich
	gun	gung
	;en	;en

y-Koordinate (μ m) -10 0 -5 0 10 -10 -5 0 10 -10 -10 -5 0 -10 -10 -5 0 -10 -10 -5 0 -10 -10 -5 -10 -10 -5 -10	ΘM	FaserbezeichnungFasertypHerstellerbezeichnungTransmissionStirnflächenwinkel α_{SF} Krümmungsradien $R_{1,2}$ Sphärizitätsradius R_{sph} Wärmebehandlung
$\frac{1}{100}$		M9 Multimodenfaser IVG Cu200UVIR 2 ppm $0,29^{\circ}$ $(215(5),226(5)) \mu m$ $35 \mu m$ ja
x-Koordinate (µm)	M1 1	M11 Multimodenfaser IVG Cu200UVIR 2 ppm 0,39° (225(5), 235(5)) µm 35 µm nein
<i>y</i> -Koordinate (μ m) -10 <i>x</i> -Koordinate (μ m) <i>y</i> -Koordinate (μ m) <i>y</i> -Koordinate (μ m) <i>y</i> -Koordinate (μ m)	P1	P1 Multimodenfaser IVG Cu200UVIR 2 ppm $0,66^{\circ}$ $(242(5), 252(5)) \mu m$ nein



Abb. 3.2: Profilschnitt durch ein Faserende mit einer Spiegeloberfläche. Die Fasergeometrie wird im Wesentlichen durch die Krümmungsradien der Halbachsen $R_{1,2}$, den Spährizitätsradius $R_{\rm sph}$, den Stirnflächenwinkel $\alpha_{\rm SF}$ gegen die Faserachse und den Manteldurchmesser $D_{\rm Mantel}$ beschrieben.



Abb. 3.3: Oberflächenglättung am Beispiel der Faser M9. (a) Das ungeglättete Oberflächenprofil zeigt ausgeprägte ringartige Messartefakte der Weißlichtinterferometrie sowie Oberflächenfluktuationen durch einzelne Pixel. (b) Nach der Glättung durch Faltung mit einer Gauß-Funktion der 1/e-Breite $\sigma = 1 \,\mu\text{m}$ sind diese Ringe und die Fluktuationen entfernt.

trittsachse der Gaußmode aus der Faser gemessen (vgl. Abb. 3.2). Der Sphärizitätsradius $R_{\rm sph}$ ist der Radius, ab dem die Faser deutlich vom sphärischen Profil abweicht [18, S. 60]. Dieser Wert ist nicht scharf abgrenzbar. Die Krümmungsradien $R_{1,2}$ beziehen sich auf die Krümmungen im Zentrum des Faserspiegels und geben den Wert des kleinsten und des größten Krümmungsradius an.

Zur Ermittlung der Oberflächenabweichung wird ein Paraboloid mit zentralem Krümmungsradius $R = (R_1 + R_2)/2$ von der gemessenen Oberfläche $\Delta(x, y)$ abgezogen. Es wurden Paraboloide anstelle von Sphären verwendet, da die Wellenfronten in der paraxialen Näherung Paraboloide bilden. Die Oberflächenabweichung ergibt sich dann zu

$$\epsilon(x,y) = \Delta(x,y) - \frac{1}{2R}(x^2 + y^2).$$
(3.1)

Ein zurückbleibender konstanter Versatz und eine zurückbleibende Verkippung werden ebenfalls korrigiert. Hierfür wird die punktweise Differenz zwischen Spiegeloberfläche und einer zu bestimmenden Ebene gebildet und jene Lage der Ebene durch Anpassung ermittelt, welche die Fehlerquadratsumme minimiert. Das korrigierte Spiegelprofil wird durch Subtraktion dieser angepassten Ebene vom ursprünglichen Spiegelprofil erhalten.

Anschließend wird die Oberflächenabweichung durch Faltung mit einer Gauß-Funktion geglättet. Die Glättung ist erforderlich, um ringartige Messartefakte der Weißlichtinterferometrie und Rauschen im Oberflächenprofil zu beseitigen. Diese Artefakte beeinflussen ansonsten die berechneten Resonatorverluste. In [4] wurden die Artefakte durch Mittelung über mehrere Oberflächenmessungen vermindert. Dies war hier leider nicht möglich, da bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit für jede Faser nur eine einzelne Oberflächenmessung zur Verfügung stand.

Die 1/e-Breite σ des Glättungskerns beträgt dabei typischerweise wenige Mikrometer. Die Breite des Glättungskerns wird durch Probieren ermittelt. Es wird dabei die kleinstmögliche Breite verwendet, die die Messartefakte noch größtenteils zum Verschwinden bringt. Für die Berechnung der Resonatorverluste mittels des Benedikter-Scripts wird nach der Glättung das anfangs subtrahierte Paraboloid wieder addiert.

Ein Vergleich von ungeglätteter und geglätteter Oberflächenabweichung ist in Abb. 3.3 angestellt. Ohne Glättung zeigen sich klar ringförmige Abweichungen des Oberflächenprofils und Profilfluktuationen auf der Skala einzelner Pixel. Nach der Glättung sind diese Störungen entfernt, während auf größerer Längenskala die Profile noch den gleichen Verlauf zeigen.

3.1.3 Beschreibung des experimentellen Aufbaus

Die Komponenten des Versuchsaufbaus werden grob in drei Gruppen eingeteilt: Komponenten zur Kontrolle und Einkopplung des Laserlichts, den optischen Resonator, sowie Komponenten zur Messung des Resonanzsignals (Abb. 3.5 und 3.4). Eine Auflistung aller verwendeten Bauteile ist im Tabelle 3.2 gegeben.

Das Laserlicht entstammt einem 844 nm Diodenlaser. Der Diodenlaser ist gitterstabilisiert und über einen Wellenlängenbereich von ca. 830 bis 850 nm verstimmbar. Des Weiteren lassen sich durch Modulation des Diodenstroms Seitenbänder auf den Laserstrahl aufmodulieren. Die Modulation geschieht durch einen Signalgenerator FG1 bei 50 MHz.

Die Lichtleistung wird durch ein $\lambda/2$ -Plättchen LHP1 und einen polarisierenden Strahlteiler PST1 geregelt. Der reflektierte Anteil wird über den Kollimator K3 durch eine Glasfaser einem Wellenlängenmessgerät zur Wellenlängenmessung zugeführt, während der transmittierte Anteil zur Ein-



Abb. 3.4: Versuchsaufbau zur Erzeugung, Kontrolle und Messung von Resonatormoden eines faserbasierten Resonators. Das Bezeichnungsschema lautet allgemein: LHP $\lambda/2$ -Plättchen, LVP $\lambda/4$ -Plättchen, PST polarisierender Strahlteilerwürfel, S Spiegel, K Faserkollimator, L Linse, ST Strahlteiler, B Blende, PD Photodiode und FG Funktionsgenerator. Eine detaillierte Aufschlüsselung der Komponenten ist in Tab. 3.2 gegeben. Die elektronische Ansteuerung des Versuchsaufbaus wurde von Klemens Schüppert realisiert.

Kurzbezeichnung	Beschriftung [Beschreibung]		
	Toptica Photonics DLpro,		
	Grating Stabilized Tunable Laser,		
Laser	$844 \mathrm{nm}, 150 \mathrm{mW},$		
	ProductIDNo: DLpro_11077,		
	UniIbk 30012181-00000		
PS 879-B	3.0X PS 879 [anamorphes Prismenpaar]		
LHP1	$L/2$ 866 [λ /2-Plättchen]		
LHP2	W2Z15 866 $[\lambda/2$ -Plättchen]		
LHP3	W2Z15-854 $[\lambda/2$ -Plättchen]		
LHP4	W2Z15 866 $[\lambda/2$ -Plättchen]		
PST1	PBS 866 [polarisierender Strahlteilerwürfel]		
PST2	PBS 854 nm BK7 [polarisierender Strahlteilerwürfel]		
PST3	PBS 102 620-1000 nm [polarisierender Strahlteilerwürfel]		
S1	HR 397-866 [dielektrischer Spiegel]		
S2	HR 854 HT 785 [dielektrischer Spiegel]		
S3	Aluminium [Aluminiumspiegel]		
S4	Aluminium [Aluminiumspiegel]		
S5	Aluminium [Aluminiumspiegel]		
S6	Aluminium-Klappspiegel		
K1	60FC-4-A15-02 [Faserkollimator]		
K2	60FC-4-A15-02 [Faserkollimator]		
K3	60FC-0-M8-10 [Faserkollimator]		
K4	[Faserkollimator]		
K5	60FC-0-M8-10 [Faserkollimator]		
K6	60FC-4-M8-1 [Faserkollimator]0		
K7	60FC-4-A11-02 [Faserkollimator]		
L1	DCX1301 f=25DC Fus 370-430nm [Sammellinse]		
L2	PC,AR@700-900nm, f=75mm(BK7) [Sammellinse]		
L3	PCX0301 f=35PC UBK7 700-870 nm [Sammellinse]		
L4	PC,AR@370-430nm, f=50mm (fs) [Sammellinse]		
ST	bsf10b beah sampler [sic] [Strahlteiler]		
PD1	Fibercavity Photodiode 4		
PD2	[selber Typ wie PD1]		
Kamera	Hama Webcam		
FG1	IFR 2023A 9kHz-1.2GHz Signal Generator		
FG2	RedPitaya		
6D-Montierung	Thorlabs Nanomax MAX602/M		
	Thorlabs apt Precision Motion Controller,		
Controller	BSC201 STEPPER MOTOR CONTROLLER,		
	UniIbk 30016677		
Schrittmotor	Motor Modular NanoMax Stepper Drive,		
	UniIbk 30016676-00000		
USB-Mikroskopkamera	USB Digital Microscope, DURATOOL		
Oszilloskop	Keysight InfiniiVision MSO-X 3104A, 1GHz, 5GS/s		

Tabelle 3.2: Komponentenliste des Versuchsaufbaus. Auflistung aller im Versuchsaufbau verwendeter Komponenten und deren genauer Bezeichnung.



Abb. 3.5: Versuchsaufbau. Ein Diodenlaser erzeugt Licht der Wellenlänge 844 nm (links hinten), welches über optische Elemente zum faserbasierten Resonator geleitet wird. Der Glasfaser, welche den Resonator bildet, wird durch ein Positionierungssystem (rechts vorne) gehalten. Die Messung des vom Resonator transmittierten Lichts erfolgt über zwei Photodioden (links vorne).

kopplung in die Glasfaser zur Verfügung steht. Der Laserstrahl wird über zwei Spiegel S1 und S2 umgelenkt und ein weiterer polarisierender Strahlteiler PST3 stellt sicher, dass die einzukoppelnde Polarisation klar definiert ist. Für den Spiegel S2 wurde solch ein dielektrischer Spiegel gewählt, dass 844 nm-Licht reflektiert wird, während andere Wellenlängen (insbes. 774 nm) transmittiert werden. Dadurch ist es möglich, einen zweiten Laser anderer Frequenz gleichzeitig in die Glasfaser einzukoppeln. Die Polarisation des in die Glasfaser eingekoppelten Lichts kann über eine $\lambda/4$ -Platte und über eine $\lambda/2$ -Platte eingestellt werden.

Die Einkopplung in die Glasfaser des Resonators erfolgt über den Kollimator K1. Der Laserstrahl scheint merklich von einer Gauß-Mode abzuweichen. Falls eine saubere Gauß-Mode eingekoppelt werden soll, kann das Licht zwischen den Kollimatoren K1 und K5 durch eine Einzelmodenfaser gereinigt und erst anschließend über den Kollimator K6 in die Resonatorfaser eingekoppelt werden. Der Kollimator K7 kann verwendet werden, um



Abb. 3.6: Befestigung der Glasfaser, welche den Resonator bildet. Die Glasfaser wird durch zwei Magnete in einer Kerbe gehalten. Die Halterung für die Glasfaser ist auf ein 6-Achsen-Positionierungssystem aufgeschraubt.

das Licht eines Fasertesters in die Glasfaser des faserbasierten Resonators einzukoppeln.

Die Faserspiegel sind für zwei verschiedene Typen von Glasfasern verfügbar: Monomodenfasern und Multimodenfasern. Für den Fall eines Resonators, der mit einem Multimodenfaser-Spiegel gebildet wird, kommt der Einkopplung noch eine weitere, wichtige Funktion zu. Über die Ausrichtung des Spiegels S2 lässt sich die Anregung der Polarisationen des Resonators verändern. Ebenfalls lässt sich die angeregte Mode durch die Einkopplung bestimmen. Dies ist möglich, da das emittierte Lichtfeld einer Multimodenfaser von der Einkopplung des Lichts abhängt.

Der faserbasierte Resonator besteht aus einem feststehenden Planspiegel und einem beweglich montierten Faserspiegel. Der Planspiegel wurde beim Aufbau des Experiments mithilfe eines Rückreflexes gerade zur Polarisationsoptik ausgerichtet. Hierzu wurde das Licht eines Infrarot-Lasers über den Kollimator K4 und den entfernbaren Spiegel S5 auf den Planspiegel gerichtet. Der Planspiegel wurde anschließend so ausgerichtet, dass der reflektierte Strahl mit dem einfallenden Strahl zur Überdeckung gebracht wurde. Nach diesem Einrichten wurde der Planspiegel nicht mehr verändert.

Die Glasfaser mit dem Faserspiegel ist auf einem 6-Achsen-Positionierungssystem (*Thorlabs Nanomax*) angebracht (Abb. 3.6). Dieses Positionierungssystem erlaubt die Kontrolle aller dreier Translations- und aller dreier Rotationsbewegungen. Der Faserspiegel sitzt dabei etwa in jenem Punkt, welcher das Zentrum der Rotationen definiert. Hierdurch lässt sich der Faserspiegel verkippen, ohne die Resonatorlänge dabei wesentlich zu ändern.

Die grobe Resonatorlänge kann über eine Mikrometerschraube eingestellt werden. Zu Beginn der Messungen wurde hierbei eine von Hand zu betätigende Mikrometerschraube verwendet. In einem späteren Stadium wurde diese durch eine motorbetriebene Version ersetzt.

Die feine Resonatorlänge wird über einen im 6-Achsen-Positionierungssystem integrierten Piezo durchstimmt. Die angelegten Spannungsamplituden hängen davon ab, welcher Schritt im Experiment durchgeführt werden soll. Soll die Einkopplung der Resonatormoden justiert werden, ist es zu Beginn vorteilhaft, einen ganzen Freien Spektralbereich durchzustimmen. Hierfür wird eine Spannung von ca. $U_{ss} = 2 V$ gewählt. Soll für die Messung der Finesse einer Resonanz die Linienform aufgenommen werden, wird die Resonatorlänge nur in einem kleinen Bruchteil des Freien Spektralbereichs durchgestimmt und die Spannungsamplituden liegen unterhalb von ca. 50 mV. Die Frequenz der Spannung wird im Bereich von rund 5 – 50 Hz gewählt. Dies ist ein sinnvoller Kompromiss zwischen hoher Wiederholrate der Messung und Vermeidung von Verfälschungen der Linienbreite bei zu hoher Piezofrequenz (vgl. Kapitel 4).

Die Linienform einer Resonanz kann sogar dann noch aufgenommen werden, wenn keine Spannung am Piezo anliegt. In diesem Fall wird die Änderung der Resonatorlänge durch mechanische Vibrationen der Resonatorhalterung verursacht.

Die vom Resonator transmittierte Lichtleistung wird als Funktion der Zeit aufgenommen. Hierfür stehen zwei Photodioden zur Verfügung, die die beiden Resonatorpolarisationen getrennt detektieren können. Die Trennung der beiden Polarisationen geschieht über einen polarisierenden Strahlteiler PST2. Die einfallende Polarisation kann über ein $\lambda/2$ -Plättchen LHP3 eingestellt werden. Zusätzlich kann die räumliche Verteilung der Lichtleistung durch eine digitale Kamera beobachtet werden. Ein Strahlteiler ST entnimmt hierfür einen kleinen Teil der Lichtleistung aus dem Lichtpfad.

Die Ansteuerung des 6-Achsen-Positionierungssystems und die Aufnahme der Messdaten wird durch ein computerunterstütztes System erledigt. Die Realisierung und Programmierung dieses Systems wurde von Klemens Schüppert durchgeführt. Ein Messcomputer ist für die Sammlung der Messdaten und die Ansteuerung des Schrittmotors zuständig. Die Signale der Photodioden werden von dem Oszilloskop aufgenommen und über einen Router an den Messcomputer gesendet. Die beiden Kameras sind an einen Microcomputer (*Raspberry Pi*) angeschlossen, welcher die Kamerabilder ausliest und über den Router zum Messcomputer sendet. Des Weiteren ist der Raspberry Pi für die Steuerung des Schrittmotors und das Auslesen dessen Position zuständig. Der Messcomputer steuert über den Router einen Einzelplatinencomputer (*Red Pitaya*), welcher eine einstellbare Wechselspannung ausgibt (hier: Dreieckspannung).

Für die Steuerung des Schrittmotors und des Piezos, sowie zur Auslösung

eines Messvorgangs steht eine Browser-basierte Benutzeroberfläche zur Verfügung. Dort lässt sich die Resonatorlänge durch den Schrittmotor verändern. Ebenso lässt sich die Spannungsamplitude und der Spannungsversatz am Piezo einstellen.

Die aufgenommenen Signale der Photodioden werden im Webinterface sofort nach der Messung angezeigt. An diese Signale werden Lorentzkurven angepasst. Für eine weitere Auswertung der Signale der Photodioden werden die Daten jedoch manuell kopiert und die Anpassung der Lorentzkurven wird mit einem ausgeklügelteren Algorithmus durchgeführt. Dieser Algorithmus erlaubt es, für schwache Signale zuverlässig Lorentzkurven anzupassen. Dies wird erreicht, indem die Anpassung für das stärke Signal der beiden Photodioden durchgeführt wird und die dabei gewonnenen angepassten Parameter als Startparameter für das schwächere Signal verwendet werden. Für das schwächere Signal wird des Weiteren die Anzahl der freien Parameter reduziert, indem dort der Seitenbandabstand des stärkeren Signals verwendet wird.

3.1.4 Messung der Moden mittels der Kamera

Uber den Strahlteiler ST wird ein Teil des vom Resonator transmittierten Lichts zu einer Digitalkamera abgeleitet. Es ist dabei zu beachten, dass der Anteil des reflektierten Lichts stark von der Polarisation des Lichts abhängt. Die s-Polarisation wird bei einem Lichteinfall von 45° zur Oberflächennormalen zu etwa 8% reflektiert, während die p-Polarisation nur zu etwa 0,7% reflektiert wird. Es ist daher ungünstig, den Strahlteiler in gerader Linie nach dem polarisierenden Strahlteiler PST2 einzubauen, da dort nur noch p-polarisiertes Licht zur Verfügung steht.

Bei der Detektion der Resonatormoden zeigt sich, dass die Moden teilweise mit Störlicht überlagert sind. Dieses Störlicht entstammt dem Resonator und seine genaue Verteilung auf dem Kamerabild hängt sowohl von der Einkopplung des Lichts in die Resonatorfaser, als auch von der Resonatorlänge ab. Für lange Resonatoren ist das Störlicht im Vergleich zu den Moden stärker ausgeprägt als für kurze Resonatoren.

Zur Entfernung dieses Störlichts aus den Modenbildern wird ausgenutzt, dass sich Störlicht und Modenbilder unterschiedlich unter Durchstimmen der Resonatorlänge verhalten. Für die Aufnahme von Modenbildern wird nur eine kleine Spannung an den Piezo angelegt und die Resonatorlänge nur wenig um eine Resonanz herum variiert. Das Störlicht ist beim Durchstimmen kaum veränderlich, während die Moden bei jedem Durchstimmen der Resonanz in leicht anderer Intensität beobachtet werden. Es werden daher mehrere Aufnahmen der Modenbilder mit Störlicht aufgenommen und pixel-



Abb. 3.7: Photographien einiger detektierter Moden. Die Resonatorlänge liegt für die Aufnahmen zwischen 98 und 110 µm. Die dargestellten Bilder sind die Varianz aus jeweils mehreren Einzelbilder, wodurch der Einfluss des störenden Hintergrundlichtes verringert wurde. Ein dunkler Grauwert entspricht einer hohen Varianz.

weise die Varianz der Aufnahmen berechnet. In der Varianz der Aufnahmen fällt das fast konstante Störlicht heraus. In Abb. 3.7 sind Beispiele einiger detektierter Moden dargestellt. Die Moden wurden allesamt unter Verwendung eines Multimodenfaser-Spiegels als erstem Resonatorspiegel erzeugt. Durch Ändern der Einkopplung des Lichts in die Faser konnten einige der entarteten höheren Moden ausgewählt werden.

3.1.5 Reinigung der Faserspiegel

Für die Reinigung von Faserspiegeln wurde auf ein von Ref. [18] beschriebenes Verfahren zurückgegriffen: Zwei Teflon-Gefäße werden mit Wasser, Aceton und anschließend Methanol gesäubert. Ein Gefäß wird mit Aceton und eines mit Methanol gefüllt und beide Gefäße werden in ein auf 40 °C aufgewärmtes Ultraschallbad gestellt. Die Faser wird mit der Spitze nach unten 1,5 min in das Acetonbad und anschließend weitere 1,5 min in das Methanolbad eingetaucht. Abschließend wird die Faserspitze etwa 1/2 min mit einem Druckluft-Spray getrocknet.

In der hier durchgeführten Arbeit wurde versucht, einen Faserspiegel mit diesem Verfahren zu reinigen. Ob die Reinigung in diesem Fall funktioniert hat, ließ sich nicht beurteilen, da zu diesem Zeitpunkt der Diodenlaser unentdeckt noch im Multimoden-Betrieb lief und deshalb kein stabiles Resonatorsignal zustande kam.

3.1.6 Hinweise zur Erzeugung der Resonatormoden

Die Ausbildung von Resonatormoden hängt auch vom Betriebszustand des Lasers ab (Diodenlaser, gitterstabilisiert). Es müssen dabei zwei Dinge beachtet werden. Zum einen muss der Laser im Monomoden-Betrieb laufen, damit sich Resonatormoden ausbilden können. Wird der Laser mit einem ungünstigen Diodenstrom betrieben, befindet sich der Laser im Multimoden-Betrieb und es zeigen sich keine Resonanzen. Zur Korrektur wird der Diodenstrom des Lasers so lange verändert, bis der Laser in den Monomoden-Betrieb übergeht. Unterscheidungsmerkmale sind in der untenstehenden Tabelle 3.3 aufgeführt.

Tabelle 3.3: Unterscheidungsmerkmale für den Monomoden- und den Multimoden-Betrieb des Lasers. Als Störlicht wird jener Lichtanteil bezeichnet, der neben den Resonatormoden auftritt.

Merkmal	Monomoden-Betrieb	Multimoden-Betrieb
Photodiodensignal	(etliche) Resonanzen	Rauschen
CCD-Kamera	Störlicht scharf	Störlicht verwaschen
Wavemeter	Interferenzen ausgeprägt	Interferenzen verwaschen

Zum anderen muss dafür gesorgt werden, dass sich die aufmodulierten Seitenbänder ausbilden können, da die Seitenbänder letztendlich für die Bestimmung der Linienbreite benötigt werden. Die Seitenbänder werden durch Modulation des Diodenstroms erzeugt und bilden sich nur dann ausreichend stark aus (d.h. heben sich deutlich vom Rauschen ab), wenn der Diodenstrom am Rand eines Monomoden-Betriebsbereichs gewählt wird. Wird der Diodenstrom allerdings zu nahe am Rand des Monomoden-Betriebsbereichs gewählt, sind der Träger und die Seitenbänder über länger Zeit (einige Minuten) nicht mehr stabil und beginnen zu variieren.

3.2 Bestimmung der Resonatorlänge

Mit dem 6-Achsen-Positionierungssystem können über die Mikrometerschraube nur Längendifferenzen gemessen werden, weshalb eine anfängliche Bestimmung der absoluten Resonatorlänge erforderlich ist. Die Ermittlung der absoluten Resonatorlänge erfolgt durch Verstimmen der Laserwellenlänge um zumindest einen Freien Spektralbereich und Messen der zugehörigen Resonanzwellenlängen.

Das Prinzip der Messmethode ist in Abb. 3.8 dargestellt. In einem Resonator der Länge L = const. besitzen bei Resonanz $m \in \mathbb{N}$ Halbwellen der Vakuumwellenlänge λ die Resonatorlänge L. Wird der Resonator um $\Delta m \in \mathbb{Z}$ Freie Spektralbereich verstimmt, sind nur noch $m - \Delta m$ Halbwellen resonant, während die Wellenlänge auf $\lambda + \Delta \lambda_{\Delta m}$ verändert wurde. Unter Berücksichtigung des Brechungsindex n des umgebenden Mediums

Abb. 3.8: Prinzip der Längenmessung eines Resonators. Zu Beginn ist der Resonator mit m Halbwellen der Wellenlänge λ resonant, nach Verstimmen der Wellenlänge um Δm Freie Spektralbereiche auf $\lambda + \Delta \lambda_{\Delta m}$ tritt die Resonanz mit $m - \Delta m$ Halbwellen auf. Die Resonatorlänge L ist dabei konstant.

lassen sich diese beiden Zustände durch

$$L = m \frac{\lambda}{2n} \stackrel{!}{=} (m - \Delta m) \frac{\lambda + \Delta \lambda_{\Delta m}}{2n} =$$
(3.2)

$$=\underbrace{m\frac{\lambda}{2n}}_{L} + \underbrace{m\frac{\Delta\lambda_{\Delta m}}{2n}}_{L\frac{\Delta\lambda_{\Delta m}}{\lambda}} - \Delta m\frac{\lambda + \Delta\lambda_{\Delta m}}{2n}$$
(3.3)

ausdrücken. Durch Zusammenfassen erhält man sofort die gesuchte Resonatorlänge

$$L = \frac{\Delta m}{2n} \frac{\lambda}{\Delta \lambda_{\Delta m}} (\lambda + \Delta \lambda_{\Delta m}). \tag{3.4}$$

Im Experiment geschieht die Verstimmung um einen Freien Spektralbereich am einfachsten unter Kontrolle des Kamerabildes. Die Laserwellenlänge wird zunächst so eingestellt, dass eine Mode (z.B. die (0,0)-Mode) auf dem Kamerabild aufleuchtet und die zugehörige Laserwellenlänge wird gemessen. Dann wird die Wellenlänge so lange durch Verstellen des Diodenstroms verstimmt, bis die gleiche Mode mit anderer Wellenlänge wieder aufleuchtet und die Wellenlänge wird erneut gemessen. Mit Gleichung (3.4) kann dann die absolute Resonatorlänge berechnet werden. Zweckmäßigerweise wird die Resonanzwellenlänge über mehrere Freie Spektralbereiche bestimmt und die berechneten Längen werden gemittelt. Hierdurch kann ebenfalls eine Messunsicherheit berechnet werden.

Beispielhaft sind Messdaten zur Längenbestimmung in Abb. 3.9 dargestellt. Für jeden Messpunkt wurde eine Resonatorlänge eingestellt und der zugehörige Positionswert notiert. Dann wurde der Laser über den gesamten nutzbaren Bereich von rund 830 bis 850 nm verstimmt und die Wellenlängen aller auffindbarer Resonanzen der gleichen Mode gemessen. Die Resonatorlänge wurde durch Mittelung für jede Schrittmotorposition x berechnet. An die Messpunkte wurde schließlich eine Gerade mit Steigung eins von der Form $L(x) = -(x - x_0)$ angepasst, wobei x_0 den Versatz kennzeichnet. Die Anpassung besitzt eine Fehlerquadratsumme pro Freiheitsgrad

Abb. 3.9: Bestimmung der Resonatorlänge. Die durch Verstimmen des Lasers nach Gl. (3.4) ermittelte Resonatorlänge ist in Abhängigkeit der Position des Schrittmotors aufgetragen. Durch die Messpunkte ist eine Gerade mit Steigung eins angepasst. Die untere Abbildung zeigt die Abweichungen der Messpunkte von der Anpassungsgeraden in Vielfachen der Messunsicherheiten. Die Fehlerbalken geben die Standardabweichungen der einzelnen Datenpunkte an.

von $\chi^2/FG = 0.98$, was darauf hindeutet, dass die Messung hauptsächlich durch statistische Fehler begrenzt wird.

Die Kalibrierung der Skala der Schrittmotorposition geschah einmalig durch Variieren der Schrittmotorposition und Messen der Stellung des Faser-Halters mittels eines Messschiebers. Hierdurch wurde ein Umrechnungsfaktor zwischen Änderung der Schrittmotorposition und Änderung der Resonatorlänge erhalten.

3.3 Methode zur Bestimmung der Verluste

Die Resonatorverluste werden durch Messung der Finesse bestimmt. Da das Resonatorsignal durch die Photodioden als Funktion der Zeit t aufgezeichnet wird, muss die zeitliche Linienbreite in Frequenzeinheiten umgewandelt werden. Hierfür werden dem Laserlicht Seitenbänder einer bekannten Frequenz aufmoduliert (in der Regel 50 MHz). Ein Messsignal (vgl. Abb. 3.10)

Abb. 3.10: Bestimmung der Linienbreite. Dargestellt ist ein transmittiertes Resonanzsignal eines faserbasierten Resonators mit aufmodulierten Seitenbändern. (a) Das Oszilloskop liefert ein zeitliches Signal mit einer Linienbreite γ_t und einem Seitenbandabstand Δt . (b) Über den bekannten Abstand der Seitenbänder im Frequenzraum $\nu_{\rm SB}$ kann die Linienbreite γ_{ν} in Frequenzeinheiten umgerechnet werden. Die rote durchgezogene Linie ist eine Lorentzkurve nach Gl. (3.5), welche an das Messsignal angepasst wurde.

besteht daher aus drei überlagerten Lorentzkurven, welche durch

$$U(t) = A \frac{(\gamma_t/2)^2}{(t-t_0)^2 + (\gamma_t/2)^2} + (3.5)$$

$$A_{\rm SBL} \frac{(\gamma_t/2)^2}{(t-t_0 + \Delta t)^2 + (\gamma_t/2)^2} + A_{\rm SBR} \frac{(\gamma_t/2)^2}{(t-t_0 - \Delta t)^2 + (\gamma_t/2)^2}$$

$$(3.6)$$

beschrieben werden. Hierin bezeichnen A die Amplitude des Trägers, γ_t die Linienbreite (Halbwertsbreite), t_0 den zeitlichen Versatz des Trägers, $A_{\rm SBL}$ bzw. $A_{\rm SBR}$ die Amplitude des linken bzw. rechten Seitenbandes und Δt den zeitlichen Seitenbandabstand. Für die beiden Seitenbänder wurden unterschiedliche Amplituden zugelassen, um etwaige Schwankungen im Signal kompensieren zu können.

Der zeitliche Seitenbandabstand wird anschließend mittels

$$\gamma_{\nu} = \gamma_t \frac{\nu_{\rm SB}}{\Delta t} \tag{3.7}$$

in den Seitenbandabstand in Frequenzeinheiten umgerechnet.

Die Finesse der Resonanz wird durch das Verhältnis zwischen Freiem Spektralbereich und Linienbreite berechnet,

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSB}}}{\gamma_{\nu}}.$$
(3.8)

Abb. 3.11: Bestimmung der Resonanzaufspaltung bei Doppelbrechung. Für die untersuchten faserbasierten Resonatoren liegt die Resonanzaufspaltung typischerweise im Bereich von (a) weniger als einer Linienbreite bis (b) einigen Linienbreiten.

Der Freie Spektralbereich $\nu_{\text{FSB}} = c/(2L)$ wird dabei einfach aus der Resonatorlänge L ermittelt. Die Resonatorverluste berechnen sich damit zu (vgl. Gl. (2.52))

$$\mathcal{L}_{\text{ges}} = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}.$$
(3.9)

3.4 Methode zur Bestimmung der Doppelbrechung

Für die Messung der Doppelbrechung des Resonators werden die beiden transmittierten Resonatorpolarisationen durch einen polarisierenden Strahlteiler aufgetrennt. Zwei Photodioden detektieren jeweils eine Polarisation und liefern zwei zeitversetzte Signale (vgl. Abb. 3.11). Nach Umrechnung der Zeit- in Frequenzeinheiten erhält man sofort die gesuchte Resonanzaufspaltung.

Zu beachten ist bei der Bestimmung der Resonanzaufspaltung, dass mit dem zur Verfügung stehenden Versuchsaufbau nicht unterschieden werden kann, ob die Resonanz einer bestimmten Resonatorpolarisation negativ oder positiv gegenüber der anderen Polarisation aufgespalten ist. Der Grund liegt darin, dass eine Resonanz aus je abwechselnden Richtungen durchfahren wird. Die aufgespaltene andere Polarisation kommt daher einmal links und einmal rechts zu liegen. Es kann hier also nur der Betrag der Resonanzaufspaltung gemessen werden.

3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden der in dieser Arbeit verwendete Messaufbau und die verwendeten Messmethoden beschrieben. Der Messaufbau erlaubt die Charakterisierung eines plan-konkaven faserbasierten Resonators. Als Lichtquelle steht ein 844 nm-Laser zur Verfügung und die zwei Polarisationen des Resonators lassen sich mit zwei Photodioden einzeln detektieren.

Die Resonatorlänge wird durch Messung der Resonanzwellenlängen aufeinanderfolgender Freier Spektralbereiche ermittelt. Für die Messung der Resonatorverluste wird die Linienbreite der Resonanzen bestimmt. Hierfür werden dem Laserlicht Seitenbänder aufmoduliert. Die Resonanzaufspaltung der beiden Resonatorpolarisationen kann aus den gleichzeitig gemessenen Signalen der zwei Photodioden direkt abgelesen werden.

Kapitel 4

Validität der Messmethode

Vor Beginn der eigentlichen Messungen muss die Frage beantwortet werden, ob der Messaufbau und die Messmethode tatsächlich das messen, was sie zu messen vorgeben. Es muss geklärt werden, welche statistischen und vor allem systematischen Fehler das Messergebnis verfälschen können und wie diese gegebenenfalls vermieden werden können.

Die gesamte Messung beruht darauf, die Linienbreite einer Resonanz korrekt bestimmen zu können. Hierbei ergeben sich sofort eine Reihe möglicher Fehlerquellen. Zuerst ist zu klären, ob und wie die gemessene Linienbreite von der Durchstimmgeschwindigkeit der Resonatorlänge abhängt. Ein schnelles Durchstimmen kann zumindest auf zwei Wegen zu einer vorgetäusch ten Linienverbreiterung führen: Die endliche Bandbreite der Photodiode kann eine zeitlich schmale Resonanz verbreitern und die Abklingzeit des Resonatorfeldes kann verhindern, dass die Resonanz tatsächlich die Form einer Lorentzkurve besitzt. Des Weiteren kann die gemessene Linienbreite von der Linienamplitude abhängen. Dies kann etwa geschehen, wenn die Kennlinie der Photodiode nichtlinear ist.

Diese genannten Fehlerquellen betreffen nur die Resonanz einer einzelnen Polarisation. Es zeigt sich jedoch, dass durch das Zusammenspiel beider Resonatorpolarisationen eine Linienverbreiterung oder auch eine Linienverschmälerung vorgetäuscht werden kann. Ebenso kann die ermittelte Resonanzaufspaltung verfälscht werden. Für eine korrekte Messung muss daher großen Wert auf eine korrekte Einstellung der Polarisationsoptik gelegt werden.

Im folgenden Kapitel wird zunächst der Einfluss der Durchstimmgeschwindigkeit der Resonatorlänge auf die gemessene Linienbreite beschrieben. Anschließend wird das Rauschspektrum und eine Statistik der Linienbreiten vorgestellt. Der Einfluss der Linienamplitude auf die ermittelte Linienbreite wird untersucht. Zum Schluss wird ein Modell der Mischung der Resonatorpolarisationen und die daraus folgenden Auswirkungen gezeigt.

4.1 Einfluss der Durchstimmgeschwindigkeit

Das Resonanzsignal des Resonators wird erzeugt, indem die Resonatorlänge durchgestimmt wird (Abb. 3.10). Hierdurch erhält man ein Signal, dessen Linienbreite und Seitenbandabstand in Zeiteinheiten bekannt ist. Im Idealfall wäre zu erwarten, dass bei einer Verdoppelung der Durchstimmgeschwindigkeit sowohl die Linienbreite γ_t als auch der Seitenbandabstand Δt zeitlich halbiert wird, d.h. dass der Zusammenhang

$$\frac{\gamma_t}{\Delta t} = \text{const.}$$
 (4.1)

gilt. Im realen Fall wird dieser Zusammenhang jedoch nicht streng erfüllt sein. Besitzt etwa die Photodiode nur eine endliche Bandbreite, so wird die Linienbreite im Vergleich zum Seitenbandabstand vergrößert erscheinen. Je schneller der Resonator durchgestimmt wird, desto stärker erscheint daher die Resonanz verbreitert. Als einfachste empirische Beschreibung dieses Verhaltens wird der lineare Ansatz

$$\gamma_t = a\Delta t + b \tag{4.2}$$

versucht, wobei a den Proportionalitätsfaktor und b einen Versatz bezeichnen. Im Idealfall wird die Proportionalität über die wirkliche Linienbreite γ_{ν} und den Seitenbandabstand $\nu_{\rm SB}$ durch $a = \gamma_{\nu}/\nu_{\rm SB}$ beschreiben. Dieser Ansatz kann auch unter Verwendung der Durchstimmgeschwindigkeit $v = \nu_{\rm SB}/\Delta t$ angeschrieben werden und lautet dann

$$\gamma_t = a\nu_{\rm SB}\frac{1}{v} + b. \tag{4.3}$$

Die Durchstimmgeschwindigkeit gibt an, wie schnell die Resonanzfrequenz des Resonators durchgestimmt wird und besitzt die Einheiten Hz/s.

In Abb. 4.1a ist die gemessene Linienbreite in Abhängigkeit der Durchstimmgeschwindigkeit dargestellt. Der dafür verwendete Resonator wurde mit der Faser P1 (Tab. 3.1) gebildet und seine Länge betrug L = 146(2) µm. Die Messung wurde mit zwei verschiedenen Photodioden durchgeführt, um den Einfluss der Photodiode selbst beurteilen zu können. Eine der Photodioden war die das gesamte Experiment hindurch verwendete *Fibercavity Photodiode* 4 (Photodiode 5972 4E, 500 MHz nominelle Bandbreite). Die zweite Photodiode war in dieser Messung eine *Thorlabs APD* 430 A/M (nominelle Bandbreite 400 MHz).

Abb. 4.1: Linienbreite und Resonanzamplitude in Abhängigkeit der Durchstimmgeschwindigkeit bzw. Linienbreite für zwei unterschiedliche Photodioden. (a) Die gemessene Linienbreite (Symbole) wird gut durch eine Anpassungsgerade (durchgezogene Linie) mit einem Versatz nach Gl. (4.3) beschrieben. Die gestrichelte Gerade gibt den idealen Verlauf durch eine Gerade ohne Versatz an. (b) Die relative Amplitude des Trägers bezieht sich auf den Anfangspunkt der empirischen exponentiellen Anpassungsfunktion nach Gl. (4.4). Die Anpassungsergebnisse sind in Tab. 4.1 aufgelistet.

Es zeigte sich dabei, dass die Linienbreite vor allem für schnelle Durchstimmgeschwindigkeiten vom idealen Verlauf deutlich abweicht und stattdessen durch den empirischen Ansatz (4.3) unter Verwendung eines Versatzes beschrieben werden kann. Die Anpassungsergebnisse sind in Tabelle 4.1 aufgelistet.

Tabelle 4.1: Anpassungsergebnisse für die Abhängigkeit der Linienbreite und der Resonanzamplitude von der Durchstimmgeschwindigkeit. Die Anpassungsparameter a und b für die Linienbreite wurden durch eine Anpassung von Gl. (4.3) an die Messdaten in Abb.4.1a gewonnen. Die Anstiegszeit τ der Resonanzamplitude wurde durch Anpassung von Gl. (4.4) an die Daten in Abb. 4.1b gewonnen.

Photodiode	a (Hz ^{-1})	b (ns)	τ (ns)
FC PD 4 APD 430 A/M	$0,1367(4) \\ 0,1376(4)$	38,9(6) 24,4(7)	$\begin{array}{c} 46,6(6) \\ 30,1(5) \end{array}$

Qualitativ zeigen beide Photodioden das gleiche Verhalten, jedoch unterscheidet sich der Versatz quantitativ. Dies deutet darauf hin, dass die endliche Bandbreite der Photodioden eine Rolle spielt.

Neben der Linienbreite hängt auch die Resonanzamplitude von der Durchstimmgeschwindigkeit ab. Bei zunehmender Durchstimmgeschwindigkeit bzw.

Abb. 4.2: Linienverbreiterung in Abhängigkeit der Resonatorlänge. Für einen mit der Faser M9 gebildeten Resonator wurde (a) der Versatz der Linienbreite und (b) die Anstiegszeit der Linienamplitude bestimmt (vgl. 4.1) und in Abhängigkeit der Resonatorlänge aufgetragen. Durch die Werte sind je zwei lineare Anpassungsfunktionen gelegt. Die Fehlerbalken geben jeweils die Unsicherheit an, die aus den Anpassungsvorgängen jedes einzelnen Datenpunktes gewonnen wurden.

abnehmender Linienbreite nimmt die Amplitude des Resonanzsignals ab (Abb. 4.1b). Mögliche Gründe für diese Abnahme sind eine endliche Bandbreite der Photodiode oder die Anstiegszeit des Resonatorfeldes. Zumindest für die Anstiegszeit des Resonatorfeldes ist ein exponentieller Anstieg der zu erwartende Verlauf. Der gemessene Zusammenhang lässt sich empirisch durch eine Exponentialfunktion der Form

$$A(v) = A_0 \left(1 - e^{-\gamma_{t, \text{korr}}/\tau} \right)$$
(4.4)

beschreiben, wobei A die gemessene Resonanzamplitude, A_0 einen Vorfaktor, $\gamma_{t,\text{korr}}$ die korrigierte Linienbreite und τ die Anstiegszeit bezeichnen. Die korrigierte Linienbreite wird berechnet, indem von den gemessenen Linienbreiten γ_t der konstante Versatz b aus Gl. (4.2) bzw. Tab. 4.1 abgezogen wird, d.h. $\gamma_{t,\text{korr}} = \gamma_t - b$. Die Anpassungsfunktion gibt wieder, dass die Amplitude des Resonatorfeldes während der Zeit, während derer der Resonator in Resonanz ist, in etwa exponentiell ansteigt.

4.1.1 Längenabhängigkeit der Linienverbreiterung

Die Messung der Linienverbreiterung und der Amplitudendämpfung wurde für einen weiteren Resonator, der mit der Faser M9 gebildet wurde, gemessen (Abb. 4.2). Bei dieser Messung wurde zusätzlich die Resonatorlänge systematisch variiert, um zu klären, ob die Linienverbreiterung und die Amplitudendämpfung längenabhängig sind. Eine Längenabhängigkeit würde sich etwa dann ergeben, wenn die Linienverbreiterung von der längenabhängigen Abklingzeit des Resonators hervorgerufen werden würde. Es zeigt sich, dass die Linienverbreiterung in etwa linear von der Resonatorlänge abhängt. Die Anpassungsgeraden für die beiden Resonatorpolarisationen besitzen innerhalb der Unsicherheiten die gleiche Steigung $(0,13(4) \text{ ns/}\mu\text{m}$ für die p-Pol. und $0,18(5) \text{ ns/}\mu\text{m}$ für die s-Pol.). Der Versatz der Anpassungsgeraden unterscheidet sich leicht (18(3) ns für die p-Pol. und 8(5) ns für die s-Pol.).

Die Anstiegszeit der Resonanzamplitude in Abhängigkeit der Resonatorlänge zeigt keine Längenabhängigkeit. Dies scheint darauf hinzudeuten, dass die Anstiegszeit bzw. Abfallzeit des Resonatorfeldes sich nicht bemerkbar macht, da diese längenabhängig ist. Die Abfallzeit des Resonatorfeldes beträgt [19]

$$\tau_{\rm c} = \frac{\mathcal{F}L}{\pi c},\tag{4.5}$$

wobei \mathcal{F} die Finesse des Resonators, L die Resonatorlänge und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Die Abfallzeit gibt jene Zeit an, zu der das Resonatorfeld auf den Anteil 1/e gedämpft wurde. Der Resonator mit der Faser M9 besitzt für eine Länge von $L = 100 \,\mu\text{m}$ eine Finesse von $\mathcal{F} = 1,3(1) \cdot 10^5$, was für diese Länge zu einer Abfallzeit von $\tau_c = 14(1)$ ns führt. Dieser Wert liegt deutlich unter den ermittelten Anstiegszeiten (vgl. Tab. 4.1), weshalb sich möglicherweise die Anstiegszeit des Resonatorfeldes nicht bemerkbar macht. Der verbleibende große Rest der Anstiegszeit wäre vermutlich auf die Bandbreite der Photodiode (500 MHz nominell) zurückzuführen.

In diesem Unterkapitel wurde gezeigt, dass die gemessene Linienbreite eine Abhängigkeit von der Durchstimmgeschwindigkeit der Resonatorlänge besitzt. Für die in Kapitel 5 beschriebenen Messungen bedeutet dies, dass die Resonatorlänge möglichst langsam durchgestimmt werden soll.

4.2 Rauschspektrum der Linienbreite

Bei der Messung der Linienbreite zeigt sich, dass diese statistischen Schwankungen unterliegt. Je geringer die Durchstimmgeschwindigkeit, desto größer fallen diese Schwankungen aus. Zur Quantifizierung dieses Zusammenhangs wurde das Rauschspektrum der Linienbreite aufgenommen. Hierfür wurde die Variation der Linienbreite um einen mittleren Wert für verschiedene Durchstimmgeschwindigkeiten gemessen.

Die kleinsten einstellbaren Durchstimmgeschwindigkeiten liegen bei rund 10^{13} Hz/s und werden durch Schwingungen des Versuchsaufbaus selbst bei abgeschaltetem Piezo erzeugt. Die höchsten eingestellten Durchstimmgeschwindigkeiten liegen bei rund $5 \cdot 10^{14}$ Hz/s und wurden durch Erhöhung

Abb. 4.3: Rauschen der Linienbreite. (a) Die Abweichung $\delta\gamma$ der gemessenen Linienbreite von der Anpassungsfunktion in Abb. 4.1a ist in Abhängigkeit der Durchstimmgeschwindigkeit dargestellt. (b) Aus der Abweichung pro Frequenzintervall lässt sich das Rauschspektrum der Linienbreite berechnen. Die geraden Linien sind angepasste Potenzfunktionen nach Gl. (4.7).

der Piezofrequenz und -amplitude eingestellt. Höhere Durchstimmgeschwindigkeiten sind wegen der Abnahme der Resonanzamplitude nicht zugänglich.

In Abb. 4.3a ist die Abweichung der gemessenen Linienbreiten von der Anpassungsfunktion in Abb. 4.1a dargestellt. Es zeigt sich, dass keine auffälligen systematischen Abweichungen von der Anpassungsgeraden vorliegen. Dies stützt die Annahme, dass die Anpassungsfunktion die gemessenen Linienbreiten korrekt wiedergibt.

Aus den Schwankungen um die Anpassungsfunktion lässt sich das Rauschspektrum der Linienbreiten berechnen. Hierfür wurden die Abweichungen in verschiedene Geschwindigkeitsklassen der Breite Δf aufgeteilt und für jede Klasse wurde die Varianz $\langle \delta \gamma^2 \rangle$ berechnet. Das Rauschspektrum ergibt sich dann durch

$$u_{\gamma}(f) = \frac{\langle \delta \gamma^2 \rangle}{\Delta \nu}.$$
(4.6)

In doppelt-logarithmischer Darstellung zeigt sich dabei, dass das gemessene Rauschspektrum grob einem Potenzgesetz folgt (Abb. 4.3). Für die Anpassung wurde daher eine Funktion der Form

$$u_{\gamma}(b) = \frac{a}{v^b} \tag{4.7}$$

verwendet. Für die ungewichtete Anpassung an die logarithmisch transfor-

mierten Datenpunkte erhält man die Parameter

$$b = 2,5(2)$$
 für FC PD4, sowie (4.8)

$$b = 2,9(2)$$
 für APD 430 A/M. (4.9)

Die naheliegendste Ursache für das beobachtete Rauschspektrum dürfte ein gedämpftes 1/f-Rauschen sein. Ein Beispiel für ein 1/f-Rauschen ist akustisches Rauschen, welches im Labor allgegenwärtig ist. Da die Glasfaser des faserbasierten Resonators auf einem massiven Positionierungssystem befestigt war, dürften die hohen Frequenzen des Rauschens nur gedämpft zum Resonator vorgedrungen sein. Dies könnte den schnelleren Abfall des Rauschspektrums (in Bezug auf ein 1/f-Rauschen) erklären.

Aus dem beobachteten Rauschen der Linienbreite ergeben sich insbesondere zwei Konsequenzen: Zum einen zeigt es, dass bei langsamen Durchstimmgeschwindigkeiten die Fluktuationen der gemessenen Linienbreite zunehmen. Von daher sind höhere Durchstimmgeschwindigkeiten vorteilhaft. Da allerdings bei zu hohen Durchstimmgeschwindigkeiten die Linienbreite relativ immer stärker verfälscht wird, muss ein Kompromiss gewählt werden.

Zum anderen zeigt die gemessene Abweichung von der Anpassungsfunktion (Abb. 4.3a), dass die Messpunkte symmetrisch um einen mittleren Verlauf herum streuen. Durch eine Wiederholung der Messung und Mittelung lässt sich also der Einfluss des Rauschens vermindern.

4.3 Einfluss der Resonanzamplitude

Idealerweise besitzt eine Resonanz eines Resonators hoher Finesse die Form einer Lorentzkurve (Gl. (2.45)). Die Linienbreite ist dort über die Halbwertsbreite definiert und besitzt die Eigenschaft, von der Linienamplitude unabhängig zu sein. Im Experiment kann es aus verschiedenen Gründen zu Abweichungen von diesem idealen Verhalten kommen. Die Photodiode kann eine nichtlineare Kennlinie besitzen oder durch den Anpassungsvorgang der Lorentzkurve kann ein systematischer Fehler eingeführt werden.

Zur Ermittlung der Abhängigkeit der gemessenen Linienbreite von der gemessenen Resonanzamplitude für eine bestimmte Durchstimmgeschwindigkeit werden zwei Wege beschritten. Zum einen wird die Leistung des auf die Photodiode treffenden Lichts variiert und zum anderen wird die Leistung des in den Resonator eingekoppelten Lichts variiert. Im ersten Fall werden Effekte erfasst, die durch die Photodiode oder den Anpassungsvorgang hervorgerufen werden. Im zweiten Fall kommen zusätzlich noch Effekte des Resonators hinzu.

Der erste Fall der Variation der die Photodiode treffenden Lichtleistung wurde durch eine vor der Photodiode PD2 (vgl. Abb. 3.4) postierte varia-

Abb. 4.4: Linienbreite in Abhängigkeit der Resonanzamplitude bei Abschattung des transmittierten Lichts. Durch eine Blende wurde die transmittierte Lichtleistung abgeschwächt und Linienbreite und Resonanzamplitude durch Anpassung von Lorentzkurven an die Resonanzsignale ermittelt. Durch die Messpunkte ist eine lineare Anpassungsfunktion (durchgezogene Linie) gelegt. Die Steigung der Anpassungsgeraden deutet auf einen systematischen Fehler von 4(2)% im Bereich $0 - 100 \,\mathrm{mV}$ hin.

ble Blende verwirklicht. Die Messung wurde für einen mit der Faser M9 gebildeten Resonator der Länge $L = 99,7(11) \,\mu\text{m}$ durchgeführt. Die Resonanzamplitude betrug bei offener Blende knapp 100 mV und wurde bis zum Verschwinden variiert. Die aufgenommenen Messdaten sind in Abb. 4.4 dargestellt. Eine Anpassungsgerade gibt einen schwachen systematischen Fehler der gemessenen Linienbreite von 4(2)% im Messbereich.

Der zweite Fall der Variation der in den Resonator eingekoppelten Lichtleistung wurde direkt durch Änderung der Laserleistung realisiert. Durch Drehung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP1 (vgl. Abb. 3.4) wurde die Laserleistung variiert, sodass die gemessene Resonanzamplitude in einem Bereich von 0 – 300 mV eingestellt werden konnte. Die maximale Resonanzamplitude und die Messwerte unterscheiden sich hierbei stark von jener des ersten Falls, da die Messung zu einem früheren Zeitpunkt der Arbeit durchgeführt wurde und dabei ein Resonator mit einer anderen Faser (P1) verwendet wurde. Hier zeigen die Messdaten unter Verwendung einer linearen Anpassungsfunktion einen schwachen systematischen Abfall der Linienbreite von -1,3(9)% über den Messbereich (Abb. 4.5a).

Die beiden systematischen Abhängigkeiten von 4(2)% und -1,3(9)% liegen nicht mehr als zwei Standardabweichungen neben null, weshalb das Vorliegen eines systematischen Fehlers nicht sicher ist. Daher wird bei al-

Abb. 4.5: Linienbreite in Abhängigkeit der Resonanzamplitude bei Variation der eingekoppelten Lichtleistung. (a) Die eingekoppelte Lichtleistung wurde variiert und die zugehörige Linienbreite und Resonanzamplitude durch Anpassung von Lorentzkurven ermittelt. An die Messpunkte ist eine Gerade angepasst (durchgezogene Linie). Die Anpassungsgerade deutet auf einen systematischen Fehler der Linienbreite von -1,3(9)% im Messbereich hin. (b) Die Linienbreiten aller Messpunkte sind in einem Histogramm zusammengefasst. Die Linienbreiten sind normalverteilt, wie eine angepasste Normalverteilung (durchgezogene Linie) zeigt ($\chi^2/\text{FG} = 0.93$). Die Fehlerbalken geben die Unsicherheit einer Poisson-verteilten Größe an.

len durchgeführten Messungen der Linienbreite auf eine Korrektur eines möglichen systematischen Fehlers aufgrund der Linienamplitude verzichtet.

Die Statistik der Linienbreiten γ aus Abb. 4.5a ist in einem Histogramm in Abb. 4.5b dargestellt. Durch die Histogrammpunkte ist eine Normalverteilung der Form

$$N(\gamma) = A e^{-\frac{1}{2} \frac{(\gamma - \gamma_0)^2}{\sigma_\gamma^2}}$$
(4.10)

angepasst, wobei der angepasste Proportionalitätsfaktor A = 20(2), die mittlere Linienbreite $\gamma_0 = 8,40(3)$ MHz und die Standardabweichung $\sigma_{\gamma} = 0,33(2)$ MHz beträgt. Es zeigt sich, dass die Linienstatistik gut durch eine Normalverteilung beschrieben werden kann ($\chi^2/\text{FG} = 0,93$). Hierdurch ist es sinnvoll, eine mittlere Linienbreite durch Mittelung von N Messungen zu berechnen. Ebenso kann damit die Unsicherheit des Mittelwerts durch σ_{γ}/\sqrt{N} berechnet werden.

4.4 Einfluss der Polarisationsoptik der Detektion

Bislang wurden nur Fehlerquellen behandelt, welche eine einzelne Polarisation betreffen. Nun soll gezeigt werden, wie die beiden Resonatorpolarisationen miteinander vermischen können und wie dies die gemessene Finesse und Resonanzaufspaltung verfälschen kann. Eine solche Vermischung kann dann stattfinden, wenn die Polarisationsoptik nicht imstande ist, die beiden Resonatorpolarisationen vollständig zu trennen und eine Photodiode Anteile beider Polarisationen empfängt.

4.4.1 Motivation

In den ersten Monaten lieferten die Messungen für diese Arbeit verwirrende und inkonsistente Ergebnisse. Selbst wenn scheinbar nichts Relevantes an den Parametern der Messung verändert wurde, ließen sich Ergebnisse nicht zuverlässig reproduzieren. Erst spät stellte sich heraus, dass dieses seltsame Verhalten durch eine falsch eingestellte Polarisationsoptik hervorgerufen wurde. Diese falsche Einstellung ließ sich nicht mit bloßem Auge erkennen — die Form der Resonanzsignale am Oszilloskopschirm schienen auf eine korrekt eingestellte Polarisationsoptik hinzudeuten. Dass zum Auffinden einer korrekten Einstellung systematische Messreihen vonnöten sind, war zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar. Erst als die Einstellung der Polarisationsoptik durch Messreihen bestimmt wurde, ließen sich reproduzierbare Messergebnisse erzielen.

Als Beispiel seien Messergebnisse zu einem Resonator mit der Faser P1 angeführt (Abb. 4.6). Für diesen Resonator wurden an drei aufeinanderfolgenden Tagen Messungen der Finesse durchgeführt. An einem ersten Tag lieferte die Messung eine Finesse, die für beide Polarisationen in etwa gleich und über den gesamten Bereich abfallend war (Abb. 4.6a). Als die Messung an den zwei folgenden Tagen wiederholt wurde – an den Messparametern wurde scheinbar nichts Relevantes verändert – zeigten die beiden Resonatorpolarisationen jedoch unterschiedliche Finessewerte. Des Weiteren wies die Finesse an zwei Stellen ein sprunghaftes Verhalten auf (Abb. 4.6b).

Die einzige Größe, die zwischen und während den Messungen verändert wurde, war die Einkopplung des Lichts in die Glasfaser des Resonators. Die Einkopplung wurde ohne Bedenken verändert, da von einer korrekten Einstellung der Polarisationsoptik ausgegangen wurde. In diesem Fall wären die Resonatorpolarisationen vollständig getrennt worden und es hätte keine Rolle gespielt, wie stark eine Resonatorpolarisation angeregt wurde.

Im Folgenden wird allerdings gezeigt, dass eine falsch eingestellte Polarisationsoptik nicht mit bloßem Auge an der Form des Resonanzsignals erkannt werden und zu falschen Messergebnissen der Finesse und der Resonanzaufspaltung führen kann. Die sprunghaften Änderungen der Finesse in Abb. 4.6b treten auf, wenn bei einer fehlerhaft eingestellten Polarisationsoptik die Einkopplung des Lichts verändert wird. Eine Änderung der Einkopplung des Lichts kann dann die scheinbare Finesse ändern und so nicht

Abb. 4.6: Auswirkungen einer fehlerhaften Polarisationsoptik. Die Messung der Finesse für einen mit der Faser P1 gebildeten Resonator lieferte an zwei verschiedenen Tagen deutlich unterschiedliche Ergebnisse. (a) Eine Messung am 16.5.2017 zeigt zunächst noch für beide Polarisationen etwa die gleiche Finesse. (b) Eine Wiederholung am 17. und 18.5. liefert völlig inkonsistente Messwerte. Zwischen den beiden Messungen wurde nur die Einkopplung des Lichts in die Glasfaser geändert. Die Fehlerbalken geben die Unsicherheit des Mittelwerts an.

reproduzierbare Messergebnisse liefern. Das folgende Unterkapitel beschreibt ein einfaches Modell der Mischung der beiden Resonatorpolarisationen bei einer inkorrekt eingestellten Polarisationsoptik.

4.4.2 Modell der Polarisationsmischung

Die Resonatorpolarisationen eines Fabry-Pérot-Resonators sind im Allgemeinen bezüglich ihrer Resonanzfrequenz aufgespalten. Dadurch wird der Resonator die beiden Polarisationen r und q nacheinander emittieren (Abb. 4.7). Die Resonatorpolarisation kann im Allgemeinen zirkular sein und die zueinander orthogonalen Achsen können in der xy-Ebene beliebig ausgerichtet sein. Diese beiden Polarisationen sind unabhängig voneinander und können daher nicht miteinander interferieren.

Ein gänzlich anderes Bild ergibt sich allerdings, nachdem die polarisierten Felder des Resonators einen polarisierenden Strahlteiler durchlaufen haben. Im polarisierenden Strahlteiler wird jede der beiden Resonatorpolarisationen in ihre Anteile in Richtung der Basen s und p aufgeteilt. Da dies für beide Resonatorpolarisationen geschieht, liegen nach dem Strahlteiler in der Basis s bzw. p Anteile *beider* Resonatorpolarisationen r und q vor. An

Abb. 4.7: Mechanismus der Polarisationsmischung. Die Polarisationen des Resonators sind entlang der Achsen r und q ausgerichtet. Nach Durchlaufen des polarisierenden Strahlteilers werden die Resonatorpolarisationen auf die Achsen s und p projiziert.

Abb. 4.8: Polarisationsmischung. Die Polarisationen des Resonators sind um einen Winkel θ gegenüber dem horizontalen/vertikalen Koordinatensystem gedreht. Ein polarisierender Strahlteiler (PBS) projiziert die Komponenten der beiden Resonatorpolarisationen auf die Basis s und p. In jeder Basiskomponente einzeln überlagern sich die Anteile der Felder $E_{\rm r}$ und $E_{\rm q}$ und ergeben die neuen Felder $E_{\rm s}$ und $E_{\rm p}$.

dieser Stelle können die Resonatorpolarisationen also sehr wohl miteinander interferieren und damit die Form der detektierten Resonanzen beeinflussen.

Das einfache Modell für diesen Vorgang wird im Folgenden vorgestellt. Der Resonator emittiere linear polarisierte elektrische Felder mit den elektrischen Feldstärken E_r und E_q (Abb. 4.8). Diese sollen durch die Ausrichtung der Polarisationsachsen des Resonators um einen Winkel θ gedreht sein und das gesamte transmittierte Resonatorfeld besitzt damit die Darstellung

$$\boldsymbol{E}_{0}(\phi) = E_{\mathrm{r}}(\phi) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} E_{\mathrm{q}}(\phi) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.11)$$

wobei ϕ die im Resonator aufgesammelte Phasendifferenz angibt (vgl. Abschn. 2.2.1) und mit α eine etwaige Phasenverschiebung zwischen den beiden Resonatorpolarisationen berücksichtigt werden kann.

Trifft dieses Resonatorfeld nun auf einen polarisierenden Strahlteiler, der die Felder in x- und y-Richtung aufspaltet, so erhält man an den Ausgängen des Strahlteilers die Felder

$$\boldsymbol{E}_{s}(\phi) = \begin{pmatrix} E_{0,x}(\phi) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \tag{4.12}$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0\\ E_{0,y}(\phi)\\ 0 \end{pmatrix}.$$
(4.13)

Explizit ausgeschrieben lauten das Feld für die s-Komponente in seiner nicht verschwindenden Komponente unter Verwendung der Ausdrücke für das transmittierte Feld eines Resonators (Gl. (2.35))

$$E_{\mathbf{s},x} = E_{\mathbf{r}}(\phi)\cos\theta - e^{\mathbf{i}\alpha}E_{\mathbf{q}}(\phi)\sin\theta$$

$$(4.14)$$

$$=\frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\phi}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}E_{\mathrm{e,r}}\cos\theta-\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(\phi+\Delta\phi)}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi+\Delta\phi)}}E_{\mathrm{e,q}}\sin\theta,\qquad(4.15)$$

wobei die Polarisationen um eine Phasendifferenz $\Delta \phi$ gegeneinander aufgespalten sind. Die kursiv gesetzten Größen r und t bezeichnen die Reflektivität und die Transmittivität des Resonators.

Analog ergibt sich für das Feld der p-Komponente

$$E_{\mathbf{p},y} = E_{\mathbf{r}}(\phi)\sin\theta + e^{\mathbf{i}\alpha}E_{\mathbf{q}}(\phi)\cos\theta$$
(4.16)

$$= \frac{t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\phi}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} E_{\mathrm{e,r}} \sin\theta + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{t \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(\phi + \Delta\phi)}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi + \Delta\phi)}} E_{\mathrm{e,q}} \cos\theta.$$
(4.17)

Die im Experiment zugängliche Messgröße ist die Intensität, die an den beiden Photodioden für die Komponenten s und p detektiert wird. Die Intensitäten sind

$$I_{\rm s} \sim |E_{{\rm s},x}|^2$$
 und $I_{\rm p} \sim |E_{{\rm p},y}|^2$. (4.18)

Für die praktische Berechnung ist die Umrechnung der Phase ϕ in eine Frequenzverstimmung und das Ausdrücken der Reflektivität r durch die Finesse \mathcal{F} , die Resonatorlänge L und die Linienbreite γ_{ν} vorteilhaft. Diese Umrechnung geschieht mittels

$$r \approx 1 - \frac{\pi}{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSB}}}{\gamma_{\nu}}, \quad \nu_{\text{FSB}} = \frac{c}{2L}$$
 (4.19)

$$\phi = 2\pi \frac{\nu}{\nu_{\text{FSB}}}, \quad \Delta \phi = 2\pi \frac{\Delta \nu}{\nu_{\text{FSB}}},$$
(4.20)

Abb. 4.9: Effekt der Polarisationsmischung. Die nach dem polarisierenden Strahlteiler nach Gl. (4.18) berechneten Intensitäten sind in Abhängigkeit der Verstimmung des Resonators für verschiedene Winkel θ der Resonatorpolarisationen aufgetragen (s-Pol.: durchgezogene Linie, p-Pol.: gestrichelte Linie). Die verwendeten Parameter sind $E_{\rm e,r} = E_{\rm e,q} = 1$, $\gamma_{\rm r} = \gamma_{\rm q} = \Delta \nu = 10$ MHz, L = 100 µm und $\alpha = 0^{\circ}$.

wobei zusätzlich die Resonanzaufspaltung $\Delta\nu$ durch Messung oder Rechnung bekannt ist.

Ein Beispiel einer solchen Polarisationsmischung ist in Abb. 4.9 gezeigt. Treffen die Resonatorpolarisationen auf den polarisierenden Strahlteiler, ohne gegen dessen Achsen verdreht zu sein ($\theta = 0^{\circ}$), werden die Resonanzen in ihrer tatsächlichen Form detektiert. Bei beginnender Verdrehung der Polarisationsebene wird zunächst eine Resonanz verbreitert, während die andere schmäler wird. Bei weiterer Drehung bildet sich für eine Polarisation eine doppelte Signalspitze aus. Geht der Drehwinkel gegen 90°, so bildet sich die Überlagerung der Linien wieder zurück und die Resonatorpolarisationen sind gegenüber dem Anfangszustand vertauscht.

Ein berechnetes Beispiel für die quantitative Auswirkung der Polarisationsmischung auf die scheinbare Linienbreite und die scheinbare Resonanzaufspaltung ist in Abb. 4.10a gezeigt. In diesem Beispiel besitzt die Resonanzaufspaltung den halben Wert der Linienbreite. Bei der Drehung der Polarisationsebene gegenüber dem polarisierenden Strahlteiler zeigt sich, dass die scheinbare Linienbreite von ihrem tatsächlichen Wert von 10 MHz auf bis zu 7,0 MHz abfällt und auf bis zu 13,7 MHz ansteigt. Insbesondere ist zu bemerken, dass durch die Polarisationsmischung die Resonanz nicht nur verbreitert, sondern auch verschmälert werden kann.

Mit bloßem Auge ist für die gewählten Parameter keine merkliche Ver-

Abb. 4.10: Scheinbare Linienbreite und scheinbare Resonanzaufspaltung bei Polarisationsmischung. Die aus einer Anpassung mit einer Lorentzkurve gewonnen Linienbreiten und Resonanzaufspaltungen sind gegen den Winkel der Ebene der Resonatorpolarisationen θ gegen den polarisierenden Strahlteiler aufgetragen. Die Kurven wurde für verschiedene Verhältnisse $E_{\rm e,r}/E_{\rm e,q}$ der Resonatorpolarisationen berechnet, wobei die Parameter $\gamma_{\rm r} = \gamma_{\rm q} = 10$ MHz, $\Delta \nu = 5$ MHz, $L = 100 \,\mu{\rm m}$ und $\alpha = 0^{\circ}$ verwendet wurden.

formung der Linien beobachtbar. Das bedeutet, dass am Oszilloskopschirm der Einfluss der Polarisationsmischung ohne systematische Messungen leicht übersehen werden kann.

Der tatsächliche Wert für die Linienbreite wird bei 0° und bei 90° erreicht. Des Weiteren besitzt die Linienbreite bezüglich dem Polarisationswinkel eine Periodenlänge von 180°. Die Form des Zusammenhangs zwischen scheinbarer Linienbreite und Polarisationswinkel θ hängt vom Verhältnis der Amplituden der Resonatorpolarisationen $E_{\rm e,r}/E_{\rm e,q}$ ab. Für Ein Amplitudenverhältnis von eins ist der ansteigende und der abfallende Teil der Kurve relativ symmetrisch. Bei einem ungleichen Amplitudenverhältnis wird die Kurve verzerrt und zeigt um 90° ein zunehmend sprunghaftes Verhalten.

Die scheinbare Resonanzaufspaltung wird ebenfalls durch die Polarisationsmischung verändert (Abb. 4.10b). Die Periodenlänge beträgt wiederum 180°. Für ein Amplitudenverhältnis von eins schwankt die scheinbare Resonanzaufspaltung zwischen -5,0 MHz und 5,0 MHz und verschwindet bei $\theta = 45^{\circ}$. Das Minimum und das Maximum wird für die Winkel 0° und 90° angenommen.

Für ungleiche Amplitudenverhältnisse kann die scheinbare Resonanzaufspaltung Werte bis knapp $\pm 5,2$ MHz annehmen. Ebenso ist die Lage der Minima, der Maxima und der Nulldurchgänge gegenüber dem Fall gleicher Amplituden verschoben.

Aus diesem Beispiel ergibt sich folgende Schlussfolgerung: Die Resonatorpolarisationen werden dann vom polarisierenden Strahlteiler vollständig getrennt, wenn die scheinbaren Linienbreiten der beiden Polarisationen den selben Wert annehmen. Liegt zudem ein Amplitudenverhältnis von eins vor, nimmt die Resonanzaufspaltung bei einer vollständigen Trennung der Resonatorpolarisationen ein Minimum oder ein Maximum an.

4.4.3 Beobachtung der Polarisationsmischung im Experiment

In einer ersten Messung wurde gezeigt, dass eine Mode mit kleiner Resonanzaufspaltung eine Verfälschung der gemessenen Finesse aufgrund einer Mischung der Resonatorpolarisationen erfahren kann. Des Weiteren wurde gezeigt, dass eine solche Verfälschung nicht auftritt, wenn sicher nur eine Resonatorpolarisation angeregt wurde.

Die verwendete Polarisationsoptik ist in Abb. 4.11a gezeigt. Das Licht durchlief zunächst ein $\lambda/2$ -Plättchen LHP3 und einen Strahlteiler ST, bevor es mittels eines weiteren $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 und eines polarisierenden Strahlteilers PST2 in die p- und s-Polarisation aufgeteilt wurde.

Zunächst wurde die Messung für die (0,0)-Mode durchgeführt. Die (0,0)-Mode besaß im Versuch eine kleine Resonanzaufspaltung von weniger als einer Linienbreite (Abb. 4.11b). Die Resonatorpolarisationen wurden so angeregt, dass bei einer Stellung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 von 0° scheinbar nur eine Resonatorpolarisation angeregt war. Dann wurde die Finesse und die Resonanzaufspaltung in Abhängigkeit der LHP4-Stellung bestimmt (Abb. 4.11c- 4.11d)

Bei Drehung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 zeigt die Finesse für beide gemessenen Polarisationen eine Variation im Bereich von rund $7 \cdot 10^4$ bis $1,5 \cdot 10^5$. Die Variation besitzt ein periodisches Verhalten, wobei die Kurven der beiden Polarisationen um eine halbe Periode gegeneinander verschoben sind. Aus der Abbildung ergibt sich eine Periodenlänge von rund 90° bezogen auf das LHP4, also einer halben Drehung der Polarisationsebene des Lichts.

Für die LHP4-Stellung, für die die p-Polarisation maximiert und die s-Polarisation zum Verschwinden gebracht worden ist (LHP4 = 0°), zeigt die s-Polarisation einen sprunghaften Anstieg. Bei ca. 50° wiederum verschwindet die p-Polarisation und diese zeigt dort ebenfalls ein sprunghaftes Verhalten. Dieser Drehwinkel scheint mit einer Drehung des $\lambda/2$ -Plättchens um 45° vereinbar zu sein, also jenem Winkel der die Ausrichtung der p- und der s-Polarisation vertauscht. Die Beeinflussung der Finesse einer Polarisation ist demnach an den Stellen besonders groß, an denen die Amplitude der Resonanz der Polarisation verschwindet.

Abb. 4.11: Einfluss der gemessenen Finesse von der Stellung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4. (a) Das benutzte $\lambda/2$ -Plättchen LHP4 ist hinter dem Strahlteiler ST angebracht. (b) Für eine kleine Resonanzaufspaltung (hier die (0,0)-Mode) zeigt die gemessene Finesse und Resonanzaufspaltung (c,d) eine starke Abhängigkeit von der LHP4-Stellung. (e) Für eine große Resonanzaufspaltung ((1,0)-Mode) verschwindet dieses Verhalten (f,g). Die in (f) und (g) dargestellten Messungen wurden nur durch eine einzelne angeregte Resonatorpolarisation erzeugt. Die zwei angeregten Resonatorpolarisationen in (e) wurden nur zur Veranschaulichung der klaren Trennung der Resonatorpolarisationen erzeugt und nicht für die eigentliche Messung verwendet. Die Restschwankungen der Resonanzaufspaltung dürften lediglich statistische Messunsicherheiten sein. Die Fehlerbalken geben die Unsicherheit des Mittelwerts der Messungen an.

Anschließend wurde die Messung mit einer Mode wiederholt, bei der sichergestellt werden konnte, dass tatsächlich nur eine Resonatorpolarisation angeregt wurde. Für die Messung wurde die (1,0)-Mode verwendet, die eine Resonanzaufspaltung von rund sechs Linienbreiten besaß. Hierdurch waren beide Polarisationen klar voneinander getrennt und eine Polarisation konnte sicher zum Verschwinden gebracht werden (Abb. 4.11b). Wurde für diese Mode das $\lambda/2$ -Plättchen LHP4 durchgedreht, blieb die Finesse konstant und beide Polarisationen besaßen denselben Wert der Finesse. Des Weiteren ist die Resonanzaufspaltung konstant. Die Restschwankung der Werte dürfte schlichtweg durch statistische Fluktuationen zustande kommen.

Das Verhalten der (1,0)-Mode stimmt mit dem erwarteten Verhalten überein: Wird nur eine einzelne Resonatorpolarisation angeregt, kann bei Drehung des $\lambda/2$ -Plättchens nur diese eine Resonanz zwischen den beiden Photodioden aufgeteilt werden. Da sich beide Photodioden gleich verhalten, darf diese Aufteilung einer einzigen Linie zu keiner Änderung der gemessenen Finesse oder Resonanzaufspaltung führen.

Die Messung dieses Abschnitts zeigt insbesondere einen Fallstrick bei der Finesse-Messung auf: Eine einfache Einstellung der Polarisationsoptik unter Verwendung des Oszilloskopschirms kann schnell zu einer falschen Einstellung verführen. Wird etwa das $\lambda/2$ -Plättchen und die Lichteinkopplung so eingestellt, dass nur eine Photodiode ein Signal erhält, während das Signal auf der anderen Photodiode verschwindet, so bedeutet dies nicht zwangsweise, dass tatsächlich nur eine Resonatorpolarisation angeregt wurde. Es ist ebenso möglich, dass beide Resonatorpolarisationen angeregt sind und durch Interferenz eine von beiden unterdrückt wird. In diesem Fall ist allerdings die gemessene Linienbreite und die gemessene Resonanzaufspaltung verfälscht.

4.4.4 Linienformen bei Polarisatorfehlstellung

Die Linienform der Resonatorpolarisationen wurden für unterschiedliche Polarisatorfehlstellungen aufgenommen (Abb. 4.12). Der verwendete Resonator wurde mit der Faser M9 gebildet (Resonatorlänge $L = 99,5(11) \,\mu\text{m}$). Bei Drehung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 zeigt sich qualitativ das gleiche Verhalten wie im Beispiel zum Polarisationsmischungsmodell (Abb. 4.9). Es gibt Winkelstellungen, bei denen die Linienform die einer Lorentzkurve ist. Wird das $\lambda/2$ -Plättchen weiter gedreht, tritt zunächst eine kleine Spitze an der Flanke der Kurve auf (p-Pol.). Bei weiterer Drehung wird die neue Spitze stets größer, während die alte Spitze abnimmt. Nach einer Drehung von insgesamt ca. 45° haben sich die Signale der beiden Photodioden bzw. Polarisationen vertauscht. Während dieses Vorgangs nimmt die Breite der Resonanz der p-Polarisation zu, während die Breite der Resonanz der s-Polarisation ab-


Abb. 4.12: Linienformen bei Polarisationsmischung. Dargestellt ist die vom Resonator transmittierte Lichtleistung für verschiedene Stellungen des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 (Gradangaben in den Graphiken). Die untere Kurve ist jeweils die p-Polarisation, die obere die s-Polarisation. Die schwarzen durchgezogenen Linien sind Berechnungen nach dem Polarisationsmischungsmodell (Gl. (4.18)).

nimmt. Es wurde versucht, einen Satz von Parametern zu finden, mit dem das Verhalten nach dem Polarisationsmischungsmodell berechnet werden kann. Für die Parameter $E_{\rm e,r}/E_{\rm e,q} = 1$, $\gamma_{\rm r} = \gamma_{\rm q} = 8 \,{\rm MHz}$, $\Delta \nu = -8 \,{\rm MHz}$, $L = 100 \,{\rm \mu m}$ und $\alpha = 0^{\circ}$ wurde zumindest eine qualitative Übereinstimmung erzielt. Ein Grund für die quantitative Abweichung könnte darin liegen, dass die Messdaten mit der Variation des Versuchsaufbaus aufgenommen wurde, in der der Strahlteiler ST noch enthalten war. Dessen Einfluss ist im Polarisationsmischungsmodell nicht enthalten.

4.4.5 Auffindung und Überprüfung der korrekten Polarisatorstellung

Nachdem im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, wie die Fehlstellung des Polarisators, d.h. des $\lambda/2$ -Plättchens in Kombination mit dem polarisierenden Strahlteilers, die gemessene Finesse und Resonanzaufspaltung verfälschen kann, wird in diesem Abschnitt behandelt, wie die korrekte Polarisatorstellung aufgefunden werden kann und vor allem, wie verifiziert werden kann, dass es sich dabei tatsächlich um die korrekte Einstellung handelt.

Das Verfahren zur Auffindung der korrekten Polarisatorstellung beruht auf der Annahme, dass beide Resonatorpolarisationen dieselbe Finesse besitzen. Es wird daher jener Winkel des $\lambda/2$ -Plättchens gesucht, der beide Polarisationen denselben Wert für die Finesse annehmen lässt. Ist ein solcher Winkel gefunden, so muss überprüft werden, ob es sich tatsächlich um den korrekten Winkel handelt.

Das Verfahren zur Überprüfung der korrekten Polarisatorstellung wiederum beruht auf der Annahme, dass bei korrekt eingestellter Polarisationsoptik die gemessene Finesse und Resonanzaufspaltung nicht vom Amplitudenverhältnis der beiden Polarisationen abhängen darf. Diese Annahme scheint gerechtfertigt, da eine korrekte Polarisatorstellung die beiden Polarisationen vollständig voneinander trennt und eine Änderung einer Polarisation keinen Einfluss auf die andere Polarisation haben kann. Dass die Amplitudenänderung alleine keinen bedeutenden Einfluss auf die Finesse besitzt, wurde in Abschn. 4.3 bereits gezeigt.

Bei solch einer Überprüfung zeigte sich, dass bei Verwendung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4 kein korrekter Winkel gefunden werden konnte. Deshalb wurde die oben beschriebene Polarisationsoptik (Abb. 4.11a) durch eine leicht abgeänderte Version ersetzt, in welcher das LHP4 entfernt wurde und stattdessen das LHP3 zur Drehung der Polarisationsebene eingesetzt wurde. Als Nächstes soll beschrieben werden, wie die korrekte Stellung des LHP3 aufgefunden wird und anschließend wird gezeigt, wie sich die Stellung überprüfen lässt und worin sich die beiden Variationen der Polarisationsoptik unterscheiden.

Eine Messung zum Auffinden der korrekten Einstellung der Polarisationsoptik ist in Abb. 4.13 dargestellt. Die Messung wurde für einen mit der Faser M9 gebildeten Resonator der Länge $L = 99,9(11) \,\mu\text{m}$ durchgeführt, wobei die (0,0)-Mode verwendet wurde. Eine Variation des $\lambda/2$ -Plättchens von $10^{\circ} - 25^{\circ}$ zeigt, dass in diesem Bereich die Finesse-Werte der beiden Polarisationen einen Schnittpunkt besitzen. Zur genaueren Bestimmbarkeit des Schnittpunktes werden durch die Datenpunkte Anpassungsgeraden gelegt. Die korrekte LHP3-Stellung lässt sich damit zu rund 19,5° ermitteln (Abb. 4.13a). Des Weiteren zeigte sich, dass die Resonanzaufspaltung



Abb. 4.13: Bestimmung des korrekten Polarisatorwinkels. (a) Die Finesse ist in Abhängigkeit des Winkels des $\lambda/2$ -Plättchens LHP3 aufgetragen. Durch die Messpunkte sind Anpassungsgeraden gelegt. Der Schnittpunkt bei ca. 19,5° zeigt die korrekte LHP3-Stellung. (b) Die Resonanzaufspaltung besitzt beim Winkel 18,9(4)° ein Maximum, wie aus einer angepassten quadratischen Funktion ermittelt wurde. Die Fehlerbalken in vertikaler Richtung geben die Unsicherheit des Mittelwerts der Datenpunkte an, die in horizontaler Richtung die geschätzte Einstellungenauigkeit von 0,5°.

beim gleichen Winkel ein Maximum annimmt. Durch Anpassen einer quadratischen Anpassungsfunktion lässt sich der Winkel dieses Maximums zu $18,9(4)^{\circ}$ bestimmen.

Nachdem der vermutete korrekte Winkel aufgefunden wurde, wird diese Einstellung der Polarisationsoptik auf ihre Korrektheit überprüft. Hierzu wird das Amplitudenverhältnis der beiden Resonatorpolarisationen variiert und das Verhalten der Finesse und der Resonanzaufspaltung ermittelt. Ist die Polarisationsoptik korrekt eingestellt, muss die Finesse für beide Polarisationen den gleichen Wert aufweisen und sowohl Finesse als auch Resonanzaufspaltung müssen unter der Amplitudenvariation konstant bleiben.

Bei dieser Kontrolle zeigte sich, dass das LHP4 ungeeignet für die vollständige Separation der Resonatorpolarisationen ist. Die Kontrollmessung mit dem LHP4 ist in Abb. 4.14a-4.14b dargestellt. Es gibt zwar einen Winkel (2°), bei dem die Finessen gleich und konstant sind, jedoch ist dort die Resonanzaufspaltung nicht konstant. Ebenso gibt es einen Winkel (8°), bei dem die Resonanzaufspaltung konstant ist, jedoch sind bei diesem die Finessen weder gleich noch konstant. Es kann sich also bei keinem der beiden Winkel um die korrekte Einstellung handeln.

Nachdem die Polarisationsoptik abgeändert wurde, indem das $\lambda/2$ -Plättchen LHP4 entfernt wurde, und die Einstellung der Polarisationsebene



Abb. 4.14: Vergleich zweier verschiedener Polarisationsoptiken. (a) Wird das $\lambda/2$ -Plättchen LHP4 verwendet, lässt sich keine LHP4-Stellung finden, für welche sowohl die Finesse, als auch die Resonanzaufspaltung vom Amplitudenverhältnis der beiden Resonatorpolarisationen unabhängig ist (b). Wird hingegen das $\lambda/2$ -Plättchen LHP3 verwendet und das LHP4 entfernt (c), gibt es eine LHP3-Stellung (21°), für welche die Finesse und die Resonanzaufspaltung nicht vom Amplitudenverhältnis abhängen (d). Die Fehlerbalken geben die Unsicherheit des Mittelwerts an.



Abb. 4.15: Längenabhängigkeit der Stellung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP4. Die Einstellung des LHP4 für die (1,0)- und die (0,1)-Mode ist in Abhängigkeit der Resonatorlänge aufgetragen. Die Resonanzaufspaltung dieser Mode trennte die beiden Resonatorpolarisationen deutlich auf. Die Fehlerbalken geben die Fehler des Mittelwerts aus fünf Messwiederholungen an.

durch das LHP3 geschah, konnte eine korrekte Einstellung gefunden werden (Abb. 4.14c-4.14d). Bei etwa dem Winkel (21°), bei dem in der vorherigen Messung beide Polarisationen dieselbe Finesse annahmen (Abb. 4.13), waren die Finessen beider Polarisationen gleich und konstant. Zudem war die Resonanzaufspaltung vom Amplitudenverhältnis unabhängig.

4.4.6 Längenabhängigkeit der Polarisatorstellung

Nachdem die korrekte Einstellung der Polarisationsoptik für eine einzelne Resonatorlänge gefunden und verifiziert wurde, stellt sich die Frage, ob diese Einstellung längenabhängig ist - bzw. gleichbedeutend hierzu, ob die Ausrichtung der Resonatorpolarisationen längenabhängig ist. Da die Bestimmung der korrekten Polarisatorstellung für die (0,0)-Mode zeitaufwendig ist, wurde die Längenabhängigkeit für die (1,0)-Mode überprüft. Da für diese Mode die Resonanzaufspaltung deutlich größer als eine Linienbreite ist, kann die Polarisatorstellung einfach mit Hilfe des Oszilloskopschirms durchgeführt werden. Die Notwendigkeit einer zeitaufwendigen Datenauswertung entfällt dabei.

Die Polarisatorstellung in Abhängigkeit der Resonatorlänge ist in Abb. 4.15 dargestellt. Der Resonator wurde dabei mit der Faser M9 gebildet. Zur Aufnahme eines Datenpunktes wurde eine Resonatorlänge eingestellt und für diese eine Stellung des LHP4 gesucht, bei der die Resonatorpolarisationen vollständig zwischen beiden Photodioden aufgeteilt wurden. Der aufgetragene LHP4-Winkel ist der Mittelwert aus fünf Messwiederholungen. Dessen Unsicherheit ist dabei der Fehler des Mittelwerts. Die Messergebnisse zeigen exemplarisch, dass sich über einen Längenbereich von 160 µm die Ausrichtung der korrekten Polarisatorstellung um bis ca. 6° ändern kann.

Eine Längenabhängigkeit der Polarisatorstellung bedeutet, dass sich die Ausrichtung der Resonatorpolarisation mit der Resonatorlänge ändert. Ein Grund für eine solche Längenabhängigkeit könnte eine Drehung der effektiven Ausrichtung des elliptischen Spiegelprofils sein.

Für die Ausrichtung der Resonatorpolarisation ist entscheidend, wie am Ort der Resonatormode die Halbachsen des elliptischen Spiegelprofils liegen. Für kleine Resonatorlängen ist die Ausdehnung der Mode auf dem Spiegel klein und die Halbachsenausrichtung nahe dem Spiegelzentrum ist entscheidend. Für große Resonatorlängen ist die Ausdehnung der Mode groß und die effektive Halbachsenausrichtung entfernt vom Zentrum spielt eine Rolle. Im Allgemeinen wird sich die effektive Ausrichtung der Halbachsen mit zunehmendem Abstand vom Spiegelzentrum ändern, wodurch auch die Ausrichtung der Resonatorpolarisation längenabhängig wird.

Für die in Kapitel 5 folgenden Messungen hat das Resultat dieses Abschnitts folgende Bedeutung: Wird die korrekte Ausrichtung für das $\lambda/2$ -Plättchen für eine einzelne Resonatorlänge bestimmt, bedeutet dies nicht zwangsweise, dass die Ausrichtung für alle Resonatorlängen korrekt ist.

4.4.7 Auswirkungen einer Polarisatorfehlstellung

Eine Kernmessung dieser Arbeit ist die Messung der Finesse und der Resonanzaufspaltung von faserbasierten Resonatoren als Funktion deren Länge. Es stellt sich daher sofort die Frage, wie sich eine Fehleinstellung der Polarisationsoptik auf dieses Messergebnis auswirkt. Zur Begrenzung des Zeitbedarfs dieser Untersuchung wurden exemplarisch drei Fälle für die (0,0)-Mode untersucht. Als Erstes wurde die Messung für eine korrekte Polarisatorstellung durchgeführt. Als Zweites wurde die das $\lambda/2$ -Plättchen LHP3 um ca. 5° verdreht, dabei jedoch darauf geachtet, dass die wirklichen Resonatorpolarisationen gleich stark angeregt waren. Als Drittes schließlich wurde zusätzlich zum um ca. 5° verdrehten $\lambda/2$ -Plättchen noch die Resonatorpolarisationen ungleich angeregt. Die verwendete Polarisationsoptik war dabei jene, bei der das $\lambda/2$ -Plättchen LHP3 zur Einstellung der Polarisationsebene verwendet wurde (Abb. 4.14c).

Das Ergebnis der ersten Messung ist in Abb. 4.16a-4.16b dargestellt. Bei dieser Messung war die Polarisationsoptik korrekt eingestellt (LHP3 = $35,5^{\circ}$). Die Finesse als Funktion der Länge bewegt sich größtenteils im Bereich von $1,1-1,2\cdot10^5$. Entscheidend ist, dass die Finessen der beiden Resonatorpolarisationen über den gesamten Längenbereich die gleichen Werte



Abb. 4.16: Einfluss einer Fehlstellung des $\lambda/2$ -Plättchens LHP3 auf die gemessene Finesse und Resonanzaufspaltung. (a,b) Für die korrekte Stellung von LHP3 = 35,5° besitzen beide Resonatorpolarisationen dieselbe Finesse. (c,d) Eine Fehlstellung von LHP3 = 30° täuscht verschiedene Finessen der beiden Polarisationen vor. (e,f) Das gleiche Verhalten kommt zustande, wenn die beiden Polarisationen unterschiedlich stark angeregt werden.

annehmen. Ebenso ist die Resonanzaufspaltung in Bruchteilen von 2π über einen großen Längenbereich konstant und liegt für eine Resonatorlänge von rund 50 bis 150 µm bei 42 – 45 µrad.

Beim ersten Datenpunkt für die Finesse bei ca. $50 \,\mu\text{m}$ war die Linienbreite bereits so groß, dass sich die Seitenbänder kaum noch von der Trägerlinie abheben konnten, weshalb die Anpassung einen ungenauen Wert geliefert haben dürfte. Der Einbruch der Finesse zwischen ca. 160 μm und 180 μm lässt sich durch das Eigenwertmodell erklären und wird in Kapitel 5 ausführlich erläutert.

Für die zweite Messung (Abb. 4.16c-4.16d) wurde das $\lambda/2$ -Plättchen um ca. 5° verdreht und auf LHP3 = 30° falsch eingestellt. Die Resonatorpolarisationen waren dabei gleich stark angeregt. Für die Einstellung der Resonatorpolarisation musste die korrekte Polarisatorstellung von LHP3 = 35,5° verwendet werden. Die Werte für die Finesse sind für die beiden Resonatorpolarisationen nun klar unterschiedlich. Die p-Polarisation nimmt nun größtenteils Werte von $0,9 - 1,0 \cdot 10^5$ und die s-Polarisation von $1,2 - 1,3 \cdot 10^5$ an, d.h. sie unterschieden sich um rund 25%, bezogen auf den korrekten Wert. Die Resonanzaufspaltung wurde durch die Fehlstellung leicht verändert und liegt nun großteils im Bereich von 40-42 µrad. Der Grund für die beiden stark abweichenden Datenpunkte ist unklar. Es könnte sich aber um gerade die Längen handeln, die nach dem Eigenwertmodell zu Moden führen, die stark von der idealen (0,0)-Mode abweichen.

Bei der dritten Messung wurde das $\lambda/2$ -Plättchen auf 30° belassen, zusätzlich aber eine Resonatorpolarisation doppelt so stark angeregt wie die andere (Abb. 4.16e-4.16f). Die beiden Resonatorpolarisationen sind wiederum unterschiedlich und bewegen sich im Bereich von $0.9 - 1.0 \cdot 10^5$ für die p-Polarisation und $1.2 - 1.3 \cdot 10^5$ für die s-Polarisation. Die Resonanzaufspaltung liegt etwa im Bereich von 39 - 43 µrad.

Aus den drei Messungen ergibt sich, dass das wichtigste Erkennungsmerkmal für eine Fehlstellung des Polarisators eine Aufspaltung der Finesse der Resonatorpolarisationen ist. Diese Finesseaufspaltung ist in diesen Messungen über einen großen Bereich der Resonatorlänge konstant.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Validität der Messaufbaus und der Messmethoden untersucht. Es wurde gezeigt, dass die Durchstimmgeschwindigkeit der Resonatorlänge einen Einfluss auf die gemessene Linienbreite besitzt. Des Weiteren wurde das Rauschspektrum der Linienbreite gemessen und gezeigt, dass die gemessenen Linienbreiten normalverteilt sind. Die Linienamplitude besitzt keinen signifikanten Einfluss auf die ermittelte Linienbreite. Es wurde gezeigt, dass die für die Detektion verwendete Polarisationsoptik leicht unbemerkt falsch eingestellt werden kann. Die Auswirkungen auf die dann ermittelte Finesse und Resonanzaufspaltung wurden diskutiert und es wurde gezeigt, wie die korrekte Einstellung der Polarisationsoptik ermittelt werden kann.

Kapitel 5

Messungen an faserbasierten Resonatoren

Nachdem im vorgehenden Kapitel die Validität der Messmethode überprüft wurde, werden in diesem Kapitel die eigentlichen Messungen an den faserbasierten Resonatoren behandelt. Dieses Kapitel ist daher als der Kern der Arbeit anzusehen. Die faserbasierten Resonatoren werden dabei in ihren beiden Haupteigenschaften – Verluste und Polarisationsaufspaltung der Resonanzen – erfasst. Zur Gewinnung einer möglichst vollständigen Beschreibung des Resonators wurden diese beiden Eigenschaften über einen möglichst großen Längenbereich des Resonators gemessen.

Die Frage, die in diesem Kapitel beantwortet werden soll, ist, ob das Verhalten der faserbasierten Resonatoren durch das Eigenwertmodell und das Modell der Resonanzaufspaltung aus Kapitel 2 beschrieben werden kann. Insbesondere soll geklärt werden, ob die zur Verfügung stehenden, gemessenen Oberflächen der Faserspiegel geeignet sind die Messergebnisse zu erklären.

Die Messungen wurden dabei für zwei faserbasierte Resonatoren durchgeführt. Beide faserbasierte Resonatoren wurden mit Multimoden-Fasern gebildet. Diese Fasern besitzen den großen Vorteil, dass mit ihnen neben der (0,0)-Mode auch einige höhere Moden gezielt angeregt werden können. Durch Vermessung auch höherer Moden kann ein vollständigeres Bild vom Verhalten der Resonatoren gewonnen werden.

Dass nicht mehr als zwei faserbasierte Resonatoren vermessen wurden, hat den Grund, dass in der begrenzten zur Verfügung stehenden Zeit nicht mehr geleistet werden konnte. Jede Messung eines faserbasierten Resonators setzt eine Reihe zeitaufwendiger Vormessung voraus, wie die Bestimmung der absoluten Resonatorlänge, oder die Ermittlung der korrekten Einstellung der Polarisationsoptik. Messungen an weiteren faserbasierten Resonatoren wären jedoch wünschenswert gewesen.

Im folgenden Kapitel wird zunächst beschrieben, welche Resonatormoden leicht anregbar waren und welche nur mühsam einer Messung zugänglich waren. Als Hauptteil werden die Messergebnisse der Resonatorverluste und der Resonanzaufspaltung zweier faserbasierter Resonatoren diskutiert.

5.1 Messbarkeit der Moden unterschiedlicher Ordnung

Durch die Verwendung von Multimoden-Fasern konnten unterschiedliche Moden des Resonators einigermaßen gezielt angeregt werden. Es zeigte sich allerdings, dass einige dieser Moden einfach und zuverlässig angeregt werden konnten, während andere schwierig aufzufinden und schwierig getrennt anregbar waren. Des Weiteren unterschieden sich die erreichbaren Resonanzamplituden für die verschiedenen Moden stark.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Moden unterschiedlicher Ordnung lag in deren Resonanzaufspaltung. Die Größe der Resonanzaufspaltung hatte direkten Einfluss darauf, wie einfach die Messung für die entsprechende Mode durchgeführt werden konnte. Für Moden, die eine Resonanzaufspaltung besaßen, die kleiner als etwa eine Linienbreite war, musste zuerst die Einstellung der Polarisationsoptik durch eine eigene Messung bestimmt werden (vgl. Abschn. 4.4.5). Für Moden mit größerer Resonanzaufspaltung konnte die korrekte Einstellung der Polarisationsoptik direkt am Oszilloskopschirm abgelesen werden.

Die (0,0)-Mode konnte in allen Fällen einfach aufgefunden und mit ausreichender Amplitude (bis grob 100 mV Photodiodensignal gegenüber 2 mV Rauschen (Std.abw.)) angeregt werden. Ebenso war die (0,0)-Mode jene Mode, für die ein Resonanzsignal noch nahe an der Grenze des Stabilitätsbereichs aufgefunden werden konnte (Resonanzen bis 209 µm bei ca. 230 µm Stabilitätsgrenze).

Nachteilig bei den (0,0)-Moden der vermessenen Resonatoren war jedoch, dass diese eine geringe Resonanzaufspaltung besaßen, d.h. die Aufspaltung nicht bedeutend größer als die Linienbreite war. Hierdurch musste für die (0,0)-Moden jeweils die Einstellung der Polarisationsoptik durch eine eigene Messreihe aufgefunden und überprüft werden.

Die höheren Moden waren unterschiedlich einfach anregbar. Die beiden Moden erster Ordnung konnten noch einzeln angeregt werden. Für die beiden untersuchten Resonatoren war jedoch eine der beiden Moden erster Ordnung spürbar einfacher anzuregen. Diese Mode wurde mit (1,0) indiziert, die andere mit (0,1). Bei den höheren Ordnungen war oftmals nur eine der (beinahe) entarteten Moden einstellbar. Diese wurden mit (2,0), (3,0), usw. bezeichnet. Die anderen Moden (1,1), (0,2), etc. konnten nur durch längeres Suchen aufgefunden werden und besaßen zudem eine deutlich geringer Amplitude als die Moden (2,0), (3,0), usw.

Der Grund für dieses Verhalten könnte darin liegen, dass nicht alle Moden gleicher Ordnung die gleichen Verluste besitzen. Die Messergebnisse des folgenden Abschnitts deuten darauf hin, dass die Moden, die schwierig anregbar waren, deutlich höhere Verluste besaßen, als die einfach anregbaren Moden.

5.2 Längenabhängigkeit der Verluste

Die Ermittlung der Resonatorverluste in Abhängigkeit der Resonatorlänge dient dazu, die zugrundeliegenden Verlustmechanismen zu untersuchen. Das Eigenwertmodell des Resonators und das Abschneidemodell (Kapitel 2.3) sagen eine Längenabhängigkeit der Verluste voraus, die durch Messungen überprüft werden soll.

Die Längenabhängigkeit der Resonatorverluste wird durch die Messung der Finesse als Funktion der Resonatorlänge für zwei verschiedene faserbasierte Resonatoren bestimmt. In beiden Fällen betrug der Stabilitätsbereich der Resonatoren 0 bis etwa 230 µm. Beinahe der gesamte Stabilitätsbereich wurde bei der Messung erfasst. Nach unten waren die zugänglichen Resonatorlängen durch den Umstand begrenzt, dass sich der Planspiegel und der Faserspiegel nicht berühren durften. Bei einem Krümmungsradius von rund 230 µm und einem Sphärizitätsdurchmesser von 75 µm begrenzt die Pfeiltiefe (d.i. die Tiefe der sphärischen Einbuchtung) die zugängliche Resonatorlänge auf ca. 3 µm. Von daher wären kürzere Resonatorlängen zugänglich gewesen.

Eine weitere Beschränkung nach unten wird dem Messbereich jedoch durch das Verhältnis von Linienbreite und Seitenbandabstand auferlegt. Bei etwa 50 µm Resonatorlänge begannen die Seitenbänder sich mit dem Träger zu vereinen und wurden damit unauflösbar.

Nach oben war der Messbereich durch zwei Mechanismen begrenzt. Ein Mechanismus wurde durch die natürliche Grenze des Stabilitätsbereichs gebildet. Der zweite Mechanismus wurde dadurch gebildet, dass die Resonanzamplitude bei steigender Resonatorlänge geringer wurde. Bereits vor Erreichen der Grenze des Stabilitätsbereichs verschwanden die Resonanzen im Signalrauschen und wurden damit unmessbar. Der Grund für die abnehmende Resonanzamplitude lag in der für längere Resonatoren schlechter werdenden Modenanpassung. Das Licht, welches von der Glasfaser in den Resonator eintritt, besitzt eine starke Divergenz. Je länger der Resonator ist, desto geringer ist daher der Überlapp zwischen eingestrahltem Licht und Resonatormode, weshalb die Resonatormode immer schwächer angeregt wird.



Abb. 5.1: Beispiel von berechneten Verlusten und Finessen nach der Eigenwertmethode. Die Verluste wurde mittels des Benedikter-Scripts für die Faser P1 mit einer max. Basisordnung von N = 25 berechnet. Der mittlere Krümmungsradius der Faser beträgt 250 µm bei einem Sphärizitätsradius von 50 µm. Die Finesse wurde unter Annahme zusätzlicher Verluste von 50 ppm (gestrichelte Linie) berechnet.

5.2.1 Beispiel einer Verlustberechnung

Bevor Messergebnisse vorgestellt werden, soll ein Beispiel berechneter Verluste nach dem Eigenwertmodell diskutiert werden. Die Berechnung wurde für einen Resonator, der mit der Faser P1 gebildet wurde, durchgeführt. Der mittlere Krümmungsradius des Resonators beträgt 250 µm bei einem Sphärizitätsradius von 50 µm. Für die Umrechnung der Resonatorverluste in Finessewerte wurden zusätzliche Resonatorverluste von 50 ppm angenommen. Dieser Wert ist die Summe aus Transmission, Absorption und Streuung. Die Ergebnisse der Berechnung der Verluste und der Finesse sind in Abb. 5.1 dargestellt.

Das Verhalten der Verluste setzt sich aus zwei Merkmalen zusammen. Zum einen steigt der Verlust auf einer großen Längenskala mit steigender Resonatorlänge in etwa exponentiell an. Zum anderen zeigt der Verlust auf einer kleinen Längenskala schmal ausgeprägte, starke Anstiege.

Die berechnete Finesse zeigt im Wesentlichen drei charakteristische Merkmale: Erstens ist die Finesse über die ersten zwei Drittel des Stabilitätsbereichs praktisch konstant. Zweitens fällt die Finesse auf etwa dem letzten Drittel bis auf null ab. Und drittens ist die Finesse von schmalen Einbrüchen

durchzogen.

Diese Merkmale ergeben sich sofort aus den berechneten Verlusten in Kombination mit den Grundverlusten von hier 50 ppm. Solange die berechneten Verluste deutlich unter den Grundverlusten liegen, haben sie keine Auswirkung auf die Finesse. Übersteigen sie diese, entweder lokal oder am Ende des Stabilitätsbereichs, bricht die Finesse zusammen.

Eine Beschreibung der physikalischen Gründe direkt aus dem Eigenwertmodell 2.64 ist schwierig, da die Eigenwertgleichung eine sehr allgemeine Form besitzt. Es lassen sich aber physikalische Gründe finden, wenn die Eigenwertgleichung störungstheoretisch betrachtet wird. Im Verlauf der vorliegenden Arbeit wurden Überlegungen zur Anwendung der Störungstheorie durchgeführt. Allerdings sind die Ergebnisse noch in einem zu frühen Stadium, als dass sie Eingang in diese Arbeit gefunden hätten. Nichtsdestotrotz soll der Mechanismus der Resonatorverluste kurz aus störungstheoretischer Sicht kommentiert werden.

Das Auftreten der Verluste wird aus Sicht der Störungstheorie durch drei Faktoren bestimmt: Erstens muss die vorliegende Resonatormode (hier die (0,0)-Mode) mit höheren Moden koppeln. Die Stärke dieser Kopplung wird durch Überlappelemente zwischen der vorliegenden Resonatormode und den höheren Moden unter Wirkung der Spiegelverformung bestimmt. Dies führt dazu, dass stärker verformte Spiegel im Allgemeinen zu größeren Verlusten führen.

Zweitens muss die Ausdehnung der Resonatormoden auf dem Resonatorspiegel im Bereich der Spiegelausdehnung liegen. Nur wenn ein Teil der Resonatormoden nicht vom Spiegel zurückgeworfen wird, können Verluste entstehen. Mit steigender Resonatorlänge nimmt die Größe der Moden auf dem Spiegel zu, wodurch die Verluste mit steigender Resonatorlänge zunehmen.

Drittens können die Resonatorverluste stark erhöht werden, wenn die vorliegende Mode in Resonanz mit einer höheren Mode ist. In diesem Fall kommt es zu einem schmal begrenzten, starken Anstieg der Verluste um die gemeinsame Resonanzlänge herum. Für den betrachteten plan-konkaven Resonator gibt es dabei eine interessante Beobachtung: Für die (0,0)-Mode gibt es keine Resonatorlänge, bei der diese Mode mit einer Mode 1. oder 2. Ordnung resonant wäre. Es kann dann kein schmal begrenzter, starker Anstieg der Verluste durch Kopplung zu Moden 1. oder 2. Ordnung auftreten. Erst für Moden ab 3. Ordnung gibt es gemeinsame Resonanzlängen mit der (0,0)-Mode. Die Moden 3. Ordnung besitzt bei 172 µm Resonatorlänge eine Resonanz mit der (0,0)-Mode. Um diese Länge herum wurde tatsächlich ein starker Einbruch der Finesse gemessen (vgl. Abschn. 5.2.3 und 5.2.4).



Abb. 5.2: Einfluss der maximalen Basisordnung. Der Umlaufverlust δ_{00} der (0,0)-Mode als Funktion der Resonatorlänge L ist für verschiedene maximale Basisordnungen $N_{\rm max}$ aufgetragen. Die Basisordnung nimmt von oben nach unten zu. Die Verluste wurden m48it der Eigenwertmethode in Form der Mathematica-Implementierung von Benedikter berechnet. Die Berechnungen wurden für die rechnerisch geglättete Faser P1 mit mittlerem Krümmungsradius $R = 250 \,\mu{\rm m}$ durchgeführt.

5.2.2 Einfluss der maximalen Basisordnung

Eine wichtige Frage ist jene nach der ausreichenden Anzahl an Basisfunktionen. Der Einfluss der Auswahl einer endlichen Anzahl von Basisfunktionen ist exemplarisch in Abb. 5.2 dargestellt. Der für die Berechnungen verwendete Faserspiegel wurde durch die Faser P1 gebildet ($R = 250 \,\mu\text{m}$). Die Umlaufverluste wurden für verschiedene maximale Basisordnungen berechnet. Es zeigt sich, dass die berechneten Umlaufverluste für kleine maximale Basisordnungen deutlich zu groß ausfallen. Ebenso ändert sich die genaue Form der Verlustresonanzen.

Die Berechnungen wurden mit einem herkömmlichen Arbeitsplatzrechner durchgeführt. Teilweise wurde dabei auf einen Rechner mit 64 GB Arbeitsspeicher zurückgegriffen, da das Mathematica-Script von Benedikter et al. einen hohen Bedarf an Arbeitsspeicher hat. Die Rechenzeit lag bei der kleinsten dargestellten maximalen Basisordnung $N_{\text{max}} = 10$ bei rund 8 Stunden, bei $N_{\text{max}} = 25$ bereits bei rund einer halben Woche. Eine weitere Erhöhung der maximalen Basisordnung wurde wegen des erwarteten Zeitbedarfs nicht versucht.

Die Ergebnisse in Abbildung 5.2 deuten darauf hin, dass selbst eine maxi-

male Basisordnung von $N_{\text{max}} = 25$ noch nicht für eine Konvergenz bezüglich N_{max} genügt. Eine weitere Erhöhung der maximalen Basisordnung scheint allerdings wegen des hohen Bedarfs an Arbeitsspeicher nicht sinnvoll.

Eine verbesserte Implementierung der numerischen Berechnung dürfte den benötigten Arbeitsspeicher allerdings stark reduzieren. Im Mathematica-Script von Benedikter et al. werden anscheinend die berechneten, speicherplatzintensiven Umlaufmatrizen für alle Resonatorlängen im Arbeitsspeicher belassen. Für die Berechnung der Verluste würde es genügen, die Umlaufmatrix für je eine einzelne Resonatorlänge im Arbeitsspeicher zu belassen.

5.2.3 Messergebnisse für die Faser M9

Die Messergebnisse für den mit der Faser M9 gebildeten Resonator sind in den Abbildungen 5.3a-5.3h dargestellt. Es zeigt sich dabei, dass die Moden unterschiedlicher Ordnung ein verschiedenes Verhalten zeigen. Die (0,0)-Mode besitzt eine Finesse, die über einen Großteil des Messbereiches beinahe konstant ist und nur auf den letzten ca. 50 µm einen Abfall zeigt (Abb. 5.3a). Für den annähernd konstanten Bereich liegen die Werte der Finesse bei etwa $1,2-1,4\cdot 10^5$.

Zwischen ca. 164 und 185 µm Resonatorlänge tritt ein starker Abfall der Finesse auf. In diesem Bereich konnten keine Resonanzen beobachtet werden und es fehlt in diesem Bereich daher ein großer Teil der Messpunkte. Dieses Verhalten ist mit den theoretischen Berechnungen nach dem skalaren Eigenwert-Modell vereinbar.

Das Abschneidemodell gibt den Abfall der Finesse bei ca $210 \,\mu m$ korrekt wieder. Den zuvor stattfindenden Abfall zwischen ca. 164 und 185 μm kann das Abschneidemodell nicht erklären. Zumindest liefert das Abschneidemodell aber eine sehr einfache Abschätzung des maximalen Bereichs, in dem eine hohe Finesse potentiell auftreten kann.

Für die höheren Ordnungen zeigt sich ein gespaltenes Bild. Auf der einen Seite zeigen einige der gemessenen höheren Moden (die (1,0)-, die (3,0)und die (4,0)-Mode; Abb. 5.3b, 5.3g und 5.3h) das gleiche Verhalten wie die (0,0)-Mode, sind also über einen großen Bereich der Resonatorlänge in ihrer Finesse von ca. $1,2 - 1,3 \cdot 10^5$ konstant. Auf der anderen Seite gibt es höhere Moden, die ein deutlich abweichendes Verhalten aufweisen. Drei dieser Moden (die (0,1)-, (2,0)- und die (1,1)-Mode; Abb. 5.3c, 5.3d und 5.3f) steigen über den Resonatorlängenbereich von rund $50 - 160 \,\mu\text{m}$ in ihrer Finesse an, beginnend bei rund $0,8 \cdot 10^5$ und endend bei $1,1 - 1, 2 \cdot 10^5$. Eine weitere Mode (die (0,2)-Mode) zeigt einen konstanten Verlauf, jedoch bei einem Wert von $0,8 \cdot 10^5$.

Das Eigenwertmodell kann dieses Verhalten nur zum Teil beschreiben. Für die (1,0)-, die (3,0)- und die (4,0)-Mode stimmen die Berechnungen



Abb. 5.3: Finesse der Faser M9. Die Finesse des faserbasierten Resonators ist in Abhängigkeit der Resonatorlänge dargestellt. In jeder Abbildung sind die beiden Resonatorpolarisationen p und s aufgetragen. Die Modenordnung ist in runden Klammern angegeben. Im Bereich zwischen ca. 164 und 185 µm waren keine Resonanzen beobachtbar und fehlen daher in den Messdaten. Für die Theoriekurven wurden zusätzliche Verluste von 50 ppm angenommen.



Abb. 5.3: Finesse der Faser M9 (Fortsetzung).



Abb. 5.3: Finesse der Faser M9 (Fortsetzung). Die unteren durchgezogenen Kurven sind Berechnungen nach dem Benedikter-Script für die (0,3)- und die (0,4)-Mode.

nach dem Eigenwertmodell zu einem guten Teil mit den Messdaten überein. Erstens wird die Konstanz der Finesse über eine großen Bereich der Resonatorlänge korrekt wiedergegeben. Zweitens tritt der Abfall der Finesse etwa bei der Resonatorlänge auf, ab der im Experiment keine Moden mehr beobachtbar waren und deshalb weitere Messpunkte fehlen.

Das Verhalten der (0,1)-, der (2,0)-, der (0,2)- und der (1,1)-Mode wird durch das Eigenwertmodell nicht korrekt wiedergegeben. Insbesondere der Anstieg der Finesse bei länger werdendem Resonator wird vom Modell nicht vorhergesagt. Bemerkenswert ist allerdings, dass das Eigenwertmodell für die (0,2)-, die (0,3)- und die (0,4)-Mode einen schnellen Abfall der Finesse liefert. Das oszillierende Verhalten der Theoriekurve für die (0,3)-Mode dürfte ein Artefakt der Anpassung der Strahltaille sein (s. S. 22). Bei feinerer Anpassung sollten diese Sprünge verschwinden.

Dies könnte darauf hindeuten, dass es bei den höheren Moden eine bevorzugte Ausrichtung gibt, für die die Verluste klein sind, sowie eine nicht bevorzugte Ausrichtung, für die die Verluste sehr schnell zunehmen. Diese Vermutung wird durch den Umstand gestützt, dass im Experiment einige höhere Moden (wie etwa die (0,3)- und die (0,4)-Mode) trotz langer Versuche nicht anregbar waren.

5.2.4 Messergebnisse für die Faser M11

Die Messergebnisse für den zweiten Resonator zeigen ebenfalls ein gemischtes Verhalten für die (0,0)-Mode und die höheren Moden (Abb. 5.6b). Die (0,0)-Mode ist wieder über einen großen Bereich des Stabilitätsbereichs (50– 160 µm) in ihrer Finesse annähernd konstant ($\mathcal{F} = 1, 1 - 1, 2 \cdot 10^5$). Bei den höheren Moden zeigt sich wiederum ein unterschiedliches Verhalten. Drei der vermessenen Moden (die (1,0)-, die (2,0)- und die (3,0)-Mode) zeigen das gleiche Verhalten wie die (0,0)-Mode und weisen eine Finesse im Bereich von $\mathcal{F} = 1, 1 - 1, 2 \cdot 10^5$ auf. Die einzige weitere vermessene höhere Mode, die (0,1)-Mode, besitzt eine Finesse, die zunächst abfällt und im Bereich von 130-160 µm wieder ansteigt. Weitere Resonatormoden konnten bei der Messung nicht zuverlässig angeregt werden. Das Verhalten der unterschiedlichen Moden für die beiden Resonatoren ist in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

5.2.5 Vergleich mit dem Eigenwertmodell und Diskussion

Das Verhalten der (0,0)-Moden der vermessenen Fasern M9 und M11 lässt sich durch das Eigenwertmodell beschreiben. Es lassen sich dabei drei Charakteristika reproduzieren: Die Konstanz der Finesse über einen großen Längenbereich, der Abfall kurz vor Ende des Stabilitätsbereichs und der breite Bereich, in dem die Finesse zusammenbricht und deshalb mutmaßlich keine Re-



88KAPITEL 5. MESSUNGEN AN FASERBASIERTEN RESONATOREN

Abb. 5.4: Finesse der Faser M11. Die Finesse des faserbasierten Resonators ist in Abhängigkeit der Resonatorlänge dargestellt. In jeder Abbildung sind die beiden Resonatorpolarisationen p und s aufgetragen. Die Modenordnung ist in runden Klammern angegeben. Im Bereich zwischen ca. 160 und 180 µm waren keine Resonanzen beobachtbar und fehlen daher in den Messdaten. Für die Theoriekurven wurden zusätzliche Verluste von 54 ppm angenommen.



Abb. 5.4: Finesse der Faser M11 (Fortsetzung). Die unteren durchgezogenen Kurven sind Berechnungen nach dem Benedikter-Script für die (0,2)- und die (0,3)-Mode.

Tabelle 5.1: Qualitative Einteilung der Resonatormoden. Für die beiden vermessenen faserbasierten Resonatoren mit den Fasern M9 und M11 sind die jeweils erfassten Moden nach dem qualitativen Verhalten ihrer Finesse als Funktion der Länge eingeteilt.

	Verhalten der Finesse				
Resonator	laut Theorie	konst. zu niedrig	ansteigend	abfallend	gemischt
M9	$(0,0) \\ (1,0) \\ (3,0) \\ (4,0)$	(0,2)	(0,1) (1,1) (2,0)	-	-
M11	$(0,0) \\ (1,0) \\ (2,0) \\ (3,0)$	-	-	-	(0,1)

sonanzen detektiert werden konnten. Für die direkte numerische Lösung der Eigenwertgleichung wurde das Benedikter-Script mit Hermite-Gauß-Moden verwendet. Die Strahltaille wurde dabei für jede Resonatorlänge durch Maximierung des Matrixelements M_{00} optimiert.

Bei der Messung der Finesse der (0,0)-Mode hat es sich bei den vermessenen Fasern als besonderes Problem erwiesen, dass diese Fasern durch ihre geringe Elliptizität nur eine kleine Resonanzaufspaltung besaßen. Hierdurch musste sorgfältig darauf geachtet werden, dass die beiden Resonatorpolarisationen vollständig voneinander getrennt wurden. Zu Beginn des Experiments führten unvollständig getrennte Resonatorpolarisationen zu einer Vielzahl von falschen Messwerten der Finesse und der Resonanzaufspaltung. Das Problem der Polarisationsmischung lag bei den meisten höheren Moden aufgrund der stärkeren Resonanzaufspaltung nicht vor. Eine Beeinflussung der Messergebnisse durch die Polarisationsmischung kann dort daher ausgeschlossen werden. Ob es andere Mechanismen gibt, die zu einer Verfälschung der Ergebnisse der höheren Moden führen können, ist unklar.

Es scheint denkbar, dass sich die unterschiedlichen Verluste auf die Ausrichtung der der Intensitätsverteilung im Resonator zurückführen lassen. Es wäre möglich, dass sich die Resonatormoden so ausrichten, dass ausschließlich für eine Ausrichtung der Moden mit der Form (n,0) die Verluste minimal werden. Die Moden der anderen Ausrichtung (0,m) wären dann mit umso höheren Verlusten behaftet. Welcher Mechanismus für ein eventuelles derartiges Verhalten verantwortlich sein könnte ist unklar.

Interessant ist, dass für beide Fasern M9 und M11 das Verhalten der Fi-

nesse in Abhängigkeit der Länge qualitativ wie quantitativ sehr ähnlich ist. Für beide Fasern besitzt die Finesse der (0,0)-Mode im Bereich von ca. 160 – 180 µm einen starken Einbruch und einen endgültigen Abfall bei ca. 200 µm. Die beiden Faserspiegel besitzen vergleichbare Parameter: Krümmungsradien von 215(5)/226(5) µm für die Faser M9 und 225(5)/235(5) µm für die Faser M11, sowie ein Sphärizitätsradius von je 35 µm.

Dies deutet darauf hin, dass die detaillierte Form der Spiegeloberfläche keinen entscheidenden Einfluss auf das Verhalten der Finesse hat. Vielmehr dürfte der mittlere Krümmungsradius die Lage des großen Einbruchs bei ca. $160 - 180 \,\mu\text{m}$ bestimmen. Es besteht die Vermutung, dass dieser Einbruch durch Kopplung zu Moden 3. Ordnung hervorgerufen wird (vgl. S. 81).

5.3 Längenabhängigkeit der Doppelbrechung

Durch die Messung der getrennten Resonatorpolarisationen konnte neben der Finesse der faserbasierten Resonatoren sofort auch die Resonanzaufspaltung erfasst werden. Für die Resonanzaufspaltung zeigte sich bei beiden Resonatoren ein ähnliches Verhalten. In allen Fällen ließ sich die Längenabhängigkeit der Resonanzaufspaltung grob durch Potenzgesetze beschreiben. Dabei besaß die (0,0)-Mode jeweils den Exponenten -1, der durch das einfache Modell nach Uphoff et al. zu erwarten war (vgl. Abschn. 2.4). Die höheren Moden hingegen wiesen zwar je Faser einen einheitlichen Exponenten auf, dieser wich jedoch vom Exponenten der (0,0)-Mode ab.

5.3.1 Messergebnisse für die Faser M9

Die Messergebnisse der Resonanzaufspaltung für den mit der Faser M9 gebildeten Resonator sind in Abb. 5.5 dargestellt. Es zeigt sich dabei, dass die Resonanzaufspaltung aller gemessenen Moden durch ein Potenzgesetz der Form

$$\Delta \nu = \frac{a}{\nu^b} \tag{5.1}$$

beschrieben werden kann. Die durch Anpassung ermittelten Potenzen b und Vorfaktoren a scheinen in zwei Gruppen zu zerfallen (Abb. 5.5b und Abb. 5.5c). Während die (0,0)-Mode grob dem vorhergesagten Verhalten nach dem Modell von Uphoff et al. folgt, zeigen die höheren Moden ein abweichendes Verhalten. Die angepassten Potenzen der höheren Moden liegen alle bei 1,7(2) bis 1,94(4).

Für die Berechnung der Theoriekurve nach Gl. (2.72) nach dem Modell von Uphoff et al.,

$$\Delta \nu = \delta \nu_{\text{PolX}} - \delta \nu_{\text{PolY}} = -\frac{c}{4\pi kL} \frac{R_y - R_x}{R_y R_x},$$
(5.2)



Abb. 5.5: Resonanzaufspaltung für die Faser M9. (a) Dargestellt ist die Resonanzaufspaltung der Resonatorpolarisationen in Abhängigkeit der Resonatorlänge für unterschiedliche Moden in Frequenzeinheiten. Die Fehlerbalken (Unsicherheit des Mittelwerts) sind klein und daher größtenteils nicht zu erkennen. Die gepunkteten Linien sind Anpassungsfunktionen nach Gl. (5.1), die gestrichelte Linie ist die Theoriekurve nach dem Modell von Upphoff et al., Gl. (5.2). (b,c) Die Anpassungsparameter aus 5.5a sind für die unterschiedlichen Moden aufgetragen.



Abb. 5.6: Resonanzaufspaltung für die Faser M11. Ansonsten wie Abb. 5.5.

wurden die Werte $(R_x, R_y) = (215 \,\mu\text{m}, 226 \,\mu\text{m})$ angenommen (Tab. 3.1).

5.3.2 Messergebnisse für die Faser M11

Für die Messergebnisse der Resonanzaufspaltung der Faser M11 ergibt sich wieder ein unterschiedliches Potenzgesetz für die (0,0)-Mode und für die höheren Moden (Abb. 5.6). Die (0,0)-Mode folgt wieder grob einem Potenzgesetz mit Potenz -1, allerdings ist der Proportionalitätsfaktor nicht mehr mit dem Modell von Upphoff vereinbar ($(R_x, R_y) = (225 \,\mu\text{m}, 235 \,\mu\text{m})$). Wie bei der Messung der Faser M9 haben die höheren Moden eine abweichende, aber untereinander einheitliche, Potenz im Bereich von 1,13(4) bis 1,22(4).

Bei der Messung zu dieser Faser zeigte sich ein interessantes Verhalten kurz vor dem Ende des Stabilitätsbereichs: Ab einer Länge von ca. 180 µm wich die Resonanzaufspaltung deutlich von einem Potenzgesetz ab. Es wäre möglich, dass diese Abweichung durch denselben Mechanismus hervorgerufen wurde, der für den starken Abfall der Finesse verantwortlich ist. In diesem Bereich langer Resonatoren wirken sich die Spiegeldeformationen und die endliche Spiegelausdehnung bereits deutlich auf die Resonatormoden aus und führen möglicherweise nicht nur zu einer Störung der Beträge der Eigenwerte, sondern auch zu einer Störung deren Argumente. Bei der Anpassung der Potenzfunktion (5.1) an die Messergebnisse wurde deshalb nur der Längenbereich unterhalb von 150 µm verwendet.

5.3.3 Diskussion

Die gemessene Resonanzaufspaltung der (0,0)-Mode zeigt eine Längenabhängigkeit mit einer Potenz, wie sie nach dem Modell von Uphoff et al. zu erwarten ist. Es ist daher zu vermuten, dass die Resonanzaufspaltung der (0,0)-Mode nur durch die Elliptizität des Faserspiegels bestimmt wird. Die höheren Moden besitzen eine abweichende, aber jeweils einheitliche Potenz. Da die Potenz für alle gemessenen höheren Moden trotz deren unterschiedlicher räumlicher Ausdehnung auf dem Faserspiegel gleich ist, liegt die Vermutung nahe, dass auch hier die Resonanzaufspaltung allein durch die Elliptizität des Spiegels bestimmt wird. Würden andere Spiegeldeformationen wie eine Änderung des Krümmungsradius des Spiegels nach außen hin für das abweichende Verhalten verantwortlich sein, so würde man erwarten, dass höhere Moden mit einer größeren Ausdehnung einem anderen Potenzgesetz folgten.

5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden im Wesentlichen die Messergebnisse für zwei faserbasierte Resonatoren vorgestellt. Es wurde gezeigt, dass das Verhalten der (0,0)-Mode durch das Eigenwertmodell beschrieben werden kann. Die Finesse ist für diese Mode über einen großen Längenbereich des Resonators konstant und zeigt kurz vor einem endgültigen Abfall einen charakteristischen Einbruch. Die Finesse der höheren Moden scheint stark von der Ausrichtung der Moden abzuhängen. Das Verhalten der Moden höherer Ordnung lässt sich nur zum Teil durch das Eigenwertmodell korrekt beschreiben.

Die Resonanzaufspaltung wird zumindest für die (0,0)-Mode korrekt durch ein einfaches Modell beschrieben, welches die Elliptizität der Resonatorspiegel als Quelle für die Aufspaltung hat. Die Längenabhängigkeit der Resonanzaufspaltung wird durch ein Potenzgesetz beschrieben. Die höheren Moden zeigen dabei eine andere, aber einheitliche Potenz als die (0,0)-Mode.

96KAPITEL 5. MESSUNGEN AN FASERBASIERTEN RESONATOREN

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Verluste und Polarisationseffekte in faserbasierten Resonatoren experimentell und theoretisch untersucht. Für die Messung dieser Resonatoren wurde ein Messaufbau konzipiert und realisiert. Des Weiteren wurde der Messaufbau sorgfältig charakterisiert und systematische und statistische Fehler untersucht. Es wurde ausführlich beschrieben, welche Messfehler leicht auftreten können und wie diese vermieden werden.

Als zu vermeidende systematische Fehler wurden insbesondere zwei Effekte beobachtet. Erstens führt die Durchstimmgeschwindigkeit der Resonatorlänge zu einer künstlichen Linienverbreiterung der Resonanzen. Zweitens kann durch falsche Einstellung der Polarisationsoptik die Linienbreite sowohl verringert, als auch vergrößert werden. Es wurde eine Methode zur Auffindung und Verifikation der richtigen Einstellung der Polarisationsoptik vorgestellt.

Als Kern der Arbeit wurden zwei mit Faserspiegeln gebildete Resonatoren über einen weiten Bereich ihres Stabilitätsbereichs vermessen, wobei die Resonatorverluste und die Resonanzaufspaltung der beiden Resonatorpolarisationen ermittelt wurde. Es zeigte sich, dass die (0,0)-Mode der beiden Resonatoren jeweils durch ein Eigenwertmodell des elektromagnetischen Feldes beschreiben werden kann. Die Verluste der höheren Moden zeigten ein komplizierteres Verhalten. Es gibt einerseits höhere Moden, die sich ähnlich wie die (0,0)-Mode verhalten. Andererseits gibt es aber auch höhere Moden, die eine ausgeprägte Längenabhängigkeit der Verluste besitzen. Eine mögliche Erklärung für dieses Verhalten könnte darin bestehen, dass sich die Moden eventuell derart am Resonatorspiegel ausrichten, dass die Verluste für einige Moden minimiert werden, während sie für die restlichen Moden umso größer werden. Die Idee hinter dem verwendeten Eigenwertmodell ist die Folgende: Die deformierte Spiegeloberfläche eines realen Resonators erzeugt Anteile von Moden höherer Ordnung. Durch die größere räumliche Ausdehnung dieser höheren Moden wird die endliche Spiegelausdehnung relevant und schneidet einen Teil der Moden ab, wodurch Verluste entstehen.

Die gemessene Resonanzaufspaltung der (0,0)-Mode lässt sich bereits durch die Elliptizität der Faserspiegel erklären. Die Resonanzaufspaltung wurde als Funktion der Resonatorlänge gemessen, wobei sich die theoretisch erwartete indirekte Proportionalität mit der Länge bestätigte. Für die höheren Moden zeigte sich ein Längenabhängigkeit mit abweichender Potenz. Die Idee hinter dem theoretischen Modell der Resonanzaufspaltung ist, dass durch eine Elliptizität der Resonatorspiegel das elektromagnetische Feld auf der Spiegeloberfläche nicht mehr verschwindet und zu einer Störung des Eigenwertproblems führt.

Zur Verringerung der Resonatorverluste können sofort zwei Vorschläge gemacht werden: Zum einen ließen sich die Verluste reduzieren, wenn die Oberfläche der Resonatorspiegel näher an der idealen sphärischen Form liegen würden. Zum anderen ließen sich die Verluste reduzieren, wenn die Spiegelausdehnung vergrößert werden würde. Der zweite Vorschlag wäre vermutlich leichter realisierbar.

Die Resultate dieser Masterarbeit haben insbesondere folgende Bedeutung: Erstens wurde in dieser Arbeit auch das Verhalten von höheren Moden untersucht. In anderen Arbeiten wurden die Verluste [8] oder die Resonanzaufspaltung [9] nur für die (0,0)-Mode ermittelt.

Zweitens wurde gezeigt, dass zumindest das Verhalten der (0,0)-Mode durch das skalare Eigenwertmodell eines Resonators beschrieben werden kann. Die Berechnungen können also zur Vorhersage des Verhaltens von faserbasierten Resonatoren verwendet werden.

Und drittens wurde ein sorgfältig untersuchter Messaufbau für die Charakterisierung von faserbasierten Resonatoren realisiert. Dieser Messaufbau steht zukünftig für die Messung weiterer Faserspiegel in Innsbruck zur Verfügung. Damit ist es möglich, in verhältnismäßig kurzer Zeit (wenige Tage) auch weitere Fasertypen (z.B. PC-Fasern) zu untersuchen.

Literaturverzeichnis

- J.-M. Raimond, M. Brune, und S. Haroche, "Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity," *Reviews of Modern Physics*, Vol. **73**, Nr. 3, S. 565 (2001).
- [2] T. E. Northup und R. Blatt, ,,Quantum information transfer using photons," *Nature Photonics*, Vol. 8, Nr. 5, S. 356–363 (2014).
- [3] D. Hunger, T. Steinmetz, Y. Colombe, C. Deutsch, T. W. Hänsch, und J. Reichel, ,, A fiber Fabry–Pérot cavity with high finesse," *New Journal* of *Physics*, Vol. **12**, Nr. 6, S. 065038 (2010).
- [4] K. Ott, Towards a squeezing-enhanced atomic clock on a chip. Doktorarbeit, Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [5] A. G. Fox und T. Li, ,Resonant modes in a maser interferometer," Bell Labs Technical Journal, Vol. 40, Nr. 2, S. 453–488 (1961).
- [6] K. Ott, S. Garcia, R. Kohlhaas, K. Schüppert, P. Rosenbusch, R. Long, und J. Reichel, "Millimeter-long fiber Fabry-Pérot cavities," *Opt. Express*, Vol. 24, Nr. 9, S. 9839–9853 (2016).
- [7] D. Kleckner, W. T. Irvine, S. S. Oemrawsingh, und D. Bouwmeester, ,,Diffraction-limited high-finesse optical cavities," *Physical Review A*, Vol. 81, Nr. 4, S. 043814 (2010).
- [8] J. Benedikter, T. Hümmer, M. Mader, B. Schlederer, J. Reichel, T. W. Hänsch, und D. Hunger, "Transverse-mode coupling and diffraction loss in tunable Fabry–Pérot microcavities," *New Journal of Physics*, Vol. 17, Nr. 5, S. 053051 (2015).
- [9] M. Uphoff, M. Brekenfeld, G. Rempe, und S. Ritter, "Frequency splitting of polarization eigenmodes in microscopic Fabry-Pérot cavities," *New Journal of Physics*, Vol. 17, Nr. 1, S. 013053 (2015).

- [10] P. W. Milonni und J. H. Eberly, *Lasers*. 605 Third Avenue, New York, N.Y., USA: John Wiley & Sons, 1988.
- [11] A. E. Siegman, *Lasers*. 55D Gate Five Road, Sausalito, California, USA: University Science Books, 1986.
- [12] M. Born und E. Wolf, *Principles of Optics*, 6. Aufl. Headington Hill Hall, Oxford OX3 0BW, England: Pergamon Press, 1984.
- [13] L. Bergmann und C. Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3, Optik, 9. Aufl. Berlin, Deutschland: Walter de Gruyter & Co., 1993.
- [14] H. Kogelnik und T. Li, "Laser beams and resonators," Proceedings of the IEEE, Vol. 54, Nr. 10, S. 1312–1329 (1966).
- [15] J. Degallaix, "OSCAR a Matlab based optical FFT code," in *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 228, Nr. 1. IOP Publishing, S. 012021 (2010).
- [16] M. Lax, W. H. Louisell, und W. B. McKnight, "From Maxwell to paraxial wave optics," *Physical Review A*, Vol. **11**, Nr. 4, S. 1365 (1975).
- [17] A. Cullen, ,,On the accuracy of the beam-wave theory of the open resonator," *IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques*, Vol. 24, S. 534 (1976).
- [18] B. Brandstätter, A. McClung, K. Schüppert, B. Casabone, K. Friebe, A. Stute, P. O. Schmidt, C. Deutsch, J. Reichel, R. Blatt *et al.*, ,,Integrated fiber-mirror ion trap for strong ion-cavity coupling," *Review of Scientific Instruments*, Vol. 84, Nr. 12, S. 123104 (2013).
- [19] J. Poirson, F. Bretenaker, M. Vallet, und A. Le Floch, "Analytical and experimental study of ringing effects in a Fabry–Pérot cavity. Application to the measurement of high finesses," *JOSA B*, Vol. 14, Nr. 11, S. 2811–2817 (1997).