

Frequenzstabilisierung eines Diodenlasersystems mit 729 nm Wellenlänge

Eine Masterarbeit an der
FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK, INFORMATIK UND PHYSIK,
DER LEOPOLD-FRANZENS UNIVERSITÄT IN INNSBRUCK,

ein Teil der Voraussetzungen
zur Erlangung des akademischen Grades eines

MASTER OF SCIENCE

durchgeführt am Institut für Experimental-Physik
unter Betreuung von Universitätsprofessor Dr. Rainer Blatt

präsentiert von
ALEXANDER ERHARD

MÄRZ 2015

Kurzfassung

Die Präzisionsspektroskopie benötigt Laser mit schmaler Linienbreite. Für die Durchführung solcher Experimente an einem existierenden Aufbau wurde im Rahmen dieser Masterarbeit ein Diodenlasersystem mit einer Linienbreite <10 Hz für die Spektroskopie am $4^2S_{1/2}$ - $3^2D_{5/2}$ Übergang von $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen bei 729 nm realisiert.

In dieser Arbeit wird der Aufbau einer zweistufigen Frequenzstabilisierung eines kommerziellen Diodenlasers auf einen Resonator mittlerer und einen Resonator hoher Finesse diskutiert. Ferner wird der mechanische und optische Aufbau dieser Resonatoren erläutert. Die Linienbreite des Lasers wird mit Hilfe von Schwebungsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser, welcher auf den 729 nm Übergang des $^{40}\text{Ca}^+$ Ions stabilisiert ist, ermittelt.

Abstract

Precision spectroscopy requires narrow linewidth lasers. In the scope of this thesis a diode laser system with a linewidth <10 Hz for the spectroscopy of the $4^2S_{1/2}$ - $3^2D_{5/2}$ transition of $^{40}\text{Ca}^+$ ions at 729 nm was realized.

In this thesis, a two-stage frequency stabilization of a commercial laser diode on a medium finesse and a high finesse cavity is discussed. Furthermore the mechanical and optical setup of these cavities is presented. The linewidth of the laser was determined by beat measurements with a stable reference laser locked to the 729 nm transition of the $^{40}\text{Ca}^+$ ion.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Das 729 nm Lasersystem	3
2.1	Theoretische Beschreibung eines Lasers	3
2.2	Arten von Lasersystemen	7
2.3	Der 729 nm Diodenlaser	8
2.4	Aufbau des Lasersystems	13
2.5	Systemdaten	14
3	Verwendung des 729 nm Lasers	16
3.1	Das Termschema des $^{40}\text{Ca}^+$ Ions	16
3.2	Die Ionenfalle	17
3.3	Quanteninformationsverarbeitung mit $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen	17
3.4	Laserkühlen	20
3.4.1	Dopplerkühlen	20
3.4.2	Seitenbandkühlen	20
3.5	Kompensation der Mikrobewegung	21
3.6	Experimentelle Anforderungen an den 729 nm Laser	22
3.6.1	Benötigte Leistung	22
3.6.2	Frequenzgenauigkeit	22
3.6.3	Langzeitstabilität	23
4	Laserstabilisierung	24
4.1	Einführung in die Regelungstechnik	24
4.2	Referenztypen zur Laserstabilisierung	26
4.3	Das Fabry-Pérot Interferometer	27
4.3.1	Funktionsweise	27
4.3.2	Freier Spektralbereich	30
4.3.3	Linienbreite	31
4.3.4	Finesse	32
4.3.5	Resonatorstabilität	32
4.3.6	Transversale Moden	33
4.4	Stabilisierungsmethoden	35
4.4.1	Die Flankenstabilisierung	35

4.4.2	Modulationsstabilisierung	35
4.5	Vergleichsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser	41
5	Charakterisierung der optischen Resonatoren	43
5.1	Übersicht des optischen Aufbaus	43
5.2	Optischer Resonator mittlerer Finesse	45
5.2.1	Mechanischer Aufbau	45
5.2.2	Optischer Aufbau	45
5.2.3	Resonatorparameter	46
5.2.4	Frequenzstabilisierung	48
5.3	Optischer Resonator hoher Finesse	49
5.3.1	Mechanischer Aufbau	49
5.3.2	Optischer Aufbau	50
5.3.3	Resonatorparameter	51
5.3.4	Kompensation von Faserrauschen	54
5.3.5	Temperaturstabilisierung	57
5.3.6	Frequenzstabilisierung	60
5.4	Stabilisierung der Laserfrequenz auf die Ionenfrequenz	61
6	Charakterisierung des 729 nm Lasers	63
6.1	Die Linienbreite des Lasers	63
6.1.1	Die Linienbreite nach der Vorstabilisierung	63
6.1.2	Die Linienbreite nach der Endstabilisierung	64
6.2	Die Frequenzdriften des Lasers	67
6.2.1	Die Driften ohne Kompensation	67
6.2.2	Die Driften mit Kompensation	69
7	Zusammenfassung und Ausblick	70
A	Abkürzungen (Akronyme)	73
	Literaturverzeichnis	74

Kapitel 1

Einführung

Die Methoden der Spektroskopie haben Möglichkeiten geschaffen, Informationen über den inneren Aufbau von Atomen, Molekülen und Festkörpern zu erlangen. Ein Großteil der heute zugänglichen Information über atomare und molekulare Energiestrukturen und Übergangswahrscheinlichkeiten verdanken wir der spektroskopischen Grundlagenforschung. In den letzten Jahrzehnten hat sich ein Teilgebiet, die Präzisionsspektroskopie, vor allem durch die Etablierung der Laserspektroskopie, in eindrucksvoller Weise weiterentwickelt. Durch die Erfindung neuer Lasersysteme und Nachweistechiken konnte die Spektroskopie revolutioniert werden. Noch heute erscheinen stetig neue Lasersysteme, welche in neue, noch nicht verfügbare Wellenlängenbereiche vordringen. Auch durch Errungenschaften aus der nichtlinearen Optik, wie beispielsweise die Frequenzverdoppelung oder -vervierfachung, konnten die verfügbaren Wellenlängenbereiche weiter ausgebaut werden. Die erhältlichen Lasersysteme zur Präzisionsspektroskopie wurden zusehends schmalbandiger, das heißt, die spektrale Linienbreite der Laser wurde kleiner. Dadurch wurde ein zentraler Aspekt der Spektroskopie, das spektrale Auflösungsvermögen, welches das Verhältnis der zu untersuchenden Wellenlänge zur noch unterscheidbaren Wellenlängendifferenz angibt ($\lambda/\Delta\lambda$), verbessert. Eine für Spektroskopiker wichtige Eigenschaft, wie groß der abdeckbare Wellenlängenbereich einer einzelnen Lichtquelle ist, konnte ebenso verbessert werden. Diese Errungenschaften waren unter anderem die Grundlage für die jüngsten Experimente in der Quanteninformationsverarbeitung in der Arbeitsgruppe für Quantenoptik und Spektroskopie der Universität Innsbruck¹ [1–3] sowie für Experimente zur Realisierung eines möglicherweise neuen Zeitstandards durch optischen Uhren [4, 5].

Die Fortschritte im Bereich der Frequenzstabilisierungsmethoden [6, 7] machten es möglich, die Linienbreite eines Lasers in den Sub-Hertz Bereich zu bringen [8–13]. Bei diesen Verfahren zur Frequenzstabilisierung eines Lasers werden oft optische Resonatoren mit hoher Finesse als Frequenzreferenz verwendet. Solch schmalbandige Laser ermöglichten es im Feld der Präzisionsspektroskopie, die Spektren von atomaren und molekularen Systemen mit hoher Genauigkeit (im Sub-Hertz Bereich, teilweise bis auf die systemeigenen Grenzen, wie natürliche Linienbreite, Dopplerverbreiterung, etc.) aufzulösen und zu untersuchen.

Ebenso wurde durch die schmalbandigen Laser unter anderem die Tür für neue Systeme in der Quanteninformationsverarbeitung geöffnet. Es folgten Vorschläge für die Realisierung eines Quantencomputers basierend auf dem System von gefangenen Ionen [14], welche mit Hilfe dieser Laser manipuliert werden können. In dieser Arbeit wurde ein 729 nm Diodenlasersys-

¹ <http://quantumoptics.at/>

tem zur Manipulation von $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen in Paulfallen [15–17] aufgebaut. In den Experimenten, in denen das präsentierte Diodenlasersystem Anwendung findet, wird ein wichtiges Kriterium eines Quantencomputers, die Skalierbarkeit, untersucht.

Ziel dieser Masterarbeit ist die Inbetriebnahme eines kommerziellen Diodenlasersystems sowie die Verteilung des erzeugten Laserlichts auf verschiedene Experimente. Es wird ein Diodenlasersystem² mit integrierter Verstärkerdiode verwendet. Für die Verteilung des Lichts werden zahlreiche optische Elemente (Spiegel, Strahlteiler, $\lambda/2$ -, $\lambda/4$ -Plättchen, Glasfaserkabel, etc.) benötigt. Zur Stabilisierung der Linienbreite muss der Laser gegen äußere Störungen, wie beispielsweise akustisches Rauschen, mechanische Vibrationen, Temperaturveränderungen, etc. geschützt werden.

Die Arbeit beginnt mit einer theoretischen Beschreibung des Lasers und dem Aufbau des von uns verwendeten Lasersystems in Kapitel 2. Anschließend wird in Kapitel 3 die Verwendung und die daraus resultierenden experimentellen Anforderungen des 729 nm Lasers diskutiert. Es folgt eine Einführung in die Funktionsweise eines Fabry-Pérot-Interferometers, welches im Verlauf dieser Arbeit als Frequenzreferenz dienen wird. Anschließend wird eine Beschreibung des Pound-Drever-Hall Verfahrens zur Stabilisierung der Laserfrequenz auf ein Fabry-Pérot-Interferometer gegeben. Die Güte der Stabilisierung ist hierbei durch eine Anzahl von Parametern gegeben, welche in Kapitel 4 beschrieben werden, limitiert. In Kapitel 5 wird der mechanische und optische Aufbau der optischen Resonatoren mittlerer und hoher Finesse erläutert. Ebenso werden die Aufbauten zur Kompensierung von Faserrauschen sowie zur Temperatur- und Frequenzstabilisierung in diesem Kapitel beschrieben. Durch die Stabilisierung der Laserfrequenz mit Hilfe von optischen Resonator kann zwar die Linienbreite des Lasers verkleinert werden (< 1 Hz), für die Langzeitstabilität wird jedoch ein Atom als bestmögliche Referenz für die Laserfrequenz benötigt. In Kapitel 5.4 wird erläutert, wie Langzeitdriften des Resonators hoher Finesse durch Frequenzstabilisierung auf einen Referenzlaser, welcher auf die Ionenfrequenz stabilisiert ist, kompensiert werden können. In Kapitel 6 erfolgt eine Charakterisierung des Systems, basierend auf den zuvor eingeführten Parametern in Zusammenhang mit den in Kapitel 3 eingeführten Zielsetzungen. Dabei werden die erreichte Linienbreite und die Langzeitstabilität des 729 nm Lasers diskutiert.

² Toptica TA100

Kapitel 2

Das 729 nm Lasersystem

Im folgenden Kapitel sind das grundlegende Funktionsprinzip eines Lasers sowie der spezielle Aufbau eines Diodenlasersystems beschrieben. Die Verwendung sowie die Stabilisierung des im Rahmen dieser Masterarbeit aufgebauten Lasers werden in Kapitel 3 bzw. 4 diskutiert.

2.1 Theoretische Beschreibung eines Lasers

Das Funktionsprinzip eines Lasers (*Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, wobei alle in dieser Masterarbeit vorkommenden Abkürzungen in Anhang A nachzulesen sind) beruht auf der Verstärkung von Licht mit Hilfe von stimulierter Emission. Die folgende theoretische Beschreibung ist an das Kapitel 2 des Buchs *Laserspektroskopie* von W. Demtröder angelehnt [18]. Zur Einführung der grundlegenden Prozesse werden Atome oder Moleküle mit einem Zwei-Niveau-System (siehe Abbildung 2.1) betrachtet. Bei der Wechselwirkung zwi-

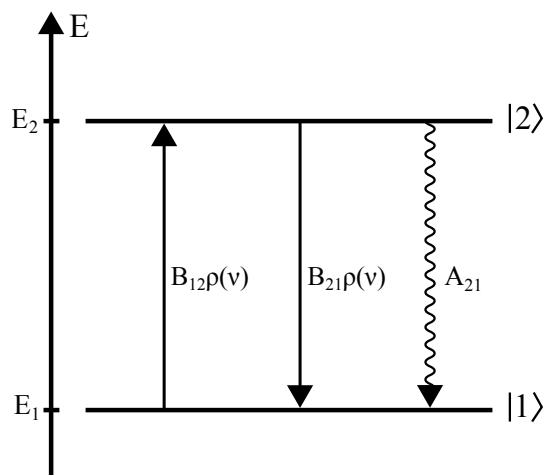


Abbildung 2.1: Zwei-Niveau-System eines Atoms oder Moleküls. Das Atom oder Molekül kann sich dabei im Zustand $|1\rangle$ mit der Energie E_1 oder im energetisch höheren Zustand $|2\rangle$ mit der Energie E_2 befinden.

schen Licht und Atomen können Photonen mit der Energie $h\nu = E_2 - E_1$ absorbiert werden, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und ν die Frequenz des Photons beschreiben. Das Atom wird durch die Absorption eines Photons mit der Energie $h\nu$ vom Zustand $|1\rangle$ in den energetisch höheren Zustand $|2\rangle$ angeregt. Die Wahrscheinlichkeit \mathcal{P}_{12} , dass ein Atom ein Photon pro Zeiteinheit absorbiert, ist proportional zur Anzahl der Photonen mit der Frequenz ν , also zur spektralen Energiedichte $\rho(\nu)$ des Strahlungsfeldes

$$\mathcal{P}_{12} = B_{12}\rho(\nu). \quad (2.1)$$

Der Faktor B_{12} wird als Einstein-Koeffizient der **stimulierten Absorption** bezeichnet.

Zur stimulierten Absorption gibt es einen umgekehrten Prozess, die stimulierte Emission. Dabei wird das Atom durch ein Photon im Strahlungsfeld veranlasst, vom Zustand $|2\rangle$ unter Emission eines Photons in den Zustand $|1\rangle$ überzugehen. Das emittierte Photon wird dabei in dieselbe Mode, aus der das stimulierende Photon stammt, ausgesendet. Das bedeutet, dass die so produzierten Photonen dieselbe Frequenz, Phase, Polarisation, Ausbreitungsrichtung, etc. wie das stimulierende Photon haben. Die Wahrscheinlichkeit \mathcal{P}_{21} für das stimulierte Aussenden von Photonen ergibt sich zu

$$\mathcal{P}_{21} = B_{21}\rho(\nu). \quad (2.2)$$

Der Faktor B_{21} wird als Einstein-Koeffizient der **stimulierten Emission** bezeichnet.

Beim dritten möglichen Prozess kann das Atom vom Zustand $|2\rangle$ ohne Einwirkung des umgebenden Strahlungsfeldes in den Zustand $|1\rangle$ wechseln. Die Emission des Photons kann in irgendeine Mode mit passender Frequenz jedoch in eine beliebige Richtung, mit beliebiger Phase, etc. geschehen. Ist die Wahrscheinlichkeit für alle Emissionsrichtungen gleich, so hängt die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{21,\text{sp}}$ für die spontane Emission lediglich von der internen Übergangswahrscheinlichkeit des Atoms ab

$$\mathcal{P}_{21,\text{sp}} = A_{21}. \quad (2.3)$$

A_{21} wird als Einstein-Koeffizient der **spontanen Emission**, oder auch als Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ bezeichnet. Im stationären Zustand muss die gesamte Absorptionsrate $N_1 B_{12}\rho(\nu)$ der gesamten Emissionsrate $N_2(A_{21} + B_{21}\rho(\nu))$ entsprechen

$$N_2(A_{21} + B_{21}\rho(\nu)) = N_1 B_{12}\rho(\nu). \quad (2.4)$$

Im thermischen Gleichgewicht folgen die Besetzungszahlen N_i der Energieniveaus E_i einer Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$N_i = \frac{g_i N}{Z} e^{\frac{-E_i}{k_B T}}. \quad (2.5)$$

Hierbei entspricht g_i dem statistischen Gewicht des Zustands E_i , N der Gesamtanzahl der Atome pro Volumen und Z der Zustandssumme. Durch Vergleichen der spektralen Energiedichte $\rho(\nu)$ mit der Planck'schen Strahlungsformel

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (2.6)$$

erhält man folgende Beziehungen der Einstein-Koeffizienten

$$B_{21} = \frac{g_2}{g_1} B_{12}, \quad (2.7)$$

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}. \quad (2.8)$$

Aus Gleichung (2.7) folgt, dass bei gleicher statistischer Gewichtung der Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die Einstein-Koeffizienten für stimulierte Absorption und Emission gleich sind: $B_{12} = B_{21}$. Aus Gleichung (2.8) folgt, dass die stimulierte Emissionswahrscheinlichkeit gerade dann größer als die spontane Emissionswahrscheinlichkeit ($B_{21}\rho(\nu) > A_{21}$) ist, wenn

$$\rho(\nu) > \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu. \quad (2.9)$$

Da der Faktor $8\pi\nu^2/c^3$ die spektrale Modendichte aus Gleichung (2.6) beschreibt, bedeutet diese Ungleichung, dass die stimulierte Emissionsrate stärker gegenüber der spontanen Emissionsrate wird, wenn sich mehr als ein Photon in der umgebenden Strahlungsfeldmode befindet. Aus diesem Grund verwendet man in der Praxis Resonatoren, welche nur wenige selektive Moden erlauben und dadurch die Anzahl der Photonen pro Mode erhöhen (siehe Kapitel 4.3).

Für eine Erhöhung der Anzahl von Photonen und somit für eine Verstärkung des Lichtfeldes muss die stimulierte Emission stärker als die stimulierte Absorption sein. Betrachtet man die Raten für die stimulierte Emission $N_2 B_{21}\rho(\nu)$ und die stimulierte Absorption $N_1 B_{12}\rho(\nu)$, so erreicht man $N_2 B_{21}\rho(\nu) > N_1 B_{12}\rho(\nu)$ mit der sogenannten **Besetzungsinversion** ($N_2 > N_1$, falls $g_1 = g_2$).

Wird nun Licht durch ein verstärkendes Medium geschickt, erhält man für die Intensität einer in z-Richtung laufenden Welle

$$I(\nu, z) = I_0 e^{-\alpha(\nu)z}, \quad (2.10)$$

wobei

$$\alpha(\nu) = (N_1 - \frac{g_1}{g_2} N_2) \sigma(\nu) \quad (2.11)$$

den frequenzabhängigen Absorptionskoeffizienten mit dem optischen Absorptionsquerschnitt $\sigma(\nu)$ des Mediums beschreibt. Für den Fall $\frac{g_1}{g_2} N_2 > N_1$ wird der Absorptionskoeffizient negativ und die Welle wird beim Durchlaufen des Mediums verstärkt. Der Term

$$G_0(\nu, z) = \frac{I(\nu, z)}{I_0} = e^{-\alpha(\nu)z} \quad (2.12)$$

wird als Verstärkungsfaktor bezeichnet. Durchläuft eine Welle nun ein aktives Medium der Länge L und fasst man alle auftretenden Verluste (γ) wie beispielsweise Absorption im begrenzenden Medium, Beugung oder Streuung zusammen, erhält man für die Nettoverstärkung pro Umlauf

$$G = e^{-2\alpha(\nu)L - \gamma}. \quad (2.13)$$

Daraus erhält man die sogenannte **Schwellwertbedingung**

$$\Delta N = \frac{g_1}{g_2} N_2 - N_1 > \Delta N_s = \frac{\gamma}{2\sigma(\nu)L}, \quad (2.14)$$

mit der minimalen Besetzungsinversionsdichte ΔN_s . Die Intensität steigt dabei für $\Delta N > \Delta N_s$ so lange an, bis sich der durch die ansteigende stimulierte Emissionsrate stationäre Zustand

$\Delta N = \Delta N_s$ einstellt. Erstellt man die Bilanzgleichungen für ein Zwei-Niveau-System bei gleicher statistischer Gewichtung $g_1 = g_2 \rightarrow B_{12} = B_{21}$, erhält man:

$$\frac{dN_1}{dt} = (N_2 - N_1)B_{21}\rho(\nu) + N_2A_{21} \quad (2.15)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -(N_2 - N_1)B_{21}\rho(\nu) - N_2A_{21} \quad (2.16)$$

Im stationären Zustand ($\frac{dN_1}{dt} = -\frac{dN_2}{dt} = 0$) folgt anhand voriger Gleichungen für das Verhältnis N_1/N_2 der Besetzungszahldichten:

$$\frac{N_1}{N_2} = 1 + \frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\nu)} \geq 1 \quad (2.17)$$

In einem Zwei-Niveau-System kann die stationäre Besetzungsinversion $\Delta N_{stat} = N_2 - N_1$ aufgrund der aus Ungleichung (2.17) folgenden Relation $N_2 - N_1 \leq 0$ also nie positiv werden und somit keine Besetzungsinversion erreicht werden.

Für die Realisierung eines Lasers betrachtet man aus diesem Grund Systeme mit mehreren möglichen Energieniveaus. In Abbildung 2.2 ist ein realistisches Vier-Niveau-Systems dargestellt. Dabei beschreibt die Pumprate P , die Anzahl der Atome, die pro Zeiteinheit und Volumen

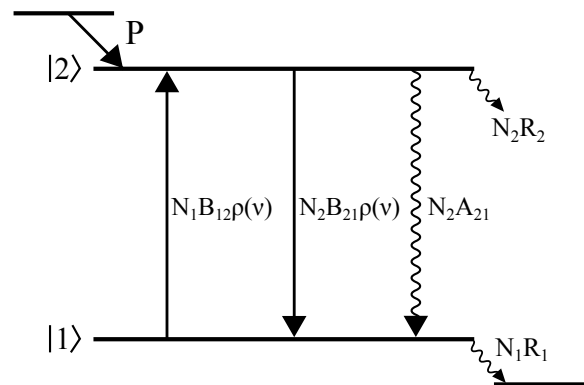


Abbildung 2.2: Abstraktes Vier-Niveau-System eines Atoms oder Moleküls. Das Funktionsprinzip ist das gleiche wie beim Zwei-Niveau-System (Abb. 2.1), wobei der Zustand $|2\rangle$ zusätzlich über einen dritten Zustand mit der Pumprate P befüllt werden kann. Die Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ können über zusätzliche Zerfallskanäle (N_1R_1 , N_2R_2) entleert werden.

ins Niveau $|2\rangle$ angeregt werden, N_i die Besetzungsdichten der Niveaus $|i\rangle$, $\rho(\nu)$ die spektrale Energiedichte des Strahlungsfeldes und N_iR_i die Relaxationsraten der durch Stöße oder spontane Emission in andere Niveaus abgeregten Atome. Für ein Vier-Niveau-System erhält man unter der Annahme einer gleichen statistischen Gewichtung ($B_{21} = B_{12}$) folgende Bilanzgleichungen:

$$\frac{dN_1}{dt} = (N_2 - N_1)B_{21}\rho(\nu) + N_2A_{21} - N_1R_1 \quad (2.18)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = P - (N_2 - N_1)B_{21}\rho(\nu) - N_2A_{21} - N_2R_2 \quad (2.19)$$

Im stationären Betrieb ($\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$) kann durch Addition der vorigen Gleichungen die folgende Relation für die Pumprate hergeleitet werden:

$$P = N_1R_1 + N_2R_2 \quad (2.20)$$

Durch Multiplikation von Gleichung (2.18) mit R_2 und Gleichung (2.19) mit R_1 , anschließender Subtraktion und Verwendung von Gleichung (2.20) erhält man für die stationäre Besetzungsinversion $\Delta N_{stat} = N_2 - N_1$:

$$\Delta N_{stat} = \frac{(R_1 - A_{21})P}{B_{21}\rho(\nu)(R_1 + R_2) + A_{21}R_1 + R_1R_2} \quad (2.21)$$

Für eine positive Besetzungsinversion $\Delta N_{stat} > 0$ benötigt man also ein Medium für das $R_1 > A_{21}$ gilt. In einem realen Lasersystem trägt auch die stimulierte Emission zur Bevölkung des Energieniveaus $|1\rangle$ bei, weshalb die strengere Bedingung $R_1 > A_{21} + B_{21}\rho(\nu)$ erfüllt sein muss. Die Entleerung des unteren Niveaus $|1\rangle$ muss also schneller stattfinden, als dessen Befüllung durch spontane sowie stimulierte Emission. Zerfällt das Niveau $|1\rangle$ schneller als $A_{21} + B_{21}\rho(\nu)$, kann in einem Vier-Niveau-System stets Besetzungsinversion erreicht werden.

2.2 Arten von Lasersystemen

Zusammenfassend besteht ein Lasersystem grundlegend aus einem **Pumpmechanismus**, einem **Resonator** und einem **verstärkendem Medium**. Es sind heute eine Vielzahl verschiedener Lasersysteme erhältlich. Im Folgenden werden diese System anhand der Anregungsart des Lasermaterials unterschieden [19] :

- optisch gepumpte Laser (Anregung mit Blitzlampen, kontinuierliche Lampen, LEDs, oder andere Laser)
- durch Elektronenstrahl angeregte Laser (Sonderform von Gas- bzw. Halbleiterlaser)
- Gasentladungslaser (Glimm-, Bogen-, oder Hohlkathodenentladung)
- Injektions- oder Diodenlaser (Anregung durch Stromdurchgang im Halbleitermaterial)
- chemische Laser (Pumpen durch chemische Reaktion)
- gasdynamische Laser (Inversionserzeugung durch Expansion eines heißen Gases)
- nuklear gepumpte Laser (Anregung durch Strahlung aus nuklearen Reaktionen)

Diese Lasertypen unterscheiden sich in Eigenschaften wie Wellenlängenbereich (10 nm bis 1 mm), gepulste oder kontinuierliche Emission, erreichbare Frequenzstabilität, Durchstimmbarkeit, kontinuierliche Leistung, gepulste Spitzenleistung oder kürzeste Pulsdauer.

Die Experimente, für die das Lasersystem im Rahmen dieser Arbeit aufgebaut wird, benötigen einen Laser mit kontinuierlicher Strahlungsemission bei einer Wellenlänge von etwa

$\lambda \approx 729 \text{ nm}$. In der Vergangenheit wurden für diese Wellenlänge meist optisch gepumpte Titanium-Saphir Laser in der Gruppe für Quantenoptik und Spektroskopie verwendet. Die Vorteile dieses Systems sind die enorme Durchstimmbarkeit (650 nm bis 1050 nm) und eine hohe Frequenzstabilität ($\sim 10 \text{ kHz}$, mit Stabilisierung auf einen externen Resonator $\sim 1 \text{ Hz}$ [13]).

Mittlerweile gibt es auch Laserdioden im Bereich von 729 nm. Diese Systeme bieten einen platzsparenden und kostengünstigen Aufbau. Vergleicht man beispielsweise, das in dieser Arbeit verwendete Diodenlasersystem mit Verstärker mit einem Grundriss von etwa $35 \text{ cm} \times 21 \text{ cm}$ und einem Preis von rund 40.000 € mit einem modernen Ti:Sa¹ mit einem Grundriss von etwa $70 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ und einem Preis von etwa 120.000 € , so ist das Diodenlasersystem etwa halb so groß und zwei Drittel billiger (wobei zu beachten ist, dass der Ti:Sa Laser bis zu achtfacher Ausgangsleistung besitzt). Auch die Wartung und der Austausch von Bauteilen erweist sich in der Praxis oft als einfacher gegenüber einem Titanium-Saphir Lasersystem. Die erreichbare optische Leistung von Laserdioden ($\sim 30 \text{ mW}$) ist aber kleiner als die des derzeit verwendeten Titanium-Saphir Lasersystems ($\sim 500 \text{ mW}$) [13]. Diese Leistungsdifferenz kann durch die Verwendung eines Diodenverstärkers kompensiert werden. Im Rahmen dieser Masterarbeit wird ein Diodenlasersystem, bestehend aus einem Diodenlaser² und einem Diodenverstärker³ (TA engl. *Tapered Amplifier* mit $\sim 500 \text{ mW}$) verwendet.

2.3 Der 729 nm Diodenlaser

Das verwendete Lasersystem⁴ setzt sich zusammen aus einer Laserdiode⁵ mit externem Resonator, einem sogenannten ECDL² (*External cavity diode laser*), sowie einer Verstärkerdiode³ (TA) zur Erzeugung der benötigten Lichtleistung. Im folgenden Kapitel ist das Funktionsprinzip von Laserdioden sowie von Diodenlasersystemen in Littrow-Konfiguration zusammengefasst.

Wie bereits im vorigen Kapitel beschrieben ist, wird für die Realisierung eines Lasers ein spezielles Termschema und ein geeigneter Pumpmechanismus benötigt. Das Funktionsprinzip von Laserdioden soll hier in Anlehnung an die Fachliteratur *Laserspektroskopie* Kapitel 5.6 von W. Demtröder [18] und *Laser* Kapitel 10 von J. Eichler, H. J. Eichler [19] erläutert werden.

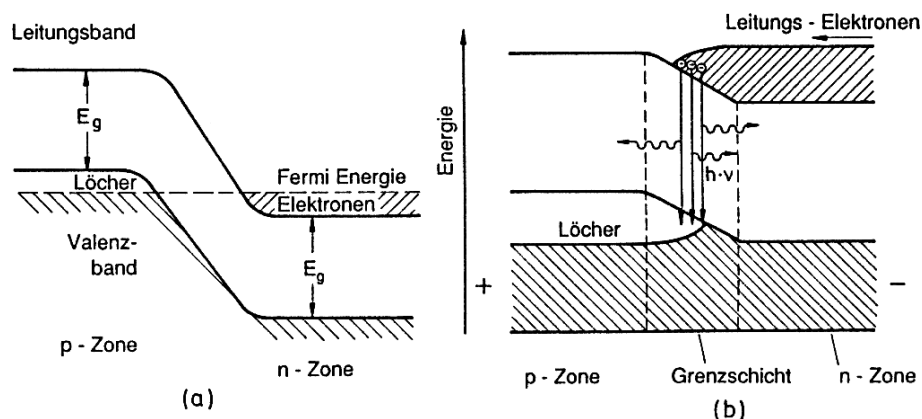


Abbildung 2.3: Energieschema an der pn-Schicht einer Laserdiode. (a) Ohne angelegter Spannung. (b) Mit angelegter Spannung in Durchlassrichtung. Quelle [18]

¹ M squared SolsTiS mit bis zu 4 W Ausgangsleistung ² Toptica DL100 für 729 nm ³ Toptica TA für 729 nm
⁴ Toptica TA100 ⁵ Toptica LD-0730-0040-AR-1

Die Energiezustände in Halbleitern werden durch breite Energiebänder beschrieben, wodurch die Übergänge im Vergleich zu typischen atomaren oder molekularen Übergängen wesentlich breitbandiger sind. Bei einem p-Leiter ist das energetisch tiefere (Valenz-) Band mit positiven Löchern und bei einem n-Leiter ist das Valenzband mit negativen Elektronen dotiert. Die Bänder sind dabei etwa bis zur Fermienergie mit Ladungsträgern befüllt. Werden diese beiden Materialien eng zusammen gebracht, entsteht eine Diode mit pn-Übergang. Dabei diffundieren solange Elektronen in die p-Zone und Löcher in die n-Zone bis die Fermikanten des p-Leiters und des n-Leiters zusammenfallen (siehe Abbildung 2.3 (a)). Wird am pn-Übergang eine Spannung in der Größe der Energielücke ($eU \approx E_g$) in Durchlassrichtung angelegt, so können Elektronen vom Leitungsband mit Löchern im Valenzband zur Rekombination gebracht werden (siehe Abbildung 2.3 (b)). Die bei diesem spontanen Zerfall frei werdende Energie wird in Form von Photonen abgestrahlt. Die Wellenlänge dieser Photonen wird von der Energielücke zwischen Leitungs- und Valenzband bestimmt ($h\nu \approx E_g$). Durch geeignete Fabrikation kann ein Großteil der spontan emittierten Photonen an den Grenzschichten der Diode reflektiert werden. Das Strahlungsfeld in diesem Resonator wird so stark, dass die Rekombination hauptsächlich durch bereits bestehende Photonen stimuliert wird. Ab dem sogenannten Schwellenstrom herrscht Besetzungsinversion und die stimulierte Emission überwiegt, wodurch die Diode zu lasen beginnt.

Mit der Auswahl der verwendeten Halbleitermaterialien und deren Dotierung kann die Wellenlänge der emittierten Photonen grob bestimmt werden. Die Feinabstimmung der emittierten Wellenlänge geschieht durch das Zusammenspiel des Verstärkungsprofils der Laserdiode mit den Eigenmoden des internen Resonators (siehe Abbildung 2.4). Der interne Resonator entsteht durch die Reflexion an den Endflächen der Laserdiode. Die Resonatordimension (typischerweise im Bereich von $L \approx 1$ mm) gibt dabei den Modenabstand von etwa $\Delta\nu_{\text{FSB}} = \frac{c}{2nL} \approx 50$ GHz vor (mit einem Brechungsindex von $n = 3$, siehe auch Kapitel 4.3.2). Mit einer Durchstimmbarkeit $\Delta\nu_{\text{D}} \approx 10$ THz [20], welche etwa die Breite des Verstärkungsprofils angibt, passen etwa $m \approx \Delta\nu_{\text{D}}/\Delta\nu_{\text{FSB}} \approx 200$ Moden in das Verstärkungsprofil der Diode (siehe Abbildung 2.4).

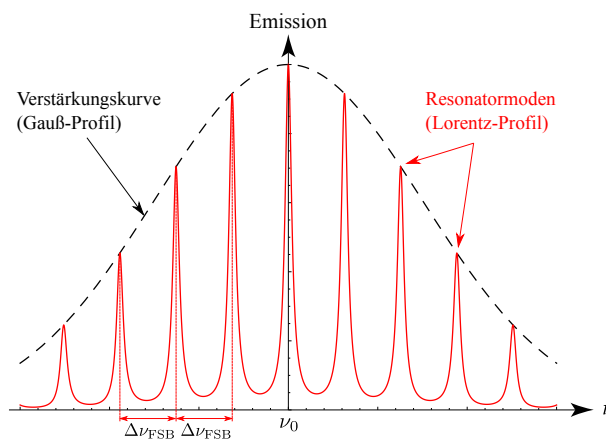


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung des spektralen Verstärkungsprofils eines Lasers mit longitudinalen Resonatormoden einer Laserdiode um die Zentrumsfrequenz ν_0 und Modenabstand $\Delta\nu_{\text{FSB}}$.

Zwar lässt sich die emittierte Wellenlänge im freilaufenden Betrieb über den Pumpstrom und die Temperatur einstellen, jedoch treten dabei häufig Modensprünge zwischen benachbarten Resonatormoden auf, welche im Betriebsmodus zu Problemen führen können. Damit Laser-

dioden im Einmodenbetrieb ($m = 1$) arbeiten, werden die Dioden oft in Littrow-Konfiguration [18] aufgebaut.

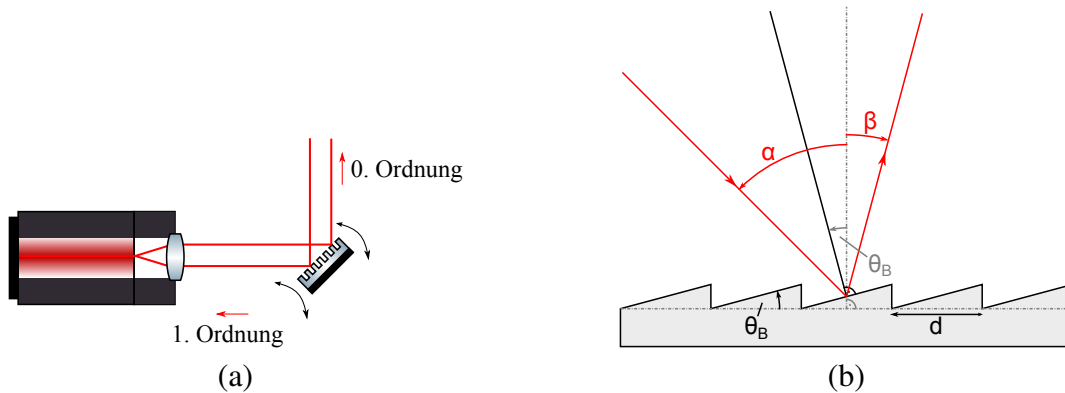


Abbildung 2.5: (a) Skizze einer Laserdiode im Littrow-Aufbau. Ein Teil des Lichts verlässt die Diode und wird durch eine Linse kollimiert. Der kollimierte Laserstrahl wird auf ein drehbares Gitter geschickt, wobei die nullte Beugungsordnung nach oben und die erste Beugungsordnung zurück in die Laserdiode reflektiert wird. Die gitterzugewandte Seite ist dabei antireflektierend beschichtet. (b) Reflexionsschema eines Blaze-Gitters mit Blazewinkel Θ_B und Gitterkonstante d . Der ein- bzw. ausfallende Strahl besitzt einen Winkel α bzw. β bezüglich der makroskopischen Oberflächennormalen. Abbildung (a) wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

In Littrow-Konfiguration (siehe Abbildung 2.5 (a)) verlässt ein Teil des Lichts die Laserdiode und wird mit Hilfe einer Linse kollimiert. Der kollimierte Strahl wird anschließend auf ein Gitter gesendet, wobei die erste Beugungsordnung zurück in die Laserdiode gekoppelt wird. Damit dieses Licht wieder auf effiziente Weise in die Diode eintreten kann, wird die gitterzugewandte Seite der Diode antireflektierend beschichtet. Das Gitter besitzt eine sägezahnartige Oberfläche wie in Abbildung 2.5 (b) dargestellt und wird als Blaze-Gitter bezeichnet. Abhängig vom Zahnabstand d , aber unabhängig von der Steigung Θ_B der Sägezähne entsteht ein Gangunterschied zwischen dem einfallenden und dem ausfallenden Strahl. Für konstruktive Interferenz muss dieser Gangunterschied einem Vielfachen n der Wellenlänge λ entsprechen und es gilt

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{n\lambda}{d}, \quad (2.22)$$

wobei α bzw. β die Ein- bzw. Ausfallswinkel, n die Beugungsordnung, λ die Wellenlänge und d die Gitterkonstante beschreiben. Durch die Steigung Θ_B der Sägezähne kann die Intensitätsverteilung zwischen 0. und 1. Ordnung optimiert werden. Im Littrow-Aufbau gilt für die 1. reflektierte Ordnung $\beta = \alpha$, $n = 1$ und man erhält

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2d}. \quad (2.23)$$

Anhand dieser Gleichung wird ersichtlich, dass die reflektierte Wellenlänge durch Drehung des Gitters eingestellt werden kann. Die Frequenz des Lasers kann so über den gesamten Verstärkungsbereich der Laserdiode verstimmt werden. Das im DL100 (Diodenlaser) verwendete Gitter besitzt eine Liniendichte von 1800 mm^{-1} und einer Gitterkonstante von $d = 556 \text{ nm}$. Damit folgt ein Beugungswinkel von $2\alpha = 82.94^\circ$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 729.147 \text{ nm}$.

Durch die Reflexion der ersten Ordnung am Gitter entsteht ein externer Resonator zwischen Gitter und der Rückseite der Laserdiode. Dieser Resonator ist weit größer ($L_R \approx 2$ cm) als der interne Resonator der Diode ($L_D \approx 1$ mm). Daraus folgt ein kleinerer freier Spektralbereich für den externen Resonator von $\Delta\nu_{\text{FSB}} = \frac{c}{2nL_R} \approx 7.5$ GHz im Vergleich zu $\Delta\nu_{\text{FSB}} \approx 50$ GHz des internen Resonators.

Des Weiteren ist die reflektierte Intensität I_{refl} des Gitters aufgrund von Interferenzeffekten wellenlängenabhängig [18]

$$I_{\text{refl}} = I_0 R \frac{\sin^2(N\phi/2)}{N^2 \sin^2(\phi/2)}, \quad (2.24)$$

wobei I_0 die einfallende Intensität, R die Reflektivität des Gitters, N die Anzahl der ausgeleuchteten Furchen und $\phi = 4d \sin(\alpha)/\lambda$ die Phase zwischen zwei Teilwellen beschreibt.

Die spektrale Emission des Diodenlasers setzt sich aus folgenden einzelnen Komponenten zusammen: dem Verstärkungsprofil der Laserdiode, den Moden des internen und externen Resonators und der frequenzabhängigen Gitterreflexion. Eine schematische Darstellung dieser einzelnen Komponenten ist in Abbildung 2.6 skizziert. Da durch die Drehung des Gitters um den Winkel α die Wellenlänge verändert wird, muss zur Verhinderung von Modensprüngen zur Drehung des Gitters gleichzeitig die Länge des Resonators angepasst werden.

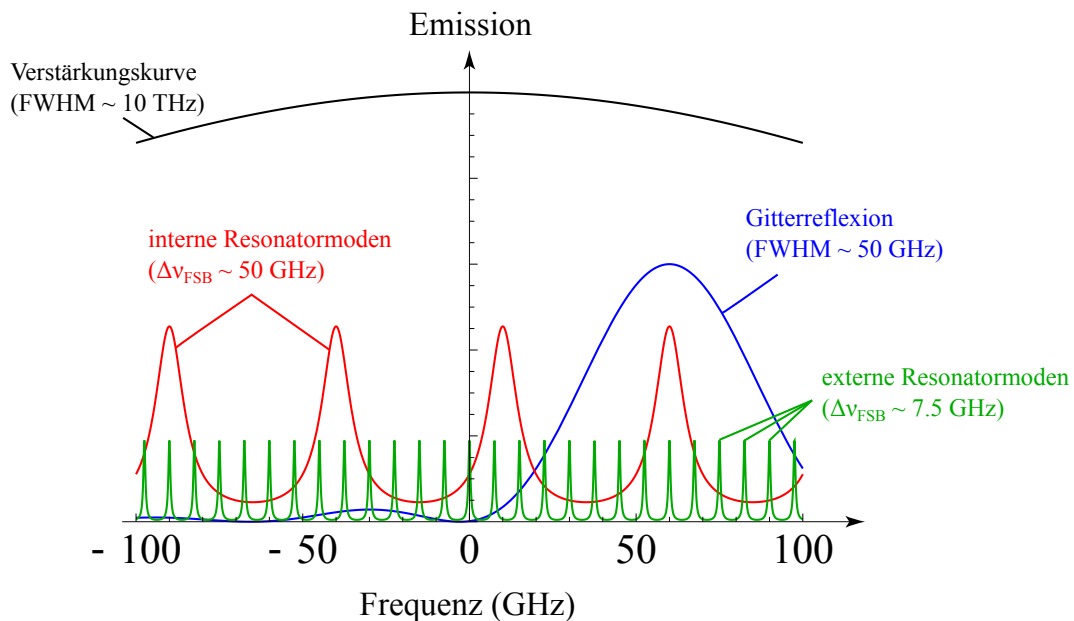


Abbildung 2.6: Frequenzabhängige Emission des DL100 Diodenlasers.

Das in dieser Arbeit verwendete Diodenlasersystem ist speziell für den Einmodenbetrieb konstruiert und erreicht einen modensprungfreien Durchstimmbereich von ~15 GHz [20]. Eine Kombination der in Abbildung 2.6 dargestellten Verstärkungsprofile ist in Abbildung 2.7 zusammengefasst. Dabei können nur jene Moden des Diodenlasers anschwngen, welche stärker als die Laserschwelle sind.

Im Jahr 1958 veröffentlichten Schawlow und Townes [22, 23] ein unteres Limit für die Frequenzstabilität von Lasersystemen. Dabei wird angenommen, dass das System durch den Einfluss der spontanen Emission begrenzt ist. Dieses Limit kann durch folgende Gleichung

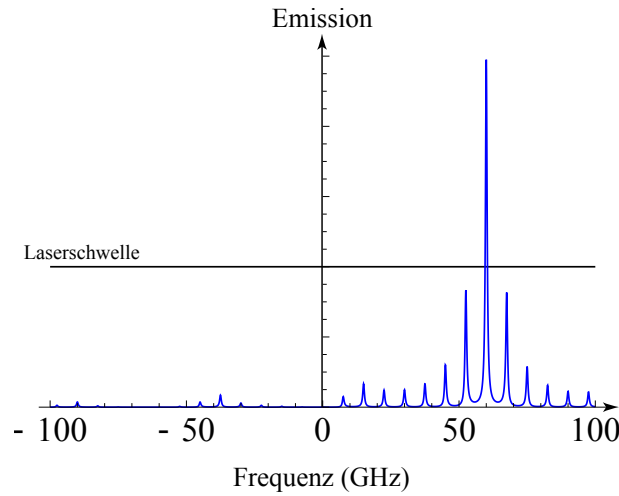


Abbildung 2.7: Kombination der frequenzabhängigen Verstärkungsprofile des DL100 Diodenlasers.

abgeschätzt werden [18, 19]

$$\Delta\nu_L = \frac{\pi h\nu_L (\delta\nu_R)^2 (N_{\text{sp}} + N_{\text{th}} + 1)}{P_L}, \quad (2.25)$$

wobei ν_L die mittlere Emissionsfrequenz des Lasers, $\delta\nu_R$ die Bandbreite des Resonators, N_{sp} und N_{th} die Besetzungsdichten der spontan beziehungsweise thermisch emittierten Photonen und P_L die emittierte Lichtleistung beschreibt. Bei Raumtemperatur ist $N_{\text{th}} \ll 1$ und es wird mindestens ein spontan emittiertes Photon benötigt $N_{\text{sp}} \geq 1$, um eine Photonenlawine zu starten. Die Linienbreite $\Delta\nu_L$ sinkt mit steigender Laserleistung P_L , da die spontane Emission relativ zur stimulierten Emission schwächer wird. Die Linienbreite $\delta\nu_R$ des Resonators spielt eine wichtige Rolle, da diese bestimmt, wie viele der spontan emittierten Photonen verstärkt werden. Die Bandbreite $\delta\nu_R$ des Resonators berechnet sich durch das Reflexionsvermögen R der Spiegel und der optischen Länge L (siehe auch Kapitel 4.3.4 und 4.3.3):

$$\delta\nu_R = \frac{(1 - R)c}{2\pi L\sqrt{R}}. \quad (2.26)$$

Daraus erhält man eine Abschätzung für die untere Grenze der Laserlinienbreite, das sogenannte Schawlow-Townes-Limit, von

$$\Delta\nu_L \geq \frac{\pi h\nu_L (\delta\nu_R)^2}{P_L}. \quad (2.27)$$

Für eine 729 nm Laserdiode mit den Parametern $\nu_L = 411 \cdot 10^{12}$ Hz, $P_L = 30$ mW, $L = nl = 3 \cdot 300 \mu\text{m}$ und $R = 0.3$ erhält man ein unteres Limit von

$$\Delta\nu_L(729\text{nm Laserdiode}) \approx 100 \text{ kHz}. \quad (2.28)$$

Mit einer freilaufenden Diode ist dieses Limit aufgrund der starken thermischen und mechanischen Einflüsse nur schwierig erreichbar. In der Regel liegt die Linienbreite $\Delta\nu_L$ freilaufender Dioden im Bereich von 100 MHz [20].

Für den ECDL in Littrow-Konfiguration errechnet sich die Schawlow-Townes-Limit durch den zusätzlichen Resonator mit $L = 2$ cm und $R = 0.6$ zu $\Delta\nu_L(729\text{nm Diodenlaser}) \approx 43$ Hz.

In der Praxis ist auch diese Grenze aufgrund der thermischen und mechanischen Störungen schwierig zu realisieren. Im Vergleich zur Schawlow-Townes-Grenze beträgt die erreichte Linienbreite eines kommerziellen Diodenlasers $\Delta\nu_L \approx 1$ MHz [20]. Dies stellt die intrinsische Breite des Systems dar. Durch aktive Stabilisierung mit elektrischen Regelkreisen kann die Linienbreite des Lasers in den gewünschten Bereich von < 10 Hz gebracht werden. Da bei dieser Stabilisierung externe optische Resonatoren verwendet werden (siehe Kapitel 4), gilt die Annahme für den Resonator im Schawlow-Townes-Limit nicht mehr und die hier berechnete Grenze ~ 43 Hz kann unterschritten werden. Für die aktive Stabilisierung bietet das Lasersystem die Möglichkeit, das Gitter mittels Piezoelement zu drehen und den Pumpstrom zu modulieren.

2.4 Aufbau des Lasersystems

Der schematische Aufbau des 729 nm Lasersystems ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Der Diodenlaser selbst ist nach Abbildung 2.5 (a) in Littrow-Konfiguration konstruiert. Mittels piezoelektrischem Element lässt sich das Gitter des Littrow-Aufbaus steuern. Zusätzlich sind eine Temperaturstabilisierung mit Peltierelementen und ein Anschluss für die Strommodulation integriert.

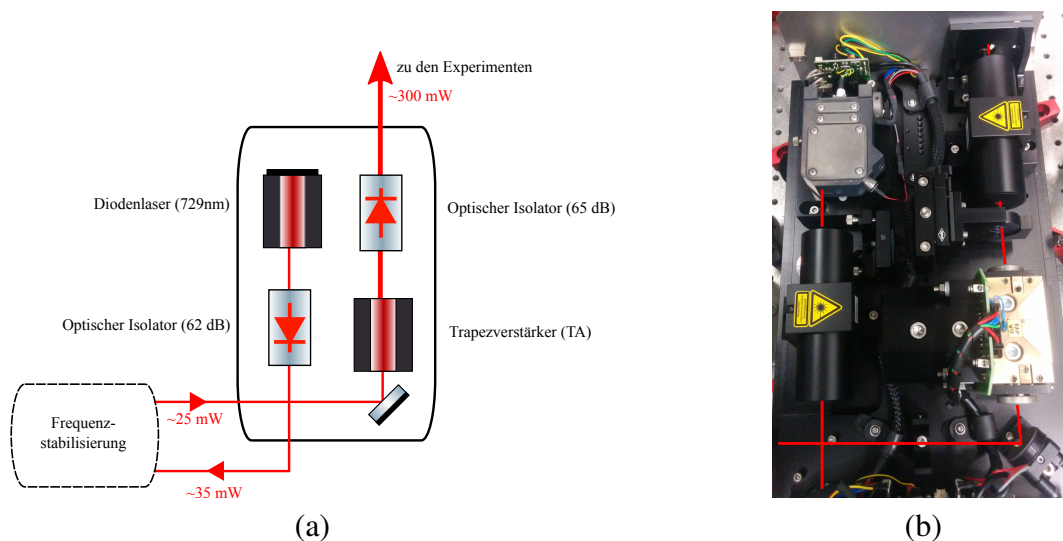


Abbildung 2.8: (a) Schematischer Aufbau des 729 nm Lasersystems. Die Laserdiode (Toptica DL100) erzeugt einen Laserstrahl der durch einen optischen Isolator (62 dB) zum Stabilisierungsaufbau geschickt wird. Das dort stabilisierte Laserlicht wird durch den TA verstärkt und über einen weiteren optischen Isolator (65 dB) zu den Experimenten geleitet. (b) Fotoaufnahme des Toptica TA100 Lasersystems. Abbildung (a) wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

Durch Reflexionen an optischen Bauteilen, wie Strahlteiler, $\lambda/2$ -Plättchen, etc. nach der Diode können zusätzliche Resonatoren entstehen. Diese Resonatoren können zu unerwünschten Etalonneffekten führen. Zur Verminderung dieser optischen Rückreflexe zur Laserdiode wird ein optischer Isolator mit einer Extinktion von 62 dB nach der Diode platziert. Der Laserstrahl mit ~ 35 mW Leistung wird dann in einem externen Aufbau frequenzstabilisiert. Das dort stabilisierte Licht (~ 25 mW) wird in den Trapezverstärker (TA engl. *Tapered Amplifier*) gekoppelt.

Im TA wird die Leistung des Laserstrahls in einer trapezförmigen Verstärkerdiode vervielfacht [20, 24]. Die Enden dieser Verstärkerdiode sind antireflektierend beschichtet, wodurch keine Lasertätigkeit ohne Pumpstrahl entstehen kann. Die Verstärkung des spontan emittierten Lichts (ASE engl. *amplified spontaneous emission*) ist um ~25 dB schwächer als die Leistung des verstärkten Injektionslichts [25]. Im Vergleich zum verstärkten Injektionslicht besitzt das spontan emittierte Licht eine andere Divergenz, wodurch bei Einkopplung des Laserstrahls in eine Glasfaser der ASE-Anteil weiter reduziert wird. Diese Diode ist jedoch sehr empfindlich gegenüber in Emissionsrichtung eingestrahlt Licht und kann von nur kleinen zurückgekoppelten Lichtleistungen zerstört werden. Aus diesem Grund ist auch nach dem TA ein optischer Isolator (65 dB) platziert. Es ist darauf zu achten, dass der TA nicht ohne Pumpstrahl betrieben wird. Nach dem Isolator beträgt die erreichte Lichtleistung ~300 mW.

2.5 Systemdaten

Im Folgenden werden die wichtigsten Eckdaten des 729 nm Lasersystems zusammengefasst. Die untenstehenden Tabellen enthalten die Werksdaten der Toptica Qualitätskontrolle sowie aktuelle Leistungsdaten. Die Daten des Diodenlasers gelten für den Fall, dass die Laserdiode Littrow-stabilisiert ist. Die in den Tabellen 2.1 und 2.2 mit * gekennzeichneten Felder weisen daraufhin, dass diese Daten nicht nachgemessen wurden. In Abbildung 2.9 ist die Strom-Leistungs-Kennlinien des ECDL dargestellt.

Tabelle 2.1: Leistungsdaten der Laserdiode im DL100

Diodenlaser (DL100)	Werksdaten	aktuelle Daten
Wellenlänge	729.0 nm	729.147 nm
Betriebsleistung	44.0 mW	44.2 mW
Betriebsstrom	94 mA	92.6 mA
Betriebstemperatur	25.0 °C	24.6 °C
Laserschwelle	28 mA	26 mA
Leistung nach Isolator	34.6 mW	35.2 mW
Durchstimrbarkeit	719.3-734.7 nm	*

Tabelle 2.2: Leistungsdaten des Trapezverstärkers (TA)

Verstärker (TA)	Werksdaten	aktuelle Daten
Betriebsleistung	500 mW	*
Betriebsstrom	1220 mA	1220 mA
Betriebstemperatur	20.0 °C	19.5 °C
Pumpleistung	34.6 mW	25 mW
Leistung nach Isolator	440 mW	300 mW

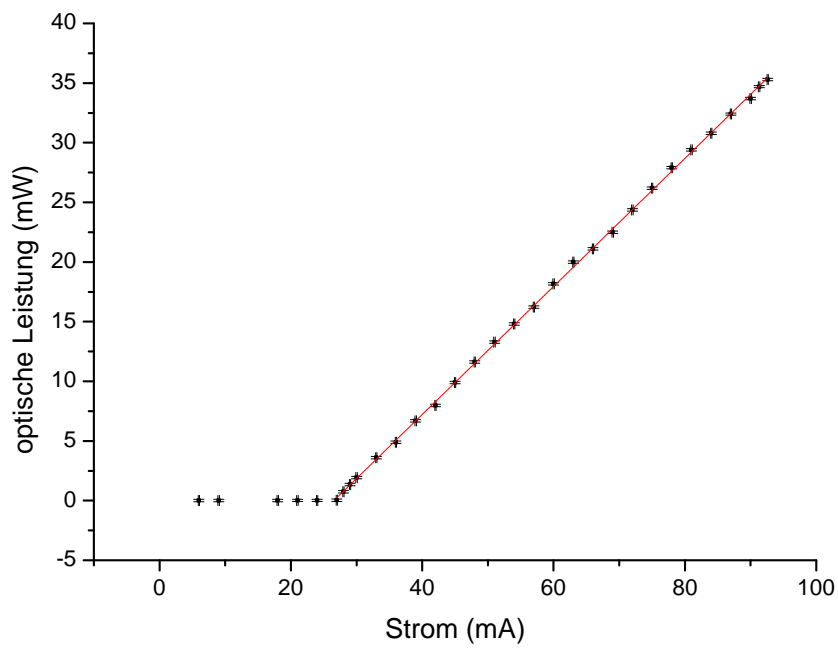


Abbildung 2.9: Strom-Leistungs-Kennlinie des DL100 Diodenlasers. Ab der Laserschwelle zeigt sich ein linearer Anstieg der Leistung mit steigendem Strom. Aus der linearen Regression errechnet sich eine Laserschwelle von $I_S = 26(3)$ mA.

Kapitel 3

Verwendung des 729 nm Lasers

Der 729 nm Laser wird unter anderem zur Zustandsmanipulation und zur Kühlung von $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen in Paulfallen verwendet. Im folgenden Kapitel werden die Verwendung des Lasers und die daraus resultierenden Anforderungen an die Linienbreite, die optische Leistung und die Stabilität des Lasersystems im Detail diskutiert.

3.1 Das Termschema des $^{40}\text{Ca}^+$ Ions

Die Gruppe für Quantenoptik und Spektroskopie an der Universität Innsbruck arbeitet mit einfach positiv geladenen ^{40}Ca Atomen. Die $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen besitzen ein Valenzelektron, welches wasserstoffartige Energiezustände einnehmen kann. Ein vereinfachtes Termschema mit den entsprechenden Übergangswellenlängen ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Der in dieser Arbeit stabilisierte 729 nm Laser treibt den Übergang zwischen dem $4^2S_{1/2}$ und dem $3^2D_{5/2}$ Niveau.

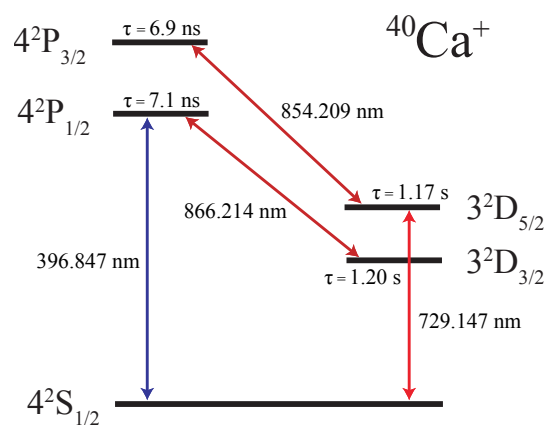


Abbildung 3.1: Vereinfachtes Energieschema von $^{40}\text{Ca}^+$ mit den untersten fünf Energieniveaus. Der 729 nm Laser treibt den Übergang zwischen dem Grundzustand $4^2S_{1/2}$ und dem metastabilen $3^2D_{5/2}$ Zustand. Die Lebensdauer des $3^2D_{5/2}$ Zustands beträgt $\tau \approx 1.17 \text{ s}$. Der 854 nm Laser dient zum Rückpumpen und zur Effizienzsteigerung der Seitenbandkühlung. Der 866 nm Laser wird zum Entleeren des $3^2D_{3/2}$ Zustands verwendet. Der 397 nm Laser wird zur Dopplerkühlung und zur Zustandsdetektion benötigt. Die Lebensdauer der Zustände $4^2P_{1/2}$ bzw. $4^2P_{3/2}$ beträgt $\tau \approx 7.1 \text{ ns}$ bzw. $\tau \approx 6.9 \text{ ns}$. Die Übergangswellenlängen und Lebensdauern wurden zitiert aus [26–28].

3.2 Die Ionenfalle

Mithilfe der Coulomb-Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen und elektro-magnetischen Feldern können die $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen gefangen werden. Wolfgang Paul erkannte, dass man mit Hilfe von Feldern im Radiofrequenzbereich (RF) Ionen nach ihrer Masse selektieren kann [15]. Auf dieser Grundlage wurden dann sogenannte Paulfallen zur dreidimensionalen Speicherung von geladenen Teilchen entwickelt [16, 17]. Die Bewegungsbahn der Ionen kann näherungsweise in eine harmonische Bewegung mit den Frequenzen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (Säkularbewegung) und eine schnelle amplitudenmodulierte Bewegung mit Frequenz Ω_{RF} unterteilt werden. Typische Größenordnungen für die Treiberfrequenz Ω_{RF} und die Säkularbewegung ω sind $\Omega_{\text{RF}}/2\pi \approx 20$ MHz bzw. $\omega/2\pi \approx 3$ MHz. Der in dieser Arbeit stabilisierte 729 nm Laser wird für eine Untergruppe aufgebaut, welche sich mit der Entwicklung von zweidimensionalen Oberflächenfallen beschäftigt. Diese Fallen werden mit Technologien aus der Halbleiterindustrie hergestellt. Dabei werden sowohl lineare Fallen [1] als auch zweidimensionale Gitterstrukturen [29, 30] als mögliche, zukünftige Kandidaten für Ionenfallen untersucht.

3.3 Quanteninformationsverarbeitung mit $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen

Wie klassische Computer besitzen auch Quantencomputer eine kleinste Informationseinheit, das sogenannte Qubit (Quantenbit). Theoretisch wird dabei die Information in einem Zwei-Niveau Zustand gespeichert. Ein Qubit kann durch eine beliebige Superposition $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ der beiden Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ beschrieben werden. Wobei hier α und β komplexe Zahlen sind, für die aufgrund der Wahrscheinlichkeitsnormierung gilt $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

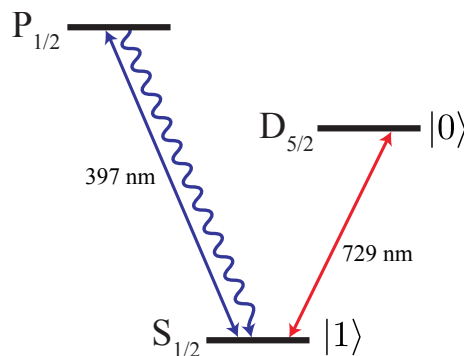


Abbildung 3.2: Qubit Zustände im $^{40}\text{Ca}^+$ Ion. Das Niveau $S_{1/2}$ beschreibt dabei den logischen Zustand $|1\rangle$ und das Niveau $D_{5/2}$ den logischen Zustand $|0\rangle$. Der 397 nm Übergang wird zur Zustandsdetektion verwendet.

Der metastabile Zustand $D_{5/2}$ des $^{40}\text{Ca}^+$ Ions ist mit einer Lebensdauer von $\tau \approx 1.17$ s ein geeigneter Kandidat für die Speicherung der Qubit-Information. In Abbildung 3.2 ist das Zwei-Niveau System mit dem Grundzustand $S_{1/2} = |S\rangle = |1\rangle$ und dem angeregten Zustand $D_{5/2} = |D\rangle = |0\rangle$ abgebildet.

Für den Nachweis, ob sich das Ion im Grund- oder im angeregten Zustand befindet, wird die Anregung mittels 397 nm Laser verwendet [31, 32]. Befindet sich das Ion im Grundzustand

$S_{1/2}$ wird es durch 397 nm Licht in den Zustand $P_{1/2}$ angeregt, welcher mit $\tau \approx 7$ ns durch spontane Emission eines Photons wieder zerfällt. Das Ion leuchtet und befindet sich folglich im Zustand $|S\rangle$. Ist das Ion jedoch im angeregten Zustand $D_{5/2}$, bleibt es durch die Einstrahlung des 397 nm Lasers unverändert. Das Ion bleibt dunkel und befindet sich folglich im Zustand $|D\rangle$. Durch wiederholte Zustandspräparation mit anschließender Zustandsdetektion, wie oben beschrieben, kann die Population des Zustands $|S\rangle$ bzw. $|D\rangle$ festgestellt werden. Diese Methode zur Bestimmung des Elektronenzustands wird als *electron shelving* bezeichnet.

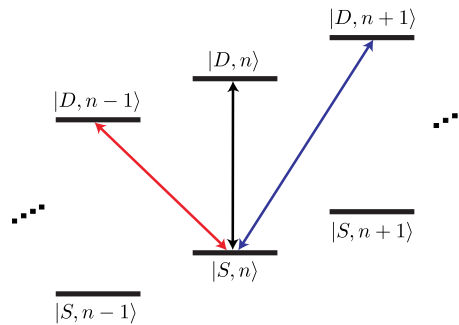


Abbildung 3.3: Die leiterförmige Niveaustruktur eines Ions im harmonischen Potential. Es entstehen Übergänge zwischen dem Grundniveau $|S\rangle$ und dem angeregten Niveau $|D\rangle$ mit gleicher $|S, n\rangle \leftrightarrow |D, n\rangle$ (schwarz), um 1 erhöhter $|S, n\rangle \leftrightarrow |D, n+1\rangle$ (blau), um 1 verringerter $|S, n\rangle \leftrightarrow |D, n-1\rangle$ (rot) usw., Bewegungsquantenzahl n des quantisierten harmonischen Oszillators.

Im Jahr 1995 wurde die Realisierung eines Quantencomputers auf Basis von gefangenen Ionen von Cirac und Zoller vorgeschlagen [14]. Die Ionen werden dabei, wie auf einer Kette aufgefädelt, in einem harmonischen Potential gespeichert. Zur Kodierung der Quanteninformation (Qubit) wird ein interner Zwei-Niveau Übergang verwendet (siehe Abbildung 3.2). Für die Informationsübertragung zwischen den Qubits und der Realisierung von Quanten-Gattern wird die harmonische Bewegung der Ionenkette verwendet. Aus der Kopplung der quantisierten harmonischen Bewegungszustände mit den internen Zwei-Niveau Zuständen folgt eine leiterförmige Niveaustruktur, die in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Im Spektrum ergibt sich dadurch ein Trägerübergang, wodurch der interne Zustand des Ions verändert werden kann, sowie seitlich danebenliegende Übergänge, welche als Seitenbänder bezeichnet werden. Mithilfe der Seitenbänder kann die Bewegungsquantenzahl n um 1 erhöht (blaues Seitenband), oder um 1 verringert (rotes Seitenband) werden. Die quantisierte Bewegung in der Kette kann als Datenbus für den Informationstransfer unter den Ionen und somit für Mehr-Qubit-Gatter verwendet werden [14].

Das effektive Zwei-Niveau-System kann durch Einstrahlung von Laserlicht mit der Frequenz $\omega_L = \omega_0 - \delta$ getrieben werden, wobei $\omega_0 = (E_1 - E_2)/\hbar$ die Übergangsfrequenz des Atoms und δ die Verstimmung der Laserfrequenz beschreibt. Die Hamilton-Funktion für das Atom H_{Atom} , die Falle H_{Falle} und die Wechselwirkung des Lasers mit dem Atom H_L sind wie folgt definiert [33]

$$\begin{aligned} H_{\text{Atom}} &= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \\ H_{\text{Falle}} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2, \\ H_L &= \frac{1}{2}\hbar\Omega(\sigma^+ + \sigma^-)(e^{i(k_L\hat{x} - \omega_L t + \phi)} + e^{-i(k_L\hat{x} - \omega_L t + \phi)}), \end{aligned} \quad (3.1)$$

wobei \hat{x} bzw. \hat{p} den Orts- bzw. Impulsoperator eines Teilchen mit Masse m im harmonischen Potential mit Fallenfrequenz ω beschreiben. σ^\pm und σ_i sind die Pauli-Matrizen, k_L bzw. ϕ ist der Wellenvektor bzw. die Phase des Lichts. Die Kopplungsstärke der Atom-Licht Wechselwirkung wird durch die Rabi-Frequenz Ω angegeben. In der Drehwellennäherung $|\omega_0 - \omega_L| \ll |\omega_0 + \omega_L|$ mit dem Lamb-Dicke-Parameter $\eta = k_L\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ kann die Hamilton-Funktion der Atom-Licht Wechselwirkung im gekoppelten System H_{WW} angegeben werden als

$$H_{\text{WW}} = \frac{1}{2}\hbar\Omega(e^{i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}\sigma^+ e^{i\delta t} + e^{-i\eta(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}\sigma^- e^{-i\delta t}), \quad (3.2)$$

wobei hier der Orts- \hat{x} und Impulsoperator \hat{p} mit dem Auf- \hat{a}^\dagger bzw. dem Absteigeoperator \hat{a} des harmonischen Oszillators ausgetauscht wurden. Der Wechselwirkungsterm in Gleichung (3.2) vereinfacht sich weiter für die Situation, in der die Ortswellenfunktion des Atoms viel kleiner ist als die Wellenlänge des eingestrahlt Lichts ($\Delta x \ll \lambda_L$). Dieser Fall wird mit $\eta^2(2n + 1) \ll 1$ definiert und wird als Lamb-Dicke-Regime bezeichnet. Mittels Taylor-Entwicklung kann der exponentielle Term in Gleichung (3.2) zu $\exp(i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a})) = 1 + i\eta(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \mathcal{O}(\eta^2)$ genähert werden. Der resultierende Ausdruck kann durch die drei folgenden Terme beschrieben werden

$$\begin{aligned} H_{\text{träger}} &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_{\text{träger}}(\sigma^+ + \sigma^-) \\ H_{\text{rot}} &= \frac{1}{2}i\hbar\Omega_{\text{rot}}(\hat{a}\sigma^+ - \hat{a}^\dagger\sigma^-) \\ H_{\text{blau}} &= \frac{1}{2}i\hbar\Omega_{\text{blau}}(\hat{a}^\dagger\sigma^+ - \hat{a}\sigma^-), \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei $H_{\text{träger}}$ den Trägerübergang und H_{rot} bzw. H_{blau} den Übergang am roten bzw. blauen Seitenband beschreiben. Die Rabi-Frequenzen für den Trägerübergang $\Omega_{\text{träger}}$, das rote Ω_{rot} und das blaue Ω_{blau} Seitenband lauten

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{träger}} &= \Omega(1 - \eta^2 n) \\ \Omega_{\text{rot}} &= \Omega\eta\sqrt{n} \\ \Omega_{\text{blau}} &= \Omega\eta\sqrt{n + 1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

An der Hamilton-Funktion für das rote Seitenband H_{rot} , welche auch als *Jaynes-Cummings* Hamilton-Funktion [34] bezeichnet wird, ist beispielsweise zu erkennen, dass bei dieser Wechselwirkung der Übergang zwischen den $|S, n\rangle \leftrightarrow |D, n - 1\rangle$ Niveaus getrieben werden kann.

Im Lamb-Dicke-Limit sind Übergänge, welche den Bewegungszustand $|n\rangle$ um mehr als 1 erhöhen oder verringern, stark unterdrückt ($\mathcal{O}(\eta^2)$). Damit das Lamb-Dicke-Regime erreicht werden kann, müssen die Ionen gekühlt werden.

3.4 Laserkühlen

Das Kühlen der gefangenen Ionen in den Bewegungsgrundzustand $|n = 0\rangle$ mit einer Besetzung von $\langle n \rangle \approx 0$ ist eine Voraussetzung für die Implementierung kohärenter Quantengatter [35]. Laserkühlen bietet eine effiziente und gut kontrollierbare Methode, die Bewegungsenergie zu verringern [36, 37]. Im Folgenden werden zwei Methoden erläutert, welche in zwei unterschiedlichen Regimen angewendet werden (Fallenfrequenz ω kleiner sowie größer als die natürliche Linienbreite Γ des Übergangs, $\omega \ll \Gamma$ und $\omega \gg \Gamma$).

3.4.1 Dopplerkühlen

Beim Dopplerkühlen ist die Fallenfrequenz ω viel kleiner als die natürliche Linienbreite Γ des getriebenen Kühlübergangs ($\omega \ll \Gamma$). In diesem Regime können die Seitenbänder nicht aufgelöst werden. Betrachtet man die Atom-Photon Wechselwirkung im Ruhesystem des Ions in der Falle, “sieht” das Ion aufgrund seiner Bewegung das eingestrahlte Licht periodisch Dopplerverschoben. Dadurch entsteht ein geschwindigkeitsabhängiger Strahlungsdruck, der mit roter Verstimmung des Lasers ($\omega_L < \omega_0$) zur Kühlung führt [36]. Die minimal erreichbare Energie wird als Dopplerlimit bezeichnet und beträgt $k_B T = \hbar\Gamma/2$ bei einer Verstimmung von $\delta = -\Gamma/2$. Dieses Limit kann auch in der minimalen durchschnittlichen Phononenanzahl eines thermischen Zustands ausgedrückt werden [38]:

$$\bar{n}_{\min} = \frac{\Gamma}{2\omega} \quad (3.5)$$

Für den $S_{1/2} \leftrightarrow P_{1/2}$ Übergang bei 397 nm mit einer Zerfallsrate von $\Gamma \approx 1.4 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ des $P_{1/2}$ Zustands ergibt sich bei einer typischen Fallenfrequenz von $\omega/2\pi \approx 1 \text{ MHz}$ eine erreichbare Besetzungszahl von $\bar{n}_{\min} \approx 10$. Durch Dopplerkühlen nahe ans Dopplerlimit kann bereits das Lamb-Dicke-Regime erreicht werden ($\eta_{397} \approx 0.179 \rightarrow \eta_{397}^2 \bar{n}_{\min} \approx 0.32 < 1$). Es ist dabei zu erkennen, dass für die Initialisierung der Ionen im Bewegungsgrundzustand ein weiterer Kühschritt notwendig ist.

3.4.2 Seitenbandkühlen

In den Experimenten, in denen der hier aufgebaute Laser Verwendung findet, wird nach dem Dopplerkühlen für die Kühlung der Ionen vom Bewegungszustand mit $\bar{n} \approx 10$ nahe zum Bewegungsgrundzustand mit $\bar{n} \approx 0$ ein weiterer Kühlvorgang durchgeführt. Ist die Fallenfrequenz ω viel größer als die natürliche Linienbreite Γ des Kühlübergangs ($\omega \gg \Gamma$), können die Seitenbänder aufgelöst werden und man spricht vom Seitenbandkühlen [39–42].

Wie in Abbildung 3.4 dargestellt ist, wird das Ion vom Anfangszustand $|S, n\rangle$ über das rote Seitenband des 729 nm Laser in den Zustand $|D, n - 1\rangle$ angeregt, wobei es ein Bewegungsquantum verliert. Danach zerfällt das Ion spontan meist in den Zustand $|S, n - 1\rangle$. Befindet sich

das Ion im Lamb-Dicke-Regime ($\eta(2\bar{n} + 1) \ll 1$), wird eine Änderung des Bewegungszustand bei spontaner Emission unterdrückt. Nach einem Kühldurchgang befindet sich das Ion wieder im internen Grundzustand und hat ein Bewegungsquantum verloren ($|S, n\rangle \rightarrow |S, n-1\rangle$). Durch die Lebensdauer des $D_{5/2}$ Zustands von $\tau \approx 1.17$ s wird die Kühlung sehr ineffizient. Ausgehend vom Bewegungszustand mit $\bar{n} \approx 10$ würde es ohne Einberechnung von externen Heizprozessen ~ 10 s lang dauern, das Ion zu kühlen. Zur Steigerung der Kühleffizienz wird das Ion nach der Anregung über das rote Seitenband mit Hilfe des 854 nm Lasers in den $P_{3/2}$ Zustand gepumpt, von welchem aus es nach der Zeit $\tau \approx 7$ ns in den Zustand $|S, n-1\rangle$ zerfällt. Diese Kühlsequenz kann solange wiederholt werden, bis sich das Ion im Grundzustand mit $\bar{n} \approx 0$ der Bewegung befindet.

Die endliche Anregungswahrscheinlichkeit von nicht resonanten Übergängen verhindert dabei die Bildung eines perfekten Dunkelzustands $|S, n=0\rangle$. Damit das rote Seitenband aufgelöst und adressiert werden kann, muss die Linienbreite des 729 nm Lasers kleiner als die Fallenfrequenz sein ($\Delta\nu_L \ll \omega/2\pi \approx 1$ MHz). Im Experiment werden zur Seitenbandkühlung 729 nm Pulssequenzen, bestehend aus 5-7 Pulsen mit einer Dauer von 1-2 ms, verwendet.

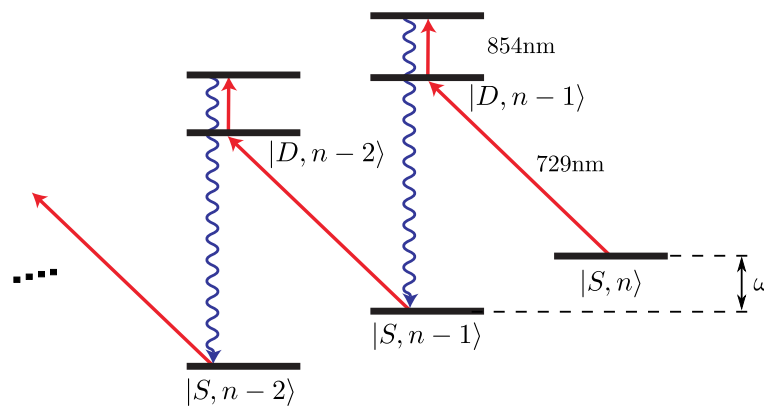


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung der Seitenbandkühlung.

3.5 Kompensation der Mikrobewegung

Elektrische Streufelder in der Nähe der Fallenoberfläche können die Ionen aus dem Nullpunkt des Fallenpotentials verdrängen. Durch die wechselnden RF-Felder der Falle wird eine oszillierende Mikrobewegungen in die Bewegung der Ionen mit der Treiberfrequenz Ω_{RF} induziert [43]. Zur Kompensation dieser unerwünschten Bewegung werden geeignete Spannungen an zusätzlichen Ausgleichselektroden angelegt, welche die Ionen zurück zum RF-Null der Falle schieben.

Es gibt unterschiedliche Methoden für den Nachweis der Mikrobewegung [43]. Beispielsweise kann das Fallenpotential, in dem sich das Ion befindet, verkleinert werden. Befindet sich das Ion nicht am Nullpunkt, folgt durch die Verkleinerung des Fallenpotentials eine örtliche Verschiebung des Ions. Diese Verschiebung kann durch ein Bildgebungssystem festgestellt werden. Eine der Limitierungen dieses Verfahrens besteht darin, dass die Mikrobewegung nur in der, vom Bildgebungssystem projizierten Ebene gemessen werden können [43].

Ein präzisere Methode bietet die Vermessung der durch die Mikrobewegung induzierten Seitenbänder mit dem 729 nm Laser. Sind die Seitenbänder aufgelöst, kann über das Verhältnis der Rabi-Frequenzen des Seitenbands der Mikrobewegung Ω_1 und des Trägerbands Ω_0 direkt die Stärke der Mikrobewegung im Grenzwert für eine kleine Modulation festgestellt werden $\Omega_1/\Omega_0 = \beta/2 + \mathcal{O}(\beta^2)$, wobei β den Modulationsindex der Mikrobewegung beschreibt. Durch diese Methode kann die Amplitude der Mikrobewegung auf wenige Nanometer verringert werden [44].

3.6 Experimentelle Anforderungen an den 729 nm Laser

Die folgenden Kapitel sollen eine Übersicht der grundlegenden Anforderungen an den 729 nm Laser geben. Dabei werden Kenngrößen wie die benötigte Leistung, die Frequenzstabilität und die Langzeitstabilität, welche aus der experimentellen Verwendung des 729 nm Lasers resultieren, diskutiert.

3.6.1 Benötigte Leistung

Nach dem Dopplerkühlen befindet sich ein Ion im Bewegungszustand mit einer mittleren Phononenanzahl von $\bar{n} \approx 10$. Wird eine Rabifrequenz von $\Omega_{\text{rot}}/2\pi \approx 10$ kHz angenommen, kann das Ion mittels Seitenbandkühlung in weniger als 1 ms in den Grundzustand mit $\bar{n} \approx 0$ gekühlt werden. Bei einer Fallenfrequenz von $\omega/2\pi \approx 1$ MHz beträgt der Lamb-Dicke-Parameter $\eta \approx 0.1$ und die Rabifrequenz Ω ist wegen $\Omega/2\pi \propto \Omega_{\text{rot}}/\eta \approx 100$ kHz etwa 10 Mal größer als die Rabifrequenz des roten Seitenbands. Mit der Abschätzung für die Kopplungsstärke Ω des Quadrupolübergangs [44]

$$\Omega \approx \frac{kE_0}{2\hbar} ea_0^2, \quad (3.6)$$

wobei k die Wellenzahl des Lasers, E_0 die Amplitude des elektrischen Feldes, e die Elementarladung und a_0 den Bohr'schen Atomradius beschreiben, erhält man eine Abschätzung für die benötigte Intensität I_0 . Die Intensität berechnet sich mit $I_0 = 2c\epsilon_0 E_0^2$ zu $I_0 \approx 625$ W/cm². Wird der Laserstrahl mit einem Radius von $w_0 = 10$ μ m auf das Ion fokussiert, erhält man eine benötigte Laserleistung von $P_0 = I_0 w_0^2 \pi \approx 2$ mW. Für die zukünftige Ausführung von Quantenoperationen an einzelnen Ionen wird eine Leistung von bis zu ~ 20 mW benötigt [45].

Die entstehenden Verluste ($\sim 70\%$) durch die Verwendung von optischen Elementen wie Glasfasern, AOMs, Spiegeln, Linsen, etc. müssen dabei berücksichtigt werden. Die größten Verluste entstehen bei der Einkopplung des Laserstrahls von der Trapezverstärkerdiode in die Glasfaser ($\sim 40\%$) und beim Passieren der AOMs für die Faserstabilisierung und die Intensitätsstabilisierung ($\sim 40\%$). Für die Versorgung von drei Experimenten muss die emittierte Laserleistung des TAs mindestens 200 mW betragen.

3.6.2 Frequenzgenauigkeit

Die derzeit stärkste Anforderung an die Linienbreite des 729 nm Lasers resultiert aus der Verwendung zur Seitenbandkühlung. Bei einer typischen Pulsdauer von $t \approx 1$ ms ergibt sich durch

die Fourier-Transformation eine spektrale Breite des Pulses von $\Delta\nu_P \approx 1$ kHz. Damit ein möglichst großer Teil der Lichtleistung an die Ionen gekoppelt werden kann, wird eine Linienbreite des Lasers von $\Delta\nu_L \approx 1$ kHz benötigt.

Für die Durchführung von Qubit-Gattern in der Zukunft wird jedoch eine kleinere Linienbreite benötigt. Je nach Art und Länge der Quantenoperationen ist deren Güte durch unterschiedliche Prozesse, wie beispielsweise Magnetfeldfluktuationen am Ort des Ions, Intensitäts- oder Phasenfluktuationen des Lasers, begrenzt [46–48]. Die Phasenfluktuationen werden dabei durch die endliche Linienbreite des Lasers $\Delta\nu_L$ hervorgerufen. Die maximal erreichbare Kohärenzzeit wird durch die natürliche Lebensdauer des $D_{5/2}$ Zustands von $\tau \approx 1.17$ s vorgegeben. Für eine typische Kohärenzzeit von $\tau \approx 100$ ms [47] muss die Kohärenzzeit des Lasers ebenso $\tau_L = 100$ ms betragen. Durch die Unschärferelation $\Delta\nu_L \geq 1/\tau_L$ folgt eine benötigte Linienbreite von höchstens $\Delta\nu_L < 10$ Hz. Aus diesem Grund wird in dieser Masterarbeit eine Linienbreite von < 10 Hz angestrebt.

3.6.3 Langzeitstabilität

Werden äußere Einflüsse wie beispielsweise Magnetfeldfluktuationen vernachlässigt, bleibt die Übergangsfrequenz der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen über die Zeit unverändert. Wie in Kapitel 6 beschrieben wird, weicht die Laserfrequenz bei der Stabilisierung mittels optischer Resonatoren über Zeitskalen von Minuten bis Stunden von der Übergangsfrequenz der Ionen ab. Für die Kompensation dieser Frequenzdriften werden spektroskopische Messungen an $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen durchgeführt.

Für eine unterbrechungsfreie Durchführung der Experimente zur Quanteninformation sollten die Messungen zur Driftkompensation höchstens etwa alle 100 s durchgeführt werden müssen. Die ausschlaggebende Größe für die Länge des Kompensationsintervalls ist die Änderung der Driftrate. Je schneller sich die Driftrate ändert, desto öfter müssen Kompensationsmessungen durchgeführt werden. In dieser Arbeit ist eine mittlere Verstimmung von höchstens 1 Hz geplant. Mit einer maximalen Verstimmung von 1 Hz und einem Kompensationsintervall von 100 s errechnet sich eine Änderung der Driftrate von < 0.1 mHz/s². Für die Driftrate selbst wird ein Wert von < 10 Hz/s angestrebt.

Kapitel 4

Laserstabilisierung

In diesem Kapitel werden die für die Laserstabilisierung wichtigen theoretischen Grundlagen präsentiert. Als erstes wird eine Einführung in die Regelungstechnik gegeben. Anschließend werden mögliche Referenztypen für die Frequenzstabilisierung analysiert. Es folgt eine theoretische Beschreibungen für das in dieser Masterarbeit verwendete Fabry-Pérot Interferometer. Abschließend werden unterschiedliche Stabilisierungsmethoden mit einem Fabry-Pérot Interferometer als Referenzsystem diskutiert.

4.1 Einführung in die Regelungstechnik

Die folgende Einführung ist in Anlehnung an die Fachliteratur von Ch. Schenk und U. Tietze *Halbleiter-Schaltungstechnik* [49], von J. Bechhoefer *Feedback for physicists* [50] und von J. Lunze *Regelungstechnik I* [51] geschrieben. Grundlegend beschäftigt sich die Regelungstechnik mit der Steuerung von dynamischen Systemen. Als *dynamische Systeme* werden Funktionseinheiten bezeichnet, deren Kenngrößen von der Zeit abhängen. Der Begriff *Steuerung* beschreibt die zielgerichtete Beeinflussung von dynamischen Systemen. Ein vereinfachtes Schema eines Regelkreises ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Gegeben ist ein dynamisches System (*Regelstrecke*), das von außen beeinflusst werden kann (*Stellgröße*) und eine messbare Größe (*Regelgröße*) besitzt. Ziel des Regelkreises ist es, die Regelabweichung, welche von der Regelgröße und der Führungsgröße vorgegeben wird, auf bestimmte Weise zeitlich zu verändern. Ist die Führungsgröße nicht zeitabhängig, spricht man von einem *Sollwert* und die Regelgröße sollte auf einem konstanten Wert gehalten werden.

Gesucht ist eine Regeleinrichtung (*Regler*), welche eine Stellgröße in Abhängigkeit der Regelabweichung vorgibt, sodass das Regelziel erreicht wird.

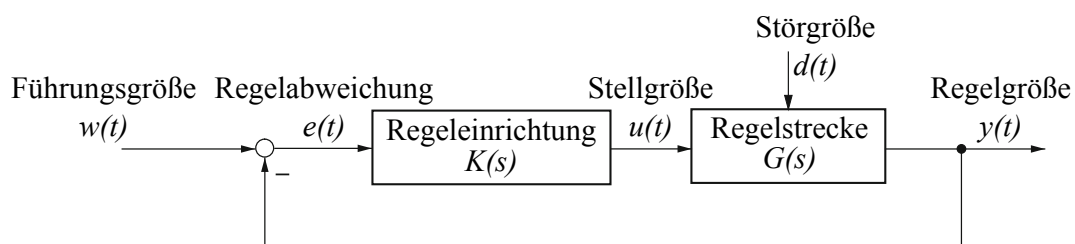


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung eines Regelkreises.

Ziel einer Regelung ist es, die Regelstrecke durch die Stellgröße $u(t)$ so zu beeinflussen, dass die Regelgröße $y(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ entspricht $y(t) = w(t)$. Also muss die nicht beeinflussbare Störgröße $d(t)$ durch geeignete Wahl der Stellgröße $u(t)$ kompensiert werden. Der Regler versucht, die Regelabweichung $e(t) = w(t) - y(t)$ zu minimieren. Typischerweise besitzen reale Regelkreise zusätzlich ein Stellglied und ein Messglied mit eigenem dynamischen Verhalten, welche der Einfachheit halber im Block Regelstrecke zusammengefasst wurden. Ein Regelzyklus besteht aus dem Messen der Regelgröße, dem Vergleichen der Regelgröße mit der Führungsgröße und dem Stellen der Stellgröße. Das Reglergesetz beschreibt, wie die Stellgröße $u(t)$ von Regelabweichung $e(t)$ abhängt ($u(t) = k_R(e(t)) = k(y(t), w(t))$). Für die Beschreibung dieser Größen im Frequenzraum wird die Laplace-Transformation verwendet [50]

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (4.1)$$

wobei s eine komplexe Zahl in Frequenzeinheiten ist. Zur Charakterisierung der Regelstrecke $G(s)$ bzw. der Regeleinrichtung $K(s)$ wird die Übergangsfunktion, welche das Verhältnis zwischen Ausgangsgröße zur Eingangsgröße beschreibt, betrachtet [50]

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\ K(s) &= \frac{U(s)}{E(s)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ und $E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$ die Laplace-Transformationen der Regelgröße $y(t)$, der Stellgröße $u(t)$ bzw. der Regelabweichung $e(t)$ beschreiben. Das Frequenzverhalten des geschlossenen Regelkreises kann dabei wie folgt berechnet werden [49]

$$H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{g}{1 + g}, \quad (4.3)$$

wobei $g = K(s)G(s)$ als Schleifenverstärkung bezeichnet wird. Als Einführung wird das Zeit- bzw. Frequenzverhalten der wichtigsten Regelglieder zusammengefasst. Bei einem Proportionalglied (**P-Glied**) ist die Stellgröße proportional zur Regelabweichung mit einer Verstärkung von K_P [51]

$$\begin{aligned} u(t) &= K_P \cdot e(t) \\ K(s) &= K_P. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aufgrund der fehlenden Zeitabhängigkeit des P-Glieds, reagiert das ideale P-Glied ohne Zeitverzögerung auf die Regelabweichung $e(t)$. Ein Nachteil dieses Reglers ist die konstante Regelabweichung. Aus Gleichung (4.3) folgt für die Regelabweichung $(W(s) - Y(s))/W(s) = 1/(1+g) = \text{const}$, wobei g proportional zur Verstärkung K_P ist, wodurch eine nicht verschwindende Abweichung entsteht.

Das integrierende Glied (**I-Glied**) wird durch zeitliche Integration der Regelabweichung mit dem Verstärkungsfaktor K_I beschrieben [51]

$$\begin{aligned} u(t) &= K_I \int_0^t e(\tau) d\tau \\ K(s) &= \frac{K_I}{s}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Durch die zeitliche Integration der Regelabweichung wird der I-Regler im Vergleich zum P-Regler als langsamer Regler bezeichnet. Für eine konstante Regelabweichung $e(t) = \text{const}$ folgt ein konstanter Anstieg der Stellgröße bis zu dessen Begrenzung

$$u(t) = K_I \cdot e(t) \cdot t. \quad (4.6)$$

Der I-Regler ändert die Stellgröße solange bis die Regelabweichung null ist. Aus diesem Grund entsteht beim I-Regler keine bleibende Regelabweichung. Theoretisch betrachtet folgt für die Regelabweichung $(W(s) - Y(s))/W(s) = 1/(1 + g) = 0$ eines idealen I-Glied mit $g \rightarrow \infty$.

Das differenzierende Glied (**D-Glied**) wird durch zeitliche Differentiation der Regelabweichung mit der Verstärkung K_D beschrieben [51]

$$u(t) = K_D \frac{\partial}{\partial t} e(t) \quad (4.7)$$

$$K(s) = K_D \cdot s.$$

Das D-Glied reagiert also lediglich auf die Änderungsgeschwindigkeit der Regelabweichung und kann daher nicht alleine als Regler eingesetzt werden.

Werden die verschiedenen Regelglieder verbunden, können die Vorteile der einzelnen Glieder kombiniert und die Nachteile gegenseitig kompensiert werden, wie beispielsweise beim PD-, PI-, oder PID-Regler. Das Zeit- und Frequenzverhalten eines PID-Reglers kann mit folgenden Gleichungen beschrieben werden [51]

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{\partial}{\partial t} e(t) \quad (4.8)$$

$$K(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

wobei die Parameter K_P , K_I und K_D Einstellmöglichkeiten zur Optimierung des Regelverhaltens bieten. Im Zuge dieser Arbeit werden elektronische PI-/PID-Regler beispielsweise zur Temperatur- und Frequenzstabilisierung verwendet. Die explizite Bestimmung des Frequenzverhaltens des geschlossenen Regelkreises $H(s)$ geht über den Rahmen dieser Masterarbeit hinaus, wobei die Theorie dazu in einschlägiger Fachliteratur [49–51] nachgelesen werden kann.

4.2 Referenztypen zur Laserstabilisierung

Bei der Frequenzstabilisierung eines Lasers gibt es mehrere Möglichkeiten für die Erstellung der Regelgröße. Dafür wird zur Regelstrecke (Lasersystem) ein Messglied (Referenzsystem) implementiert. Für die Gewinnung der Regelgröße zur Stabilisierung der Laserfrequenz eignet sich beispielsweise die Spektroskopie von Atomen. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze wie die Polarisationspektroskopie [52, 53], die Frequenzmodulationsspektroskopie [54] oder die Modulationsübertragungsspektroskopie [55]. Diese Methoden eignen sich speziell für neutrale Atome sehr gut, da mit Hilfe von Gaszellenspektroskopie der Laser direkt auf den gewünschten, atomaren Übergang stabilisiert werden kann. Ein Nachteil dabei ist, dass die erreichbare Linienbreite des Lasers typischerweise auf 300 kHz [56] bis 18 MHz [57] begrenzt ist. Ähnlich wie bei optischen Resonatoren, wie in Kapitel 4.4 gezeigt wird, hängt die erreichbare Linienbreite

des Lasers bei Stabilisierung durch Spektroskopie von der Linienbreite des Referenzsystems ab [18]. Diese Linienbreite ist in der Spektroskopie unter anderem durch die natürliche Linienbreite, Flugzeit-, Stoß- bzw. Sättigungsverbreiterung begrenzt [18].

Für $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen eignet sich die Stabilisierung durch Spektroskopie von Atomen nicht, da keine geeignete Atomspezies mit einer Übergangsfrequenz ähnlich zu der des $S_{1/2} - D_{5/2}$ Übergangs mit $\nu = 411042$ GHz existiert. Da die Laserfrequenz technisch bedingt nur begrenzt verschoben werden kann (z.B. durch die Verwendung von akustooptischen Modulatoren), sollte die Übergangsfrequenz der spektroskopierten Atomspezies maximal 10 GHz von der Übergangsfrequenz $\nu = 411042$ GHz des $S_{1/2} - D_{5/2}$ Übergangs entfernt sein.

Im Vergleich zu Atomen, deren Übergangsfrequenzen weitgehendst fixiert sind, lässt sich die Resonanzfrequenz eines optischen Resonator beliebig einstellen. Aus diesem Grund wird der 729 nm Laser im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe von optischen Resonatoren stabilisiert. In den vergangenen Jahren konnten zahlreiche Experimente extrem schmale Laserlinienbreiten (≤ 1 Hz) mittels Frequenzstabilisierung auf optische Resonatoren demonstrieren [8–13].

4.3 Das Fabry-Pérot Interferometer

Es gibt verschiedene Arten von optischen Resonatoren, wie beispielsweise Ring-, gefaltete Ring-, oder Fabry-Pérot Resonatoren. Im Rahmen dieser Masterarbeit werden Fabry-Pérot Resonatoren, im Folgenden einfach kurz als Resonatoren bezeichnet, zur Frequenzstabilisierung verwendet. In diesem Kapitel werden einige wichtige Eigenschaften des Fabry-Pérot Interferometers diskutiert.

Grundlegend besteht ein Fabry-Pérot Interferometer aus zwei, senkrecht zur optischen Achse positionierten Spiegeln (siehe Abbildung 4.2). Das Licht tritt durch Spiegel S1 in das Interferometer ein. Dort wird der Strahl von den Innenseiten der Spiegel S1 und S2 reflektiert. Aufgrund der endlichen Reflektivität der Spiegel wird ein Teil vom Interferometer reflektiert und ein Teil transmittiert. Die verschiedenen Bauformen von Fabry-Pérot Resonatoren unterschei-

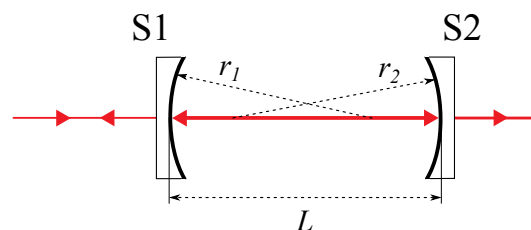


Abbildung 4.2: Optischer Aufbau eines Fabry-Pérot Interferometers. Zwei Spiegel S1 und S2 werden, mit den reflektierenden nach innen gerichtet, parallel im Abstand L voneinander angebracht. Der Laserstrahl tritt mittig durch den Spiegel S1 in das Interferometer ein. Das Licht wird zwischen den Spiegeln hin und her reflektiert, wobei auf beiden Seiten ein Teil durch die nicht idealen Spiegel transmittiert wird.

den sich durch die Konfiguration der Krümmungsradien r_i und des Abstands L der Spiegel.

4.3.1 Funktionsweise

Zu Beginn ist es ausreichend, die Eigenschaften eines Resonators mit plan-parallelen Spiegeln ($r_1 = r_2 = \infty$) zu beschreiben. Die spektralen Eigenschaften lassen sich mit Hilfe von ebene

Wellen beschreiben [18]. Aufgrund der Überlagerung von vielen reflektierten und transmittierten Anteilen spricht man in diesem Fall von Vielstrahlinterferenz. Es wird angenommen, dass eine ebene Welle $E = E_0 \exp(i(\omega t - kx))$ senkrecht auf ein plan-paralleles Spiegelpaar geschickt wird (siehe Abbildung 4.3). Werden Verluste, wie beispielsweise Absorption an der Spiegelo-

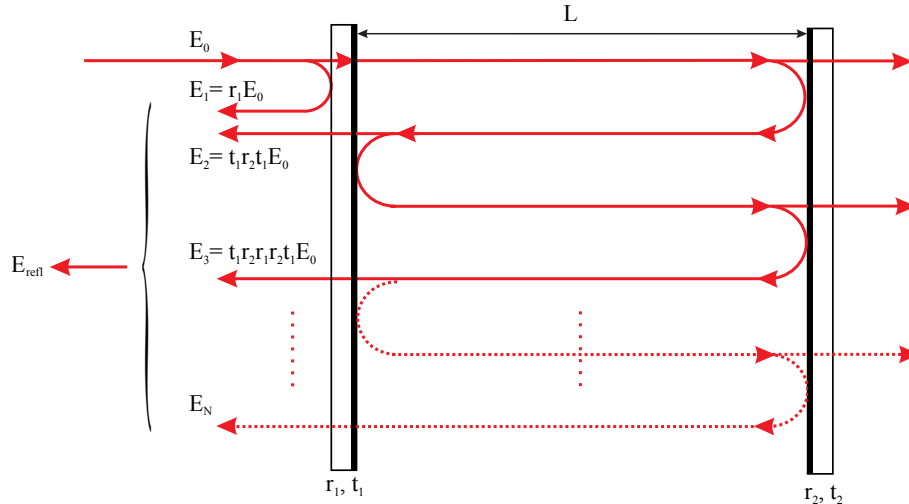


Abbildung 4.3: Ideales plan-paralleles Fabry-Pérot-Interferometer der Länge L . Eine ebene Welle mit der Amplitude E_0 trifft senkrecht auf das Interferometer. Dabei wird ein Teil der Welle mit Amplitude $E_1 = r_1 E_0$ reflektiert, der andere Teil $E'_2 = t_1 E_0$ wird transmittiert. Ein Teil von E'_2 wird mit der Amplitude $E''_2 = r_1 t_1 E_0$ am zweiten Spiegel reflektiert und anschließend durch den ersten Spiegel transmittiert $E_2 = t_1 r_2 t_1 E_0$. Dieses Verhalten lässt sich bis zur N -ten reflektierten Teilwelle mit der Amplitude E_N weiterführen. Zusammen mit der pro Umlauf aufgenommenen Phase lässt sich die gesamte Reflexion E_{refl} mit Gl.(4.11) berechnen.

berfläche, oder Beugungsverluste, vernachlässigt, wird die Amplitude eines jeden Strahls E_i , der auf eine Grenzfläche trifft, in zwei Teilbündel aufgespalten. Die Amplituden des reflektierten beziehungsweise des transmittierten Anteils lauten $E_{i,\text{refl}} = r_i E_i$ bzw. $E_{i,\text{trans}} = t_i E_i$. Das Reflexionsvermögen $R = r_i^2 = I_R/I_0$ eines Spiegels gibt an, welcher Anteil von der eingestrahnten Leistung reflektiert werden kann. Zwischen zwei benachbarten Teilwellen entsteht zusätzlich zur Amplitudenänderung auch ein optischer Wegunterschied von $\Delta s = 2nL$, mit dem Brechungsindex n und der Länge L . Dies führt zu einer Phasendifferenz der beiden Wellen von

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s + \Delta\phi, \quad (4.9)$$

wobei mit $\Delta\phi$ etwaige Phasensprünge an der Grenzschicht berücksichtigt werden. Dies spielt gerade beim ersten Übergang ins optische dichtere Medium eine Rolle, da hier der Phasensprung gerade $\Delta\phi = \pi$ beträgt. Somit gilt

$$E_1 = r_1 E_0 e^{i\pi} = -r_1 E_0. \quad (4.10)$$

Die Gesamtamplitude des reflektierten Anteils E_{refl} lässt sich durch phasenrichtige Summation über alle N reflektierten Teilwellenamplituden E_n berechnen. Nach Abbildung 4.3 ergibt sich

für den reflektierten Teil

$$\begin{aligned} E_{\text{refl}} &= -r_1 E_0 + t_1 r_2 t_1 e^{i\phi} + t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{i2\phi} + t_1 r_2 r_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{i3\phi} \dots \\ &= E_0 \left[-r_1 + t_1^2 r_2 e^{i\Phi} \sum_{n=0}^{N-2} (r_1 r_2 e^{i\Phi})^n \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sind die Spiegel unendlich ausgedehnt oder ist, wie im Experiment, der Einfallswinkel normal auf die Spiegelfläche, so entstehen unendlich viele Teilstrahlen. Durch die Grenzwertbildung für $N \rightarrow \infty$ vereinfacht sich Gleichung (4.11) mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{N-2} (r_1 r_2 e^{i\Phi})^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{i\Phi}}, \quad (4.12)$$

wobei $|r_1 r_2 e^{i\Phi}| < 1$ ist und für die reflektierte Welle folgt

$$E_{\text{refl}} = E_0 \left[-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{i\Phi}} \right]. \quad (4.13)$$

Die in dieser Arbeit verwendeten Spiegel besitzen die gleichen Reflexions- bzw. Transmissionskoeffizienten ($r_1 = r_2 = r$ und $t_1 = t_2 = t$). Ohne Berücksichtigung von Verlusten $r^2 + t^2 = R + T = 1$ ergibt sich für die reflektierte Welle

$$E_{\text{refl}} = E_0 r \frac{e^{i\Phi} - 1}{1 - r^2 e^{i\Phi}}. \quad (4.14)$$

Diese Gleichung enthält wichtige Informationen über das Reflexionsverhalten eines Resonators. Für die reflektierte Intensität des Fabry-Pérot Interferometers folgt mit $I_{\text{refl}} = 2c\epsilon_0 E_{\text{refl}}^*$ und $F = 4R/(1 - R)^2$

$$I_{\text{refl}} = I_0 \frac{F \sin^2(\Phi/2)}{1 + F \sin^2(\Phi/2)}. \quad (4.15)$$

Die transmittierte Intensität lässt sich analog herleiten und man erhält

$$I_{\text{trans}} = I_0 \frac{1}{1 + F \sin^2(\Phi/2)}. \quad (4.16)$$

Anhand dieser Gleichungen wird ersichtlich, dass für die Werte $\Phi = 2\pi m$ die transmittierte Intensität maximal bzw. die reflektierte Intensität minimal wird. Aufgrund der Energieerhaltung und der Vernachlässigung von Verlusten gilt für die Intensitäten $I_{\text{trans}} + I_{\text{refl}} = 1$.

Für kleine Werte von Φ , also in der Nähe eines Maximums, lässt sich die transmittierte Intensität (4.16) mit $\sin^2(\Phi/2) \approx \Phi^2/4$ entwickeln zu

$$I_{\text{trans}} \approx I_0 \frac{1}{1 + F\Phi^2/4}. \quad (4.17)$$

Diese Entwicklung ergibt ein sogenanntes Lorentz-Profil. In dieser Näherung kann die transmittierte Intensität als periodisches Lorentz-Profil interpretiert werden.

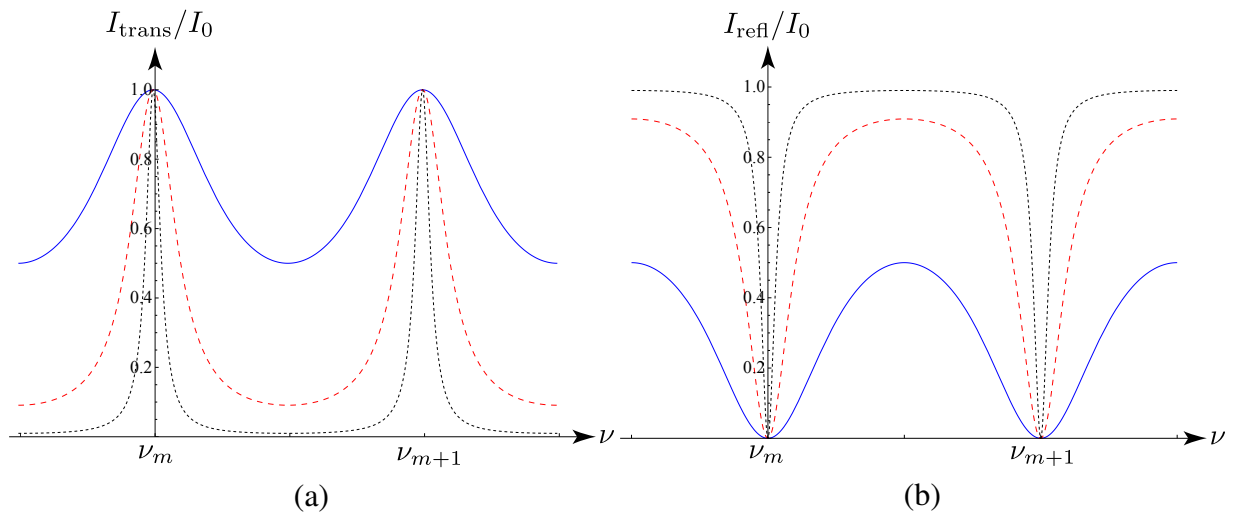


Abbildung 4.4: (a) Transmission bzw. (b) Reflektion eines idealen Fabry-Pérot-Interferometers. Eingezeichnet sind jeweils drei verschiedene Kurven für $F = 1$ (Blau), $F = 10$ (Rot gestrichelt), $F = 100$ (Schwarz gepunktet).

4.3.2 Freier Spektralbereich

Das zwischen den Spiegeln hin- und herlaufende Licht bildet stehende Wellen aus, die eine bestimmte räumliche Verteilung besitzen. Diese Verteilungen werden als Moden bezeichnet. In Ausbreitungsrichtung des Strahls (longitudinal) gibt es die Bedingung, dass sich nur Stehwellen ausbilden können, deren elektrisches Feld an den Grenzen (Spiegel) null ist. Das bedeutet, dass die optische Weglänge nL , mit Brechungsindex n und Spiegelabstand L , zwischen den Spiegeln einem Vielfachen m der halben Wellenlänge $\lambda_m/2$ entsprechen muss ($nL = m\lambda_m/2$). Deswegen entstehen diese Moden nur in einem bestimmten Frequenzabstand, welcher als freier Spektralbereich (FSB) bezeichnet wird. Mit Hilfe des FSBs kann einerseits die Finesse des Resonators bestimmt werden (siehe Kapitel 4.3.4). Andererseits gibt der halbe FSB den maximalen Frequenzunterschied zwischen der Laser- und der Resonatormodenfrequenz an. Im schlechtesten Fall befindet sich die Laserfrequenz gerade in der Mitte von zwei Resonatormoden und sie muss beispielsweise mit Hilfe von AOMs um den halben FSB verstimmt werden können. Für die theoretische Herleitung des FSBs betrachtet man die Stehwellenbedingung im Resonator

$$\lambda_m = \frac{2nL}{m} \rightarrow \nu_m = \frac{mc}{2nL}. \quad (4.18)$$

Der Abstand zweier nebeneinander liegenden Moden (siehe Abbildung 4.4) $m + 1$ und m in Frequenzeinheiten ν berechnet sich aus der Differenzfrequenz der beiden Moden und man erhält für den freien Spektralbereich $\Delta\nu_{\text{FSB}} = \nu_{m+1} - \nu_m$

$$\Delta\nu_{\text{FSB}} = \frac{c}{2nL}. \quad (4.19)$$

Bildlich gesprochen, müssen die Wellen mit der Geschwindigkeit c bei einem Rundgang von $2nL$ gerade die Phase aufsammeln, um konstruktiv interferieren zu können. Man kann diese Relation auch herleiten, in dem man den Phasenunterschied zwischen der m -ten und der

$m + 1$ -ten Mode mit der Phasendefinition aus Gleichung (4.9) berechnet

$$\Phi_{m+1} - \Phi_m = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda_{m+1}} - \frac{2\pi\Delta s}{\lambda_m} = 2\pi(m+1) - 2\pi m = 2\pi. \quad (4.20)$$

Mit der optischen Weglänge $\Delta s = 2nL$ folgt umgerechnet in Frequenzeinheiten

$$\frac{2\pi nL}{c}(\nu_{m+1} - \nu_m) = 2\pi \rightarrow \Delta\nu_{FSB} = \frac{c}{2nL}. \quad (4.21)$$

Es ist zu erkennen, dass der freie Spektralbereich nur vom Abstand L der beiden Spiegel zueinander und dem Brechungsindex n des Mediums zwischen den Spiegeln abhängt.

4.3.3 Linienbreite

Die Linienbreite eines Resonators ist eine wichtige Größe für die Charakterisierung der Frequenzstabilisierung in Kapitel 4.4. Sie beschreibt den Frequenzbereich $\delta\nu$ in dem die Wellen im Resonator konstruktiv interferieren können. Im Experiment kann die Halbwertslinienbreite $\delta\nu$ entweder direkt durch Spektroskopie, oder über die charakteristische Zerfallszeit t_{res} des Lichts im Resonator, bestimmt werden.

Der Verlustparameter g_m beschreibt in Resonanz die Reduktion der Intensität pro Photonen-umlauf. In einem verlustfreien Resonator mit Brechungsindex $n = 1$ beschreibt das Reflexionsvermögen den Verlustparameter $g_m = R$. Ein Teil $(1 - g_m)$ der Lichtleistung verlässt dabei den Resonator. Die benötigte Zeit für einen Umlauf beträgt $2L/c$. Deshalb ist der Energieverlust pro Umlauf proportional zu $(1 - g_m) \cdot c/2L \cdot P_{\text{res}} = \kappa P_{\text{res}}$. Da dieser Verlust proportional zur gespeicherten Energiemenge ist, erhält man folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{\text{res}} = -\kappa P_{\text{res}}. \quad (4.22)$$

Ohne einfallendes Licht folgt durch Integration der Gleichung (4.22) und der Verwendung der Anfangsbedingung $P_{\text{res}}(t = 0) = P_0$ ein exponentieller Zerfall der Lichtleistung innerhalb des Resonators [58]

$$P_{\text{res}}(t) = P_0 e^{-\kappa t} = P_0 e^{-t/t_{\text{res}}}. \quad (4.23)$$

Der Faktor $\kappa = 1/t_{\text{res}}$ wird als Abklingkonstante des Resonators bezeichnet. Die Fouriertransformierte des Zerfalls der Leistung ergibt die spektrale Antwortfunktion des Resonators

$$\mathcal{F}_t[e^{-\kappa|t|}](\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\kappa}{\kappa^2 + \omega^2}. \quad (4.24)$$

Durch die Fouriertransformation lässt sich aus dem zeitlichen Verhalten des Resonators eine Beschreibung für dessen Verhalten in Frequenzeinheiten ableiten. Dieser Ansatz und der Ansatz aus Gleichung (4.17) liefern unabhängig voneinander ein Lorentzprofil für das Resonanzverhalten. Aus Gleichung (4.24) kann die Halbwertsbreite im Frequenzraum zu $\delta\omega = \kappa$ bestimmt werden und es folgt für die Linienbreite [58]

$$\delta\nu = \frac{\delta\omega}{2\pi} = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{1}{2\pi t_{\text{res}}}. \quad (4.25)$$

Es kann also die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators durch die Messung der charakteristischen Zerfallszeit t_{res} festgestellt werden.

4.3.4 Finesse

Eine weitere wichtige Kenngröße ist die sogenannte Finesse \mathcal{F} . Sie kann beispielsweise als Größe dafür interpretiert werden, wie oft ein einzelnes Photon im Resonator hin und her reflektiert wird. In der Praxis wird im Kontext der Frequenzstabilisierung die Qualität eines Resonators meist mit der Finesse \mathcal{F} anstelle der Linienbreite $\delta\nu$ beschrieben. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit explizit zwischen Resonatoren hoher Finesse ($\mathcal{F} > 10^5$) und Resonatoren mittlerer Finesse ($\mathcal{F} \approx 10^4$) unterschieden.

Die Finesse ist über das Verhältnis vom Abstand $\Delta\nu_{\text{FSB}}$ zweier Transmissionsmaxima zur Halbwertsbreite $\delta\nu$ eines Maximums definiert

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSB}}}{\delta\nu}. \quad (4.26)$$

Die Phasenhalfwertsbreite $\epsilon = |\Phi_1 - \Phi_2|$ mit $I_{\text{trans}}(\Phi_1) = I_{\text{trans}}(\Phi_2) = I_0/2$ errechnet sich mit Hilfe von Gleichung (4.16) zu

$$\epsilon = 4 \arcsin\left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}}\right). \quad (4.27)$$

Für Spiegel mit hohem Reflexionsvermögen $(1-R) \ll R$ ergibt sich für die Phasenhalfwertsbreite eines Transmissionsmaximums

$$\epsilon = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}. \quad (4.28)$$

Zur Berechnung der Halbwertsbreite $\delta\nu$ in Frequenzeinheiten nutzt man wieder die Verbindung, dass der FSB gerade einer Phasenänderung von 2π entspricht

$$\delta\nu = \frac{\epsilon}{2\pi} \Delta\nu_{\text{FSB}}. \quad (4.29)$$

Durch Einfügen von Gleichung (4.28) in Gleichung (4.29) erhält man

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSB}}}{\delta\nu} = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi}{2}\sqrt{F}. \quad (4.30)$$

Mit Gleichung (4.30) lässt sich das Reflexionsvermögen R der verwendeten Spiegel aus der Finesse \mathcal{F} , oder umgekehrt berechnen. Anhand Abbildung 4.4 ist zu erkennen, dass mit steigender Finesse die Resonanzkurven schmaler werden.

4.3.5 Resonatorstabilität

Beim Aufbau von Resonatoren können verschiedene Konfigurationen der Krümmungsradien r_1, r_2 und des Spiegelabstands L gewählt werden. Betrachtet man den Fall eines Interferometers mit zwei konvexen Spiegeln, wird klar, dass nicht jede beliebige Kombination dieser drei Parameter das Licht einschließen kann. Trifft ein Strahl auf einen konvexen Spiegel wird der Winkel zur optischen Achse von Reflexion zu Reflexion größer, bis der Strahl den Resonator verlässt. Konfigurationen, die es ermöglichen einen Strahl einzuschließen, werden als stabil bezeichnet. Für die theoretische Beschreibung der Resonatorstabilität werden die g-Parameter

$g_1 = 1 - L/r_1$ und $g_2 = 1 - L/r_2$ eingeführt. Mit Hilfe der ABCD Matrizen (siehe [59]) kann die Stabilitätsbedingung für Resonatoren hergeleitet werden [59]:

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (4.31)$$

Befindet sich der Wert des Produkts $g_1 g_2$ zwischen 0 und 1, ist der Resonator stabil. Der stabile Bereich ist in Abbildung 4.5 grau-schattiert dargestellt. Symmetrische Resonatoren, bei denen beide Spiegel die gleiche Krümmung besitzen, d.h. $r = r_1 = r_2$, liegen auf der strichlierten Achse in Abbildung 4.5. Die drei Beispielresonatoren, dargestellt durch die schwarzen Punkte (a,b,c), liegen jedoch jeweils an der Grenze zur Instabilität. In der Praxis können solche Anordnungen durch kleine Herstellungsfehler instabil werden.

In dieser Arbeit werden zwei Resonatoren in plan-konkaver Konfiguration verwendet. Die Werte für die Länge L und den Krümmungsradius r des konkaven Spiegels sind jeweils so gewählt, dass die Resonatoren nicht direkt an der Grenze zur Instabilität liegen. Für den Resonator mittlerer Finesse (MF) bzw. hoher Finesse (HF) gilt $L = 100$ mm, $r = 250$ mm bzw. $L = 77.5$ mm, $r = 500$ mm. Diese zwei Resonatoren sind in Abbildung 4.5 durch die roten Kreise (d,e) markiert.

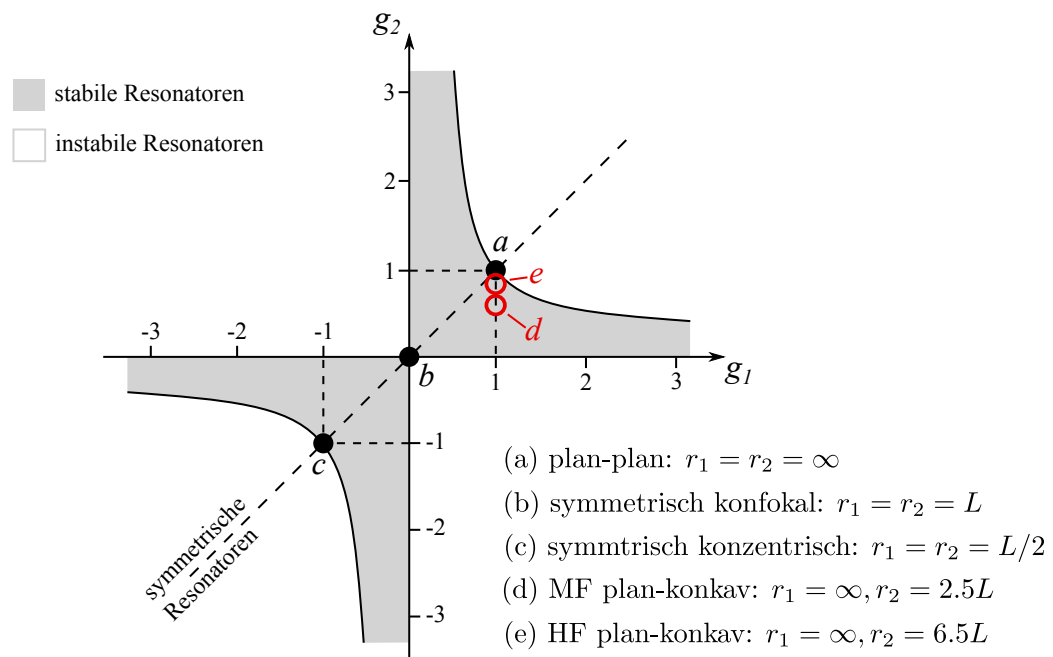


Abbildung 4.5: Stabilitätsdiagramm. Resonatoren, die im grau-schattierten Bereich ($0 \leq g_1 g_2 \leq 1$) liegen, sind stabil. Resonatoren außerhalb sind instabil. Die schwarzen Punkte markieren typische symmetrische Resonatoren. Die roten Kreise markieren, die in dieser Arbeit verwendeten, Resonatoren mittlerer (MF) und hoher (HF) Finesse.

4.3.6 Transversale Moden

Bis hierher wurden die Eigenschaften des Fabry-Pérot Interferometers mit Hilfe von ebenen Wellen und Strahlenoptik erläutert. Für die Betrachtung der transversalen Modenstruktur, normal zur Ausbreitungsrichtung, sind diese Methoden nicht mehr ausreichend.

Der Laserstrahl und die Moden im Resonator können durch Lösungen der paraxial genäherten Helmholtz-Gleichung beschrieben werden [19, 59]. Frei propagierende Laserstrahlen werden mit Hilfe von Gaußstrahlen und die transversalen Moden durch Hermite-Gauß Moden beschrieben. Diese transversalen Moden werden als TEM (transversal elektro-magnetische) Moden bezeichnet. Die Grundmode TEM_{00} besitzt quer zur Ausbreitungsrichtung eine gaußförmige Intensitätsverteilung. Bei höheren Moden kommt es aufgrund von Interferenzeffekten zu komplizierteren Verteilungen [19]. Die Frequenz der TEM_{mn} Moden beträgt relativ zum freien Spektralbereich [19]

$$\nu_{TEM_{mn}} = \Delta\nu_{FSB} \frac{m+n+1}{\pi} \arccos |\sqrt{g_1 g_2}|, \quad (4.32)$$

wobei m, n die Modennummern, L den Spiegelabstand und g_i die g-Parameter der Spiegel beschreiben. Für die, in dieser Arbeit verwendeten, plan-konkaven Resonatoren gilt $g_1 g_2 = 1 - L/r_2$. Für die gewählte Konfiguration $r_2 > L$ wird laut Gleichung (4.32) der Abstand der TEM_{mn} Moden im Vergleich zum freien Spektralbereich klein. Für den Resonator hoher Finesse folgt beispielsweise ein longitudinaler Modenabstand von $\Delta\nu_{FSB} = 1.934$ GHz und für den Abstand $\Delta\nu_{mn}$ zweier benachbarter TEM Moden $\Delta m + \Delta n = 1$ resultiert $\Delta\nu_{mn} = 249$ MHz.

Die räumliche Intensitätsverteilung des Lasers sowie auch der TEM_{00} Mode kann durch Gaußstrahlen beschrieben werden. Zur Minimierung von Beugungsverlusten und zur Unterdrückung höherer TEM_{mn} Moden muss der Gaußstrahl des Laser an die Gaußmode des Resonators angepasst werden. Wie in Abbildung 4.6 dargestellt ist, sollten die Wellenfronten des Lasers an die Konfiguration des plan-konkaven Resonators angepasst werden. Das bedeutet, dass beim Eintritt in den Resonator die Krümmung r_L der Wellenfronten des Lasers mit der Krümmung des planen Spiegels $r_L = r_1 = \infty$ und am Ort des zweiten Spiegels mit der Krümmung des konkaven Spiegels $r_L = r_2$ zusammenfallen. Diese Modenanpassung kann durch geeignete Wahl der Strahltaile des einfallenden Laserstrahls am Ort des planen Spiegels bewerkstelligt werden. Für einen plan-konkaven Resonator errechnet sich der Tailenradius w_0 am Ort des planen Spiegels durch [19]

$$w_0 = \sqrt{\frac{L\lambda}{\pi}} \sqrt[4]{\frac{r-L}{L}}. \quad (4.33)$$

Im Experiment wird die Tailenanpassung mit Hilfe von Linsen bewerkstelligt. Die benötigte Brennweite f der Linse kann mit Hilfe folgender Gleichung berechnet werden [19]

$$w_L = f \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (4.34)$$

wobei w_L die Strahltaile des Lasers am Ort der Linse und w_0 die Strahltaile der Resonatormode am Ort des planen Spiegels beschreibt. Da die TEM_{00} Mode des Resonators und der Laserstrahl beide gaußförmige Intensitätsverteilungen aufweisen, kann die Modenanpassung ohne Veränderung der räumlichen Struktur des Laser bewerkstelligt werden. Deswegen werden Laser in der Praxis meist auf die TEM_{00} Mode stabilisiert.

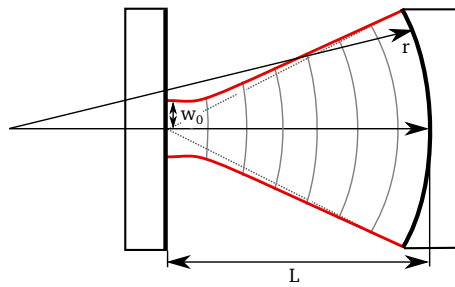


Abbildung 4.6: Darstellung eines modenangepassten Gaußstrahls im plan-konkaven Resonator der Länge L . Der Krümmungsradius r_L des Laserstrahls muss dem Krümmungsradius r des konkaven Spiegels entsprechen. Die benötigte Strahltaile w_0 am Ort des planen Spiegels kann mit Gleichung (4.33) berechnet werden.

4.4 Stabilisierungsmethoden

In dieser Arbeit wird, wie bereits in Kapitel 4.2 erwähnt wurde, ein optischer Resonator als Frequenzreferenz verwendet. Für die Gewinnung der Regelgröße, im Folgenden auch Fehlersignal genannt, gibt es verschiedene Methoden. Betrachtet man das Interferometer als Messglied, kann man daraus zwei Regelgrößen gewinnen. Mit Hilfe von Photodioden kann entweder die transmittierte oder die reflektierte Intensität (siehe Abbildung 4.4) des Interferometers gemessen und als Fehlersignal verwendet werden.

4.4.1 Die Flankenstabilisierung

Durch Abziehen einer konstanten Gleichspannung vom Photodiodensignal in Transmission entsteht in der Nähe einer Resonanz ein Fehlersignal mit Nulldurchgang. Der Regler wird dann auf diesen Nulldurchgang stabilisiert. Diese Regelung wird als Flankenstabilisierung bezeichnet. Die Nachteile dieser Methode sind, dass eine konstante Frequenzabweichung vom Transmissionsmaximum der Referenz besteht. Des Weiteren ist der Fangbereich dieser Regelung auf die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators begrenzt. Für Resonatoren hoher Finesse beträgt die Linienbreite und folglich der Fangbereich der Regelung nur wenige kHz. Der größte Nachteil der Flankenstabilisierung ist, dass nicht zwischen Frequenz- und Amplitudenfluktuationen unterschieden werden kann. Die Frequenzstabilisierung wird hier also zusätzlich durch die Stabilität der Laserintensität limitiert.

Durch die sogenannte Spitzenstabilisierung und das Verfahren nach Pound, Drever und Hall (PDH) [6] können die Probleme der konstanten Frequenzabweichung und die Empfindlichkeit gegenüber Amplitudenfluktuationen beseitigt werden. Bei beiden Verfahren wird die Stabilisierung mit Hilfe von Frequenzmodulation bewerkstelligt.

4.4.2 Modulationsstabilisierung

Zur theoretischen Beschreibung des Problems wird angenommen, dass der einfallende Laserstrahl aus einer ebenen elektro-magnetische Welle $E_0 \exp(i\omega t)$ bestehe. Auf diese Trägerwelle werden durch einen elektrooptischen Phasenmodulator (EOM) Seitenbänder moduliert

$$E_{\text{ein}} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)}. \quad (4.35)$$

Durch die Entwicklung dieser Funktion und der Verwendung von Besselfunktionen $J_i(\beta)$ mit dem Modulationsindex β erhält man [60]

$$E_{\text{ein}} = E_0 [J_0(\beta)e^{i\omega t} + J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}] + \mathcal{O}(J_{n>1}). \quad (4.36)$$

In obiger Gleichung lassen sich das ursprüngliche Trägersignal mit der Frequenz ω sowie die beiden Seitenbänder mit den Frequenzen $\omega \pm \Omega$ erkennen. Für die Berechnung des reflektierten Signals multipliziert man jeden Summanden aus Gleichung (4.36) mit dem dazugehörigen Reflexionskoeffizienten $F(\omega)$, woraus folgt

$$E_{\text{refl}} = E_0 [F(\omega)J_0(\beta)e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega+\Omega)t} - F(\omega - \Omega)J_1(\beta)e^{i(\omega-\Omega)t}]. \quad (4.37)$$

Der Reflexionskoeffizient ist dabei definiert als $F(\omega) = E_{\text{refl}}/E_0$. Mit dem Wissen über das Reflexionsverhalten des Resonators (siehe Gleichung (4.14)) folgt

$$F(\omega) = \frac{E_{\text{refl}}}{E_0} = r \frac{e^{i\Delta\nu_{FSB}} - 1}{1 - r^2 e^{i\Delta\nu_{FSB}}}. \quad (4.38)$$

Das Photodiodensignal der reflektierte Leistung P_{refl} wird durch das Quadrat des Absolutbetrags des elektrischen Feldes E_{refl} gebildet

$$\begin{aligned} P_{\text{refl}} &= |E_{\text{refl}}|^2 \\ &= 2\sqrt{P_c P_s} e^{i\Omega t} \epsilon \\ &+ \mathcal{O}(2\Omega) \\ &+ \text{const}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei P_c bzw. P_s die Leistung im Träger- bzw. im Seitenband beschreibt und die Information des Fehlersignals in ϵ steckt

$$\epsilon = F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega). \quad (4.40)$$

Zur Extraktion von ϵ aus dem Photodiodensignal P_{refl} wird das erhaltene Signal P_{refl} mit dem ursprünglichen Modulationssignal $\sin(\Omega t + \phi)$ mit der Phase ϕ gemischt. Je nach Phase ϕ bleiben entweder der Realteil oder der Imaginärteil von ϵ und höhere Ω -Terme übrig.

Für eine qualitative Betrachtung des Fehlersignals können zwei unterschiedliche Näherungen gemacht werden. Es wird unterschieden zwischen dem Fall, dass die Modulationsfrequenz Ω kleiner als die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators ($\Omega < \delta\nu$) ist und dem Fall dass sie größer ist ($\Omega > \delta\nu$). Es folgt eine Skizzierung der beiden Vereinfachungen.

Die Spitzenstabilisierung

In der Näherung ($\Omega < \delta\nu$), in der die Modulationsfrequenz Ω kleiner als die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators ist, wird zunächst die zeitliche Veränderung der Frequenz betrachtet. Dabei wird angenommen, dass sich die Laserfrequenz adiabatisch verändert, also langsam genug, sodass sich die stehende Welle im Resonator und die einfallende Welle in Phase befinden

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega t + \beta \sin \Omega t) = \omega + \Omega \beta \cos \Omega t. \quad (4.41)$$

Mittels Taylorentwicklung von $P_{\text{refl}}(\omega + \Omega\beta \cos \Omega t)$ um ω mit $\Omega \ll \omega$ und unter der Annahme, dass die reflektierte Leistung die Form $P_{\text{refl}} = P_0 |F(\omega)|^2$ hat, erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} P_{\text{refl}}(\omega + \Omega\beta \cos \Omega t) &\approx P_{\text{refl}}(\omega) + \frac{dP_{\text{refl}}}{d\omega} \Omega\beta \cos \Omega t \\ &= P_{\text{refl}}(\omega) + P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega\beta \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Durch Vergleichen des Ausdrucks aus Gleichung (4.42) mit Gleichung (4.39) und der Verwendung von $2\sqrt{P_c P_s} \approx P_0\beta$ folgt für das Photodiodensignal

$$P_{\text{refl}} \approx P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega\beta \cos \Omega t + \mathcal{O}(2\Omega) + \text{const}. \quad (4.43)$$

Dieses Signal wird wieder mit dem ursprünglichen Modulationssignal gemischt und man erhält das Fehlersignal

$$\epsilon' = P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega\beta \approx 2\sqrt{P_c P_s} \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega. \quad (4.44)$$

In obiger Gleichung ist ersichtlich, dass bei niedriger Modulationsfrequenz die Ableitung des Reflexionsverhaltens des Resonators als Fehlersignal resultiert. In Abbildung 4.7 ist ein Beispiel des Fehlersignals ϵ' der Spitzenstabilisierung dargestellt. Wie bei der Flankenstabilisierung ist der Fangbereich der Spitzenstabilisierung auf die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators begrenzt.

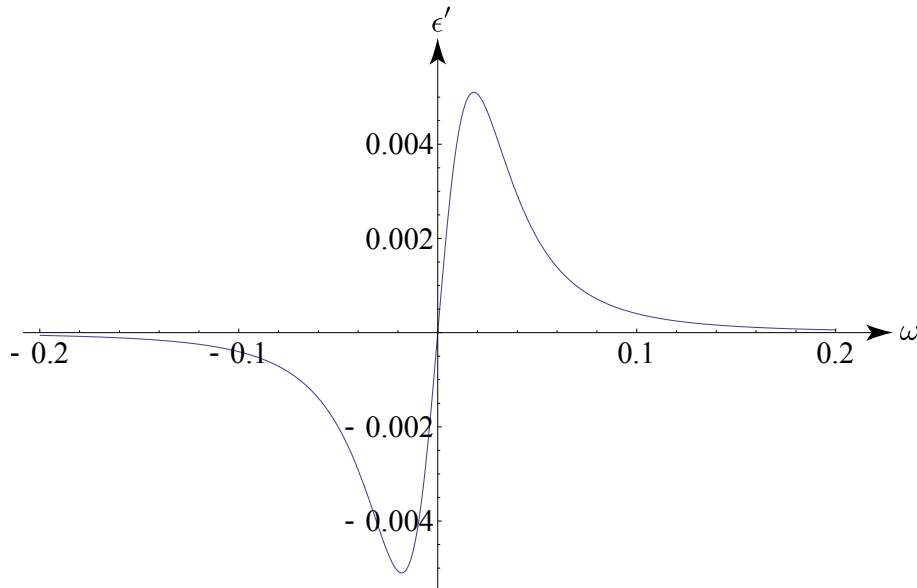


Abbildung 4.7: Fehlersignal ϵ' der Spitzenstabilisierung bei niedriger Modulationsfrequenz $\Omega < \delta\nu$ in Einheiten von $2\sqrt{P_c P_s}\Omega$ aufgetragen gegen die Frequenz ω in Einheiten von $2\Delta\nu_{\text{FSB}}$. Die Kurve wurde mit einer Finesse von $\mathcal{F} = 100$ berechnet.

Die Pound-Drever-Hall-Stabilisierung

Die Stabilisierung nach Pound, Drever und Hall (PDH) [6] ist wie die Spitzenstabilisierung eine Form der Modulationsstabilisierung. Die Grundlagen für die PDH-Stabilisierung wurden bereits im vorigen Kapitel 4.4.2 erläutert.

Das PDH-Fehlersignal ϵ wird durch Gleichung (4.40) beschrieben. Im Gegensatz zur Spitzenstabilisierung betrachtet man den Fall, dass die Modulationsfrequenz Ω größer als die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators ist ($\Omega > \delta\nu$). In Abbildung 4.8 sind zwei Kurven für unterschiedliche Phasen $\phi = 0$ und $\phi = \pi/2$ zwischen dem Photodioden- und dem ursprünglichen Modulationssignal dargestellt. Darin wird ersichtlich, wie sich die Phase auf das Fehlersignal und auf die Steigung um den Nullpunkt auswirkt. Die höchste Steigung wird bei $\phi = 0$ erreicht. Aus diesem Grund wird im Experiment eine Möglichkeit zur Phasenanpassung implementiert.

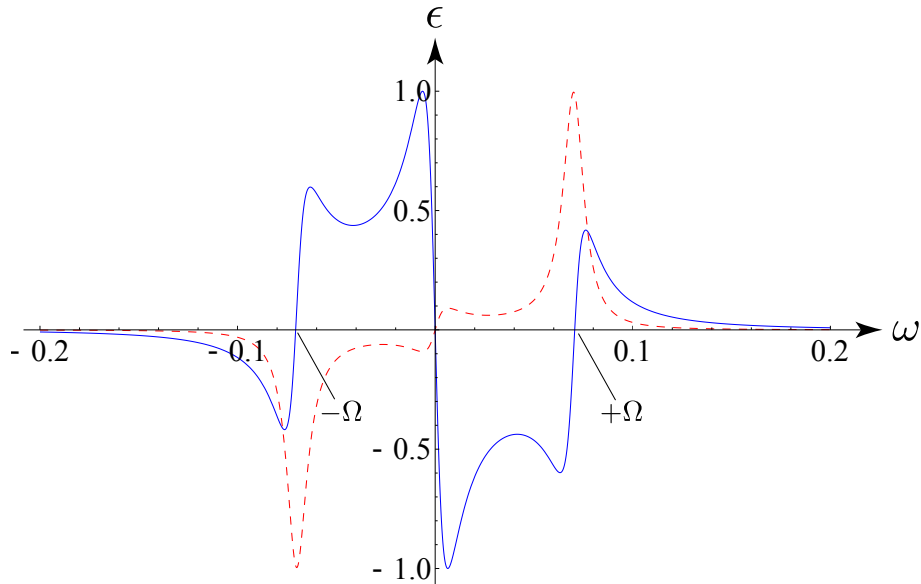


Abbildung 4.8: Realteil $\text{Re}\{\epsilon\}$ mit $\phi = \pi/2$ (rot gestrichelt) und Imaginärteil $\text{Im}\{\epsilon\}$ mit $\phi = 0$ (blau) des PDH-Fehlersignals ϵ bei hoher Modulationsfrequenz $\Omega > \delta\nu$ aufgetragen gegen die Frequenz ω in Einheiten von $2\Delta\nu_{FSB}$. Für die Berechnung wurde eine Finesse von $\mathcal{F} = 1000$ verwendet.

In Abbildung 4.9 ist ϵ für verschiedene Finessen \mathcal{F} des Resonators dargestellt. Darin lässt sich erkennen, dass die Kurven bei steigender Finesse \mathcal{F} schärfer und die Steigung des Signals um den Nulldurchgang steiler wird. Die Seitenbänder sind bei der Frequenz $\pm\Omega$ zu erkennen. Die Seitenbänder bieten den großen Vorteil, dass durch die Wahl der Modulationsfrequenz Ω der Fangbereich der Regelung eingestellt werden kann. Von Null bis zur negativen Modulationsfrequenz $-\Omega$ ist das Fehlersignal stets positiv, wobei die Kurve von Null bis zur positiven Modulationsfrequenz $+\Omega$ stets negativ ist. Ist das Fehlersignal noch von Null unterscheidbar, fährt der Regler innerhalb des Bereichs von $-\Omega$ bis $+\Omega$ immer Richtung Nullpunkt. In der Praxis werden typischerweise Modulationsfrequenzen im Bereich von 1-60 MHz verwendet.

Zur Veranschaulichung kann das PDH-Fehlersignal aus Gleichung (4.40) noch vereinfacht werden. Befindet sich die Laserfrequenz nahe der Resonanz, werden die beiden Seitenbänder nahezu vollständig reflektiert. Daraus folgt $F(\omega \pm \Omega) \approx -1$ und das PDH-Fehlersignal wird rein imaginär

$$\epsilon = F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega) \approx -i2\text{Im}F(\omega). \quad (4.45)$$

Die reflektierte Leistung kann durch folgenden Ausdruck genähert werden

$$P_{\text{refl}} \approx -4\sqrt{P_c P_s} \text{Im}[F(\omega)] \sin \omega t + 2P_s + \mathcal{O}(2\Omega). \quad (4.46)$$

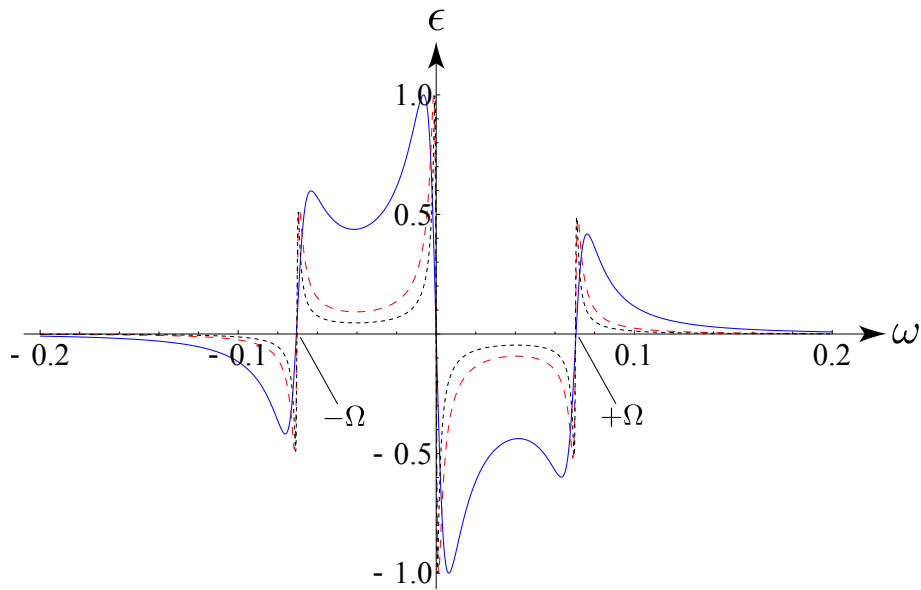


Abbildung 4.9: Imaginärteil $\text{Im}\{\epsilon\}$ mit $\phi = 0$ des PDH-Fehlersignals ϵ bei hoher Modulationsfrequenz $\Omega > \delta\nu$ aufgetragen gegen die Frequenz ω in Einheiten von $2\Delta\nu_{FSB}$. Die verschiedenen Kurven stellen Berechnungen mit unterschiedlichen Finessen $\mathcal{F} = 1000$ (Blau), $\mathcal{F} = 5000$ (Rot gestrichelt) und $\mathcal{F} = 10000$ (Schwarz gepunktet) dar.

Nahe der Resonanz wird die Frequenz ω nun als kleine Abweichung $\delta\omega$ von der Resonanz geschrieben. Für Resonatoren mittlerer und hoher Finesse kann angenommen werden, dass sich die Finesse durch $\mathcal{F} \approx \pi/(1 - R^2)$ beschreiben lässt und der Reflexionskoeffizient $F(\omega)$ lässt sich mit $\delta\omega \ll \delta\nu$ zu folgendem Ausdruck vereinfachen

$$F(\delta\omega) \approx \frac{i \delta\omega}{\pi \delta\nu}. \quad (4.47)$$

Dadurch erhält man eine Abschätzung für das PDH-Fehlersignal in der Nähe einer Resonanz

$$\epsilon \approx -\frac{4}{\pi} \sqrt{P_c P_s} \frac{\delta\omega}{\delta\nu} = -\frac{8\sqrt{P_c P_s}}{\delta\nu} \delta f. \quad (4.48)$$

In erster Ordnung hängt die Steigung des Fehlersignals nur von zwei Faktoren ab. Zum einen spielt das Verhältnis $\sqrt{P_c P_s}$ zwischen der Leistung im Träger zur Leistung in den Seitenbändern eine Rolle. Das Leistungsverhältnis der Seitenbänder zum Träger kann elektronisch optimiert werden. Theoretisch erhält man ein Maximum der Steigung für ein Leistungsverhältnis von $P_s/P_c = 0.42$ oder bei einer Modulationstiefe von $\beta = 1.08$. Zum Anderen trägt die Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators zur Steigung des Fehlersignals bei.

Mit der Linienbreite $\delta\nu$ des Resonators lässt sich die Steigung des Fehlersignals am Besten vergrößern. Diese Linienbreite hängt laut Gleichung (4.30) von der Finesse \mathcal{F} ab, wobei die Finesse \mathcal{F} wiederum vom Reflexionsvermögen R der verwendeten Spiegel abhängt. Je höher die Reflektivität der Spiegel, desto steiler wird das Fehlersignal (siehe auch Abbildung 4.9).

Abbildung 4.10 zeigt den Vergleich der vollständigen Theorie laut Gleichung (4.40) in Blau und zwei Näherungsstufen laut Gleichungen (4.46) und (4.48) in Rot gestrichelt bzw. Schwarz gepunktet. Diese Abbildung zeigt, wie gut die Näherungen um den Nulldurchgang des Fehlersignals sind. Daraus kann geschlossen werden, dass die Modulationsfrequenz Ω zwar den

Fangbereich vorgibt, aber in erster Ordnung auf die Steigung am Nulldurchgang und somit auf die Regelung im stabilisierten Zustand keinen Einfluss hat.

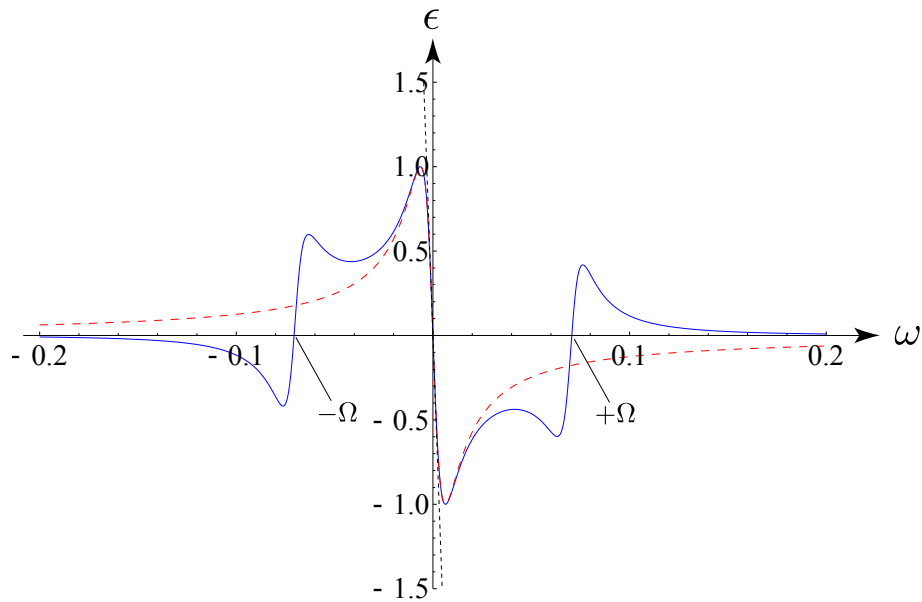


Abbildung 4.10: PDH-Fehlersignal ϵ in Blau (Gleichung (4.40)) mit verschiedenen Näherungsstufen in Rot gestrichelt (Gleichung (4.46)) und in Schwarz gepunktet (Gleichung (4.48)) mit einer Finesse von $\mathcal{F} = 1000$ aufgetragen gegen die Frequenz ω in Einheiten von $2\Delta\nu_{FSB}$.

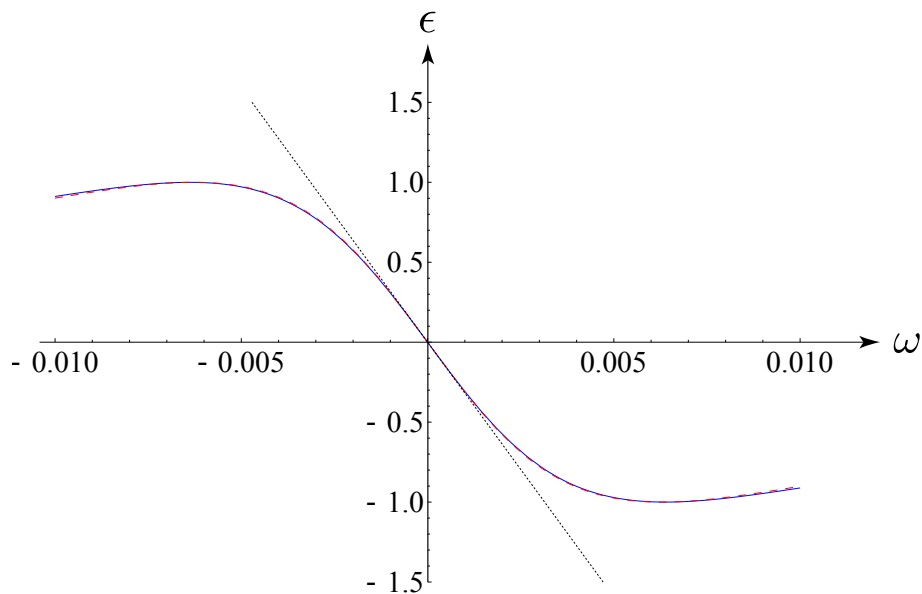


Abbildung 4.11: Vergrößerung des PDH-Fehlersignals aus Abbildung 4.10 um den Nullpunkt. Das PDH-Fehlersignal ϵ in Blau (Gleichung (4.40)) und Näherungen in Rot gestrichelt (Gleichung (4.46)) und in Schwarz gepunktet (Gleichung (4.48)) mit einer Finesse von $\mathcal{F} = 1000$ aufgetragen gegen die Frequenz ω in Einheiten von $2\Delta\nu_{FSB}$.

4.5 Vergleichsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser

Für die Charakterisierung der Linienbreite und der Driftraten des 729 nm Lasers werden Schwebungsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser [13] gemacht.

Eine Schwebungsmessung wird durch räumliche Überlagerung von zwei Laserstrahlen an einer Photodiode bewerkstelligt. Mit der Photodiode wird die Intensität der überlagerten Strahlen nachgewiesen. Es wird also eine Überlagerung der Intensitäten der beiden Strahlen gemessen. Mathematisch betrachtet man eine Überlagerung von zwei ebenen Wellen

$E(t)_{\text{ref}} = E_{0,\text{ref}} \exp(i(\omega_{0,\text{ref}}t + \phi(t)_{\text{ref}}))$ und $E(t)_{\text{test}} = E_{0,\text{test}} \exp(i(\omega_{0,\text{test}}t + \phi(t)_{\text{test}}))$. Damit folgt für das Photodiodensignal

$$\begin{aligned} I(t) &\propto |E(t)_{\text{ref}} + E(t)_{\text{test}}|^2 \\ &\propto E(t)_{\text{ref}} E(t)_{\text{test}}^* + E(t)_{\text{ref}}^* E(t)_{\text{test}} \\ &= 2\text{Re}\{E(t)_{\text{ref}} E(t)_{\text{test}}^*\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die Frequenz ω , bei der die Schwebung im Photodiodensignal $I(t)$ auftritt, errechnet sich wie folgt

$$I(t) \propto E(t)_{\text{ref}} E(t)_{\text{test}}^* \propto e^{i(\omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{test}})t} = e^{i\omega t}. \quad (4.50)$$

Aus der Frequenz ω der Schwebung erhält man die Differenzfrequenz der überlagerten Laserstrahlen

$$\omega = \omega_{\text{ref}} - \omega_{\text{test}}. \quad (4.51)$$

Für die Charakterisierung eines Lasers im Frequenzraum ist die spektrale Leistungsdichte von Interesse. Die spektrale Leistungsdichte $S_{E_{\text{ref}}, E_{\text{test}}}(\nu)$ der Schwebung lässt sich mit Hilfe der Fouriertransformation der Intensität berechnen

$$S_{E_{\text{ref}}, E_{\text{test}}}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu t} I(t) dt. \quad (4.52)$$

Zur Analyse der spektralen Leistungsdichte der Schwebung muss zuerst das Leistungsspektrum der einzelnen Laser betrachtet werden. Dieses Leistungsspektrum kann ebenfalls mit dem Ansatz von ebener Welle berechnet werden. Bei einer gegebenen spektralen Dichte $S_{\delta\nu}(f)$ des Frequenzrauschens errechnet sich die Autokorrelationsfunktion $\Gamma_E(\tau) = E^*(t)E(t + \tau)$ dieser ebenen Welle zu [61]

$$\Gamma_E(\tau) = E_0^2 e^{i2\pi\nu_0\tau} \exp\left\{-2 \int_0^{\infty} S_{\delta\nu}(f) \frac{\sin^2(\pi f\tau)}{f^2} df\right\}, \quad (4.53)$$

wobei $\delta\nu = \nu - \nu_0$ die Frequenzabweichung des Lasers um den Mittelwert ν_0 beschreibt. Nach dem Wiener-Khintchine Theorem [61] kann die spektrale Leistungsdichte, welche von der Photodiode gemessen wird, durch die Fouriertransformation der Autokorrelationsfunktion berechnet werden

$$S_E(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\nu\tau} \Gamma_E(\tau) d\tau. \quad (4.54)$$

Dieses Integral kann im Allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Es gibt jedoch Lösungen für den Spezialfall einer Gleichverteilung des Frequenzrauschens $S_{\delta\nu}(f) = h_0$, wobei h_0 die mittlere Amplitude der Frequenzfluktuationen beschreibt. Ein solches Rauschen wird

auch als weißes Rauschen bezeichnet, da es für alle Frequenzen gleich stark vorhanden ist. Je nach Grenzfrequenz f_c , ab der das Rauschen den Wert 0 annimmt, gibt es zwei verschiedene Grenzwerte [61, 62]. Für den Fall $f_c \gg h_0$ folgt für die spektrale Leistungsdichte $S_E(\nu)$ eine Lorentzkurve

$$S_E(\nu) = E_0^2 \frac{h_0}{(\nu - \nu_0)^2 + (\pi h_0/2)^2}, \quad (4.55)$$

mit einer vollen Halbwertsbreite (engl. *Full Width at Half Maximum*) von $\text{FWHM} = \pi h_0$. Dagegen nimmt die Leistungsdichte für den Fall $f_c \ll h_0$ eine Gaußkurve an

$$S_E(\nu) = E_0^2 \sqrt{\frac{2}{\pi h_0 f_c}} e^{-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2h_0 f_c}}, \quad (4.56)$$

mit einer Breite von $\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln(2) h_0 f_c}$, welche nun von der Grenzfrequenz f_c abhängt.

Die von der Photodiode gemessene Intensität $I(t)$ hängt nur von der Multiplikation der einzelnen Wellen ab ($E(t)_{\text{ref}} E(t)_{\text{test}}^*$). Da die Autokorrelation ebenfalls durch die Multiplikation der Wellen berechnet wird, folgt für die spektrale Leistungsdichte des Photodiodensignals $S_{E_{\text{ref}}, E_{\text{test}}}(\nu)$ aus dem Faltungstheorem für die Fouriertransformation [63]

$$S_{E_{\text{ref}}, E_{\text{test}}}(\nu) = \mathcal{F}\{\Gamma_{E_{\text{ref}}} \cdot \Gamma_{E_{\text{test}}}\} = \mathcal{F}\{\Gamma_{E_{\text{ref}}}\} * \mathcal{F}\{\Gamma_{E_{\text{test}}}\} = S_{E_{\text{ref}}}(\nu) * S_{E_{\text{test}}}(\nu). \quad (4.57)$$

Die spektrale Leistungsdichte der Schwebungsmessung wird also durch die Faltung (*), oder Konvolution, der Leistungsdichten der einzelnen Laser bestimmt.

Für den Fall, dass die Laser eine gaußförmige Leistungsdichte besitzen, muss die Faltung von einer Gaußkurve $S_{E_{\text{ref}}}(\nu)$ mit einer Gaußkurve $S_{E_{\text{test}}}(\nu)$ berechnet werden. Dies führt wieder auf eine Gaußkurve $S_{E_{\text{ref}}, E_{\text{test}}}(\nu)$, jedoch mit neuer Breite [63]

$$\text{FWHM}_{\text{Gauss}} = \sqrt{\text{FWHM}_{\text{Gauss}}(E_{\text{ref}})^2 + \text{FWHM}_{\text{Gauss}}(E_{\text{test}})^2}. \quad (4.58)$$

Besitzen die Laser eine lorentzförmige Leistungsdichte, muss die Faltung zweier Lorentzkurven berechnet werden, was abermals auf eine Lorentzkurve mit veränderter Breite führt [63]

$$\text{FWHM}_{\text{Lorentz}} = \text{FWHM}_{\text{Lorentz}}(E_{\text{ref}}) + \text{FWHM}_{\text{Lorentz}}(E_{\text{test}}). \quad (4.59)$$

Kapitel 5

Charakterisierung der optischen Resonatoren

Im Rahmen dieser Masterarbeit wird ein kommerzielles Diodenlasersystem verwendet, welches mit Hilfe von optischen Resonatoren stabilisiert wird. Im nichtstabilisierten Betrieb besitzt der verwendete Diodenlaser eine Linienbreite im Bereich von einigen wenigen MHz. Ziel dieses Aufbaus ist es, die Linienbreite des Lasers um etwa fünf bis sechs Größenordnungen in einen Bereich von < 10 Hz zu verkleinern.

Aufgrund der großen intrinsischen Linienbreite der Laserdiode wird der Aufbau in zwei Abschnitte aufgeteilt. Als Erstes wird die Laserdiode mittels optischem Resonator mittlerer Finesse vorstabilisiert (siehe Kapitel 5.2). Dieser Aufbau vereinfacht die weitere Handhabung des Lasers und entlastet den zweiten Regelkreis zur Frequenzstabilisierung. Im zweiten Schritt wird der Laser mit dem Resonator hoher Finesse in das gewünschte Linienbreitenregime von < 10 Hz stabilisiert (siehe Kapitel 5.3). In den folgenden Kapiteln werden der mechanische Aufbau und einige wichtige Eigenschaften dieser beiden Resonatoren erklärt. Hinsichtlich der Komplexität des zweistufigen optischen Aufbaus wird zunächst ein Überblick des optischen Aufbaus gegeben.

5.1 Übersicht des optischen Aufbaus

Damit die Elemente zur Frequenzstabilisierung in den anschließenden Kapiteln einzeln erklärt werden können, wird mit einer Übersicht des optischen Aufbaus um das 729 nm Lasersystem begonnen. In Abbildung 5.1 und dessen Beschreibung sind die wichtigen Elemente und deren Zusammenhang, von der Erzeugung des 729 nm Laserstrahls im Diodenlaser, über die Komponenten zur Frequenzstabilisierung, bis hin zur Aufbereitung des frequenzstabilen Laserstrahls im Diodenverstärker für die Experimente, dargestellt. Der abgebildete Aufbau befindet sich gemeinsam mit dem 729 nm Lasersystem, dem Resonator mittlerer Finesse und anderen Lasersystemen auf einem vibrationsisolierten optischen Tisch. Die Frequenzen der AOMs wurden dabei so ausgewählt, dass einerseits die Frequenzlücke zwischen den Moden der Resonatoren mittlerer und hoher Finesse überbrückt werden kann und andererseits das vom Diodenverstärker bereitgestellte Licht im gewünschten Frequenzbereich des 729 nm Übergangs der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen liegt.

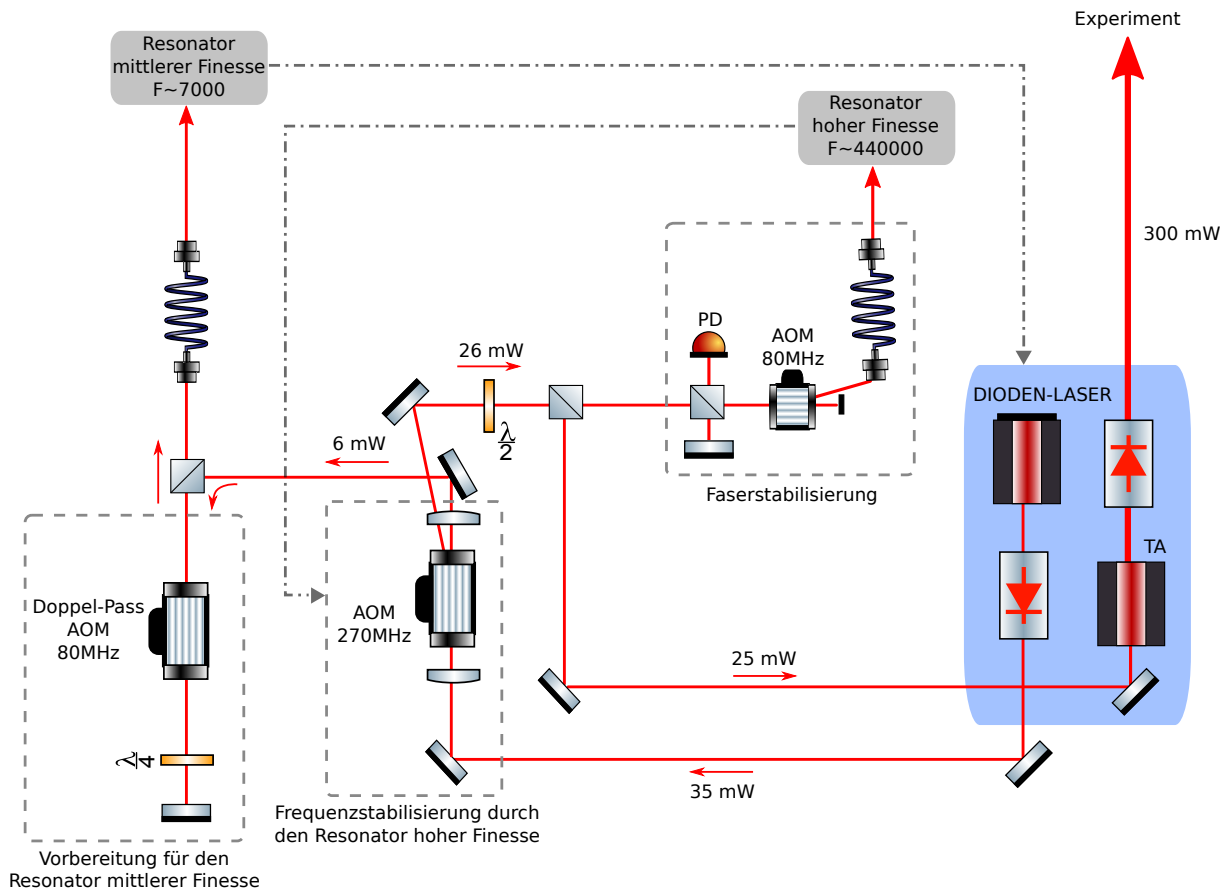


Abbildung 5.1: Übersicht des optischen Aufbaus. Das Licht des 729 nm Diodenlasers wird über einen optischen Isolator mit einer Ausgangsleistung von ~ 35 mW durch einen 270 MHz AOM (Grau eingerahmt: Frequenzstabilisierung durch den Resonator hoher Finesse) geschickt. Die unveränderte nullte Ordnung wird über einen 80 MHz AOM in Doppelpass Konfiguration (Grau eingerahmt: Vorbereitung für den Resonator mittlerer Finesse) zum Resonator mittlerer Finesse gesendet. Die erste Ordnung des 270 MHz AOMs wird mit einem $\lambda/2$ und einem darauf folgenden polarisierenden Strahlteiler aufgeteilt. Weniger als 1 mW des Laserstrahls wird über eine stabilisierte Glasfaser (Grau eingerahmt: Faserstabilisierung) zum Resonator hoher Finesse weitergeleitet. Der Großteil des Lichts (~ 25 mW) wird dann durch einen trapezförmigen Diodenverstärker (TA) für die Experimente aufbereitet. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

5.2 Optischer Resonator mittlerer Finesse

5.2.1 Mechanischer Aufbau

Wie in Kapitel 3 beschrieben ist, werden für die optische Manipulation der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen vier frequenzstabile Laser mit den Wellenlängen 397 nm, 729 nm, 854 nm und 866 nm benötigt. Aufgrund der unterschiedlichen Wellenlängen ist für jeden Laser ein eigener optischer Resonator notwendig. Zum Schutz vor thermischen, mechanischen und akustischen Störungen werden die Resonatoren in einer Vakuumkammer bei einem Druck von $p < 6 \cdot 10^{-8}$ mbar verbaut.

Ein Resonator besteht aus einem zylindrischen Abstandhalter an dessen Enden die Spiegel angebracht sind. Der Abstandhalter für den 729 nm Laser ist aus Zerodur¹ mit einer Länge von ~ 100 mm hergestellt [64]. Das Spiegelpaar besteht aus einem Keilsubstrat² mit einem Keilwinkel von 1° und einem sphärisch konkaven Spiegelsubstrat³ mit einem Krümmungsradius von 250 mm. Für die plan-konkave Anordnung des Spiegelpaars siehe Abbildung 4.6 in Kapitel 4.3.6.

Die Substrate sind aus Quarzglas gefertigt und dielektrisch mit einem Reflexionsvermögen von $R = 99.95(1)$ beschichtet. Daraus resultiert eine Finesse von $\mathcal{F} = 6300 \pm 2500$. Die vier Kavitäten sind parallel zueinander in einer Vakuumkammer platziert. Mit Hilfe von Sichtfenstern in der Vakuumkammer wird der optische Zugang auf beiden Seiten gewährleistet. Dieser Aufbau ist von einer temperaturstabilisierten Box umgeben und befindet sich auf einem vibrationsisolierten optischen Tisch. Details zum mechanischen Aufbau des Resonators mittlerer Finesse befinden sich in der Dissertation von Muir Kumph [64].

5.2.2 Optischer Aufbau

Ausgehend vom Lasersystem (als Überblick siehe Kapitel 5.1) wird ein Teil des 729 nm Lichts über eine polarisationserhaltende Einmodenfasern zum optischen Aufbau mit dem Resonator mittlerer Finesse geleitet (siehe Abbildung 5.2). Von der Faser aus passiert der Strahl erst ein Glan-Thompson-Prisma und anschließend einen EOM⁴. Das Glan-Thompson-Prisma gewährleistet, dass der Strahl beim Durchqueren des EOMs linear polarisiert ist. Besitzt der Strahl keine perfekte lineare Polarisation entlang der optischen Achse des EOM-Kristalls, kommt es zur *remanenten Amplitudenmodulation* [65]. Diese remanente Amplitudenmodulation würde die Frequenzstabilisierung limitieren.

Nach dem EOM wird der Strahl durch einen 50:50 Strahlteiler aufgeteilt. Normalerweise würde man hier einen polarisierenden Strahlteiler in Kombination mit einem $\lambda/4$ Plättchen platzieren (siehe Kapitel 5.3.2 Abbildung 5.6), wodurch die gesamte Reflexion des Resonators auf die Photodiode (PD1) geleitet werden könnte. Der linear polarisierte Strahl hätte nach dem $\lambda/4$ Plättchen zirkuläre Polarisation. Zusammen mit der doppelbrechenden Eigenschaft des Spiegelsubstrats dieses Resonators bildet sich ein ordentlicher und ein außerordentlicher Strahl im Spiegelsubstrat aus. Aufgrund dieser beiden Strahlen entstehen zwei eng nebeneinander liegende Moden im Resonator. Für die Gewährleistung des Einmodenbetriebs des Resonators wird ein normaler 50:50 Strahlteiler anstelle eines polarisierenden Strahlteilers mit $\lambda/4$ Plättchen eingesetzt. Dabei wird in Kauf genommen, dass drei Viertel des Lichts durch den 50:50 Strahlteiler

¹ ZERODUR® ist ein glaskeramischer Werkstoff der Schott AG ² PR279/99.95(1)/AR PL1-0525UV der Firma Laser Components GmbH ³ PR279/99.95(1)/AR SM0525-0.25 der Firma Laser Components GmbH ⁴ LINOS LM0202

verloren geht.

Nach dem Strahlteiler wird das Licht durch eine Linse, welche zur Modenanpassung an den Resonator dient, in das Interferometer eingekoppelt. Die Transmission wird mit Hilfe einer Photodiode (PD2) und einer CCD-Kamera aufgezeichnet. Die Hälfte des reflektierten Anteils wird über den 50:50 Strahlteiler auf eine weitere Photodiode (PD1) geleitet. Das elektrische Signal dieser Photodiode wird zur Generierung des PDH-Fehlersignals verwendet.

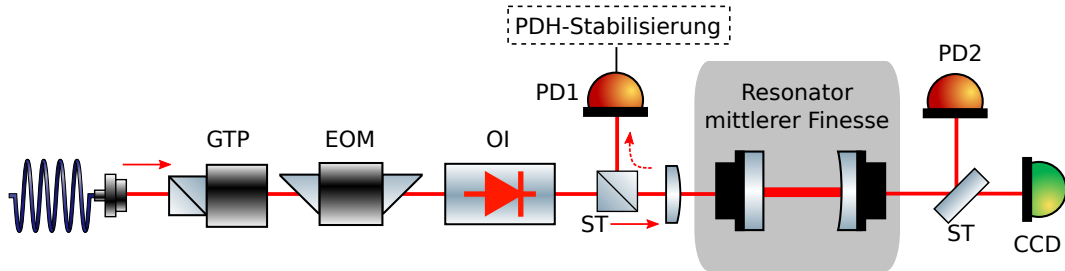


Abbildung 5.2: Skizze vom optischen Aufbau des Resonators mittlerer Finesse. Der 729 nm Laserstrahl wird über ein Glan-Thompson-Prisma (GTP), einen elektrooptischen Modulator (EOM), einen optischen Isolator (OI), einen Strahlteiler (ST) und eine Linse in den Resonator eingekoppelt. Eine Photodiode (PD2) und eine CCD-Kamera dienen zur Überwachung der Transmission. Die Photodiode (PD1) zeichnet das vom Resonator reflektierte Signal auf. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

5.2.3 Resonatorparameter

Freier Spektralbereich

In dieser Messung wird der freie Spektralbereich direkt durch den Frequenzabstand zweier benachbarten TEM_{00} -Moden gemessen. Als Frequenzreferenz wird ein stabiler Referenzlaser verwendet. Dieser Laser eignet sich als Referenz, da er auf den $S_{1/2} - D_{5/2}$ Übergang bei 729 nm des $^{40}\text{Ca}^+$ Ions stabilisiert ist. Durch Schwebungsmessungen mit dem Referenzlaser kann, wie in Kapitel 4.5 beschrieben ist, die Frequenz unseres Lasers relativ zum Referenzlaser festgestellt werden.

Zur Bestimmung des freien Spektralbereichs wird unser Laser auf die m -te TEM_{00} Mode des Resonators mittlerer Finesse stabilisiert. Mit Hilfe eines Frequenzanalysators wird die Frequenz ν_m der m -ten TEM_{00} Mode gemessen. Anschließend wird unser Laser auf die darüberliegende $(m + 1)$ -te Mode des Resonators stabilisiert, wobei erneut die Frequenz ν_{m+1} gemessen wird. Durch Subtraktion dieser beiden Frequenzen erhält man den freien Spektralbereich $\Delta\nu_{\text{FSB}} = \nu_{m+1} - \nu_m$.

Bei einer Resonatorlänge von ~ 100 mm [64] ergibt sich ein erwarteter Modenabstand von ~ 1.5 GHz. Dadurch wird eine Photodiode mit einer Bandbreite von 1.5 GHz benötigt. Mit großer Lichtleistung ist es gelungen, das Signal mit einer Photodiode mit 1 GHz Bandbreite nachzuweisen. Die ausgewerteten Messungen ergeben einen freien Spektralbereich von:

$$\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.57499(1) \text{ GHz} \quad (5.1)$$

Aufgrund des geringen Drucks von $p < 6 \cdot 10^{-8}$ mbar innerhalb der Vakuumkammer kann ein Brechungsindex von $n \approx 1$ angenommen werden. Mit Hilfe von Gleichung (4.19) errechnet

sich der Spiegelabstand L zu:

$$L = \frac{c}{2\Delta\nu_{\text{FSB}}} = 95.1727(5) \text{ mm} \quad (5.2)$$

Linienbreite

Zur Bestimmung der Finesse des Spiegelsystems wird die Linienbreite des Resonators gemessen. In diesem Fall wird die Linienbreite über Spektroskopie des Resonators mit dem 729 nm Laser festgestellt. Dabei wird der Diodenstrom sägezahnförmig moduliert, wodurch die Frequenz des Lasers durchgestimmt wird. Mit Hilfe einer Photodiode wird das Transmissionssignal (siehe Abbildung 5.3) des Resonators mittlerer Finesse aufgenommen.

Der Abstand der Seitenbänder zum Träger entspricht der Modulationsfrequenz $f_M = 7.3 \text{ MHz}$ des EOMs. Dadurch kann die Zeitachse des Oszilloskops in Einheiten der EOM Frequenz geeicht werden. In Abbildung 5.3 werden die Zentralfrequenzen und Linienbreiten der Seitenbänder und des Trägers durch lorentzförmige Regressionen bestimmt.

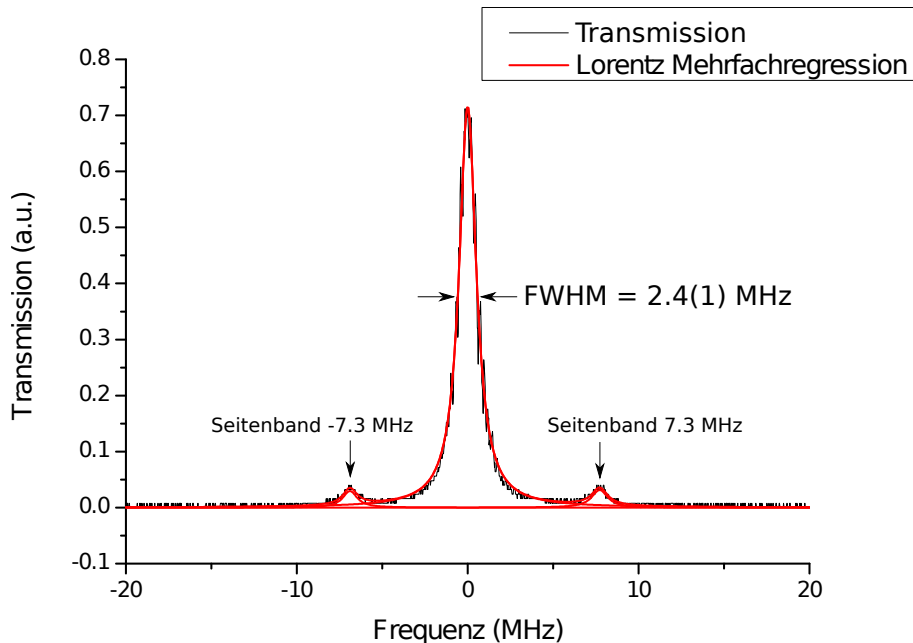


Abbildung 5.3: Transmission des Resonators mittlerer Finesse. Aufgetragen ist das Photodiodensignal PD2 hinter der Kavität auf die frequenzgeeichte Achse des Oszilloskops.

Bei der Spektroskopie wird ähnlich zur Schwebungsmessung (siehe Kapitel 4.5) die Faltung vom Leistungsspektrum des Lasers mit dem Leistungsspektrum des Resonators gemessen. Es kann dabei angenommen werden, dass der Laser sowie der Resonator ein lorentzförmiges Leistungsspektrum besitzen. Dadurch addieren sich die Linienbreiten der Systeme zur Gesamtlinienebreite $\delta\nu = \delta\nu_L + \delta\nu_R$, wobei $\delta\nu_L$ bzw. $\delta\nu_R$ die Linienbreite des Lasers bzw. des Resonators beschreibt. Da beide Größen unbekannt sind, müsste die Linienbreite des Lasers viel kleiner sein als die des Resonators ($\delta\nu_L \ll \delta\nu_R$), um vernachlässigt werden zu können. Die erwartete spektrale Leistungsdichte $\delta\nu_L$ der ungestabilisierten Laserdiode liegt jedoch im MHz Bereich. Im Vergleich dazu beträgt die laut Herstellerangaben berechnete Finesse $\mathcal{F} = 6300 \pm 2500$ (siehe

Kapitel 5.2.1), woraus eine volle Halbwertsbreite für den Resonator von $\delta\nu_R = 250(100)$ kHz folgt.

Die Messung in Abbildung 5.3 bestätigt diese Überlegungen. Anhand der Gesamtlinienbreite $\delta\nu = 2.4(1)$ MHz und der spektralen Breite des Resonators errechnet sich die Linienbreite des Lasers zu

$$\delta\nu_L = \delta\nu - \delta\nu_R = 2.2(1) \text{ MHz.} \quad (5.3)$$

Wie zu erwarten war, ist die spektrale Leistungsdichte des Lasers größer als die des Resonators.

Aufgrund des breiten Leistungsspektrums des Lasers kann die Finesse des Resonators nicht genauer bestimmt werden. In Kapitel 5.3.3 wird die Linienbreite des Resonators hoher Finesse über eine andere Methode bestimmt. Dabei wird diese durch die Messung der Lebensdauer einer angeschwungenen Mode festgestellt. Das Verfahren bietet den Vorteil, dass es nicht abhängig von der Linienbreite des verwendeten Lasers ist.

5.2.4 Frequenzstabilisierung

Zur Stabilisierung der Frequenz wird die PDH-Methode verwendet. Die wichtigsten Bauteile und deren Zusammenhang sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

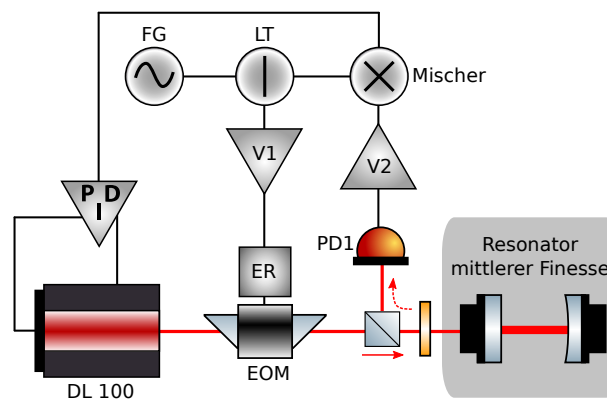


Abbildung 5.4: Skizze vom Aufbau der PDH-Stabilisierung, wobei nur die, für die Stabilisierung, wichtigen Elemente eingezeichnet sind. Das Signal des Frequenzgenerators (FG) wird an einem Leistungsteiler (LT) aufgeteilt. Die eine Hälfte treibt über einen Verstärker (V1) einen elektrischen Resonator (ER) und somit den EOM. Mit der anderen Hälfte wird das verstärkte (V2) Fehlersignal der Photodiode (PD1) in einem Mischer heruntergemischt. Das resultierende PDH-Fehlersignal wird an den PID-Regler angeschlossen. Dieser Regler stabilisiert die Frequenz des Lasers über eine schnelle Rückkopplung auf den Strom und eine langsame Rückkopplung auf den Gitterpiezo. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

Der Funktionsgenerator⁵ erzeugt das Modulationssignal, welches über einen 50:50 Leistungsteiler⁶ auf einen Mischer⁷ und einen Verstärker⁸ weitergeleitet wird. Der Verstärker treibt über einen elektrischen Resonator den EOM⁹. Durch den EOM wird das Licht des Diodenlasers¹⁰ phasenmoduliert.

Die reflektierte Lichtleistung des Resonators mittlerer Finesse wird von der Photodiode¹¹ nachgewiesen. Dieses Signal wird verstärkt¹² und mit dem Frequenzmischer verbunden. Das

⁵ SRS DS345 ⁶ MiniCircuits ZMSC-2-1+ ⁷ MiniCircuits ZAD-1 ⁸ MiniCircuits ZHL-1-2W-S ⁹ LINOS LM 0202 ¹⁰ Toptica DL100 ¹¹ Thorlabs PDA10A-EC ¹² MiniCircuits ZFL-1000+

PDH-Fehlersignal wird durch Mischen des ursprünglichen Modulationssignals mit dem Photodiodensignal generiert. Dieses Fehlersignal dient als Eingangsgröße für den PID-Regler¹³.

Ausgehend von diesem Regler gibt es zwei verschiedene Rückkopplungen. Zum Einen wird das Stellsignal über einen langsamen Zweig auf den Piezo des Stabilisierungsgitters in Littrow-Konfiguration zurückgeführt. Die langsame Piezo-Rückkopplung besitzt eine Bandbreite von ~ 10 kHz [20]. Dieser Piezo bietet allerdings die Möglichkeit, die Frequenz des Lasers über einen relativ großen Bereich ~ 15 GHz ohne Modensprung zu verstimmen. Zum Anderen wird der schnelle Teil des Stellsignals mit einer Bandbreite von ~ 45 MHz (begrenzt durch den FALC110 Regler [20]) über den Strommodulationsanschluss des DL100 zurückgekoppelt. Mit Hilfe dieser beiden Rückkopplungen ist es möglich, die Linienbreite des Lasers in den kHz-Bereich zu stabilisieren (siehe Kapitel 6).

5.3 Optischer Resonator hoher Finesse

5.3.1 Mechanischer Aufbau

Da der optische Resonator hoher Finesse die Lasercharakteristik (Linienbreite, Drift, etc.) vorgibt, muss bei der mechanischen Konstruktion darauf geachtet werden, dass die beiden hochreflektierenden Spiegel bestmöglich von äußeren Störungen geschützt werden. Die Hauptstörungen sind mechanische Vibrationen (z.B. des Gebäudes), akustisches Rauschen in der Luft und Temperaturschwankungen. In dieser Arbeit wird ein optischer Resonator, der bereits in der Diplomarbeit von Gerhard Kirchmaier [66] aufgebaut wurde, wiederverwendet. Der prinzipielle Aufbau dieses Systems folgt einem Vorschlag von Notcutt und anderen [9]. Eine schematische Skizze des hier verwendeten Aufbaus ist in Abbildung 5.5 dargestellt.

Der Resonator besteht aus einem Abstandshalter, an dem hoch reflektierende Spiegel optisch kontaktiert sind. Die Spiegel sind vom Hersteller¹⁴ für eine Finesse zwischen 300000 und 500000 spezifiziert. Die Anordnung der Spiegel ist plan-konkav, mit einem Krümmungsradius des zweiten Spiegels von $r = 500$ mm. Eine Skizze der plan-konkaven Anordnung des Spiegelpaars ist in Abbildung 4.6 in Kapitel 4.3.6 dargestellt. Der Abstandshalter mit der Länge $L \approx 77.5$ mm ist aus sogenanntem Ultra-Low-Expansion (ULE) Material hergestellt, welches einen sehr geringen Ausdehnungskoeffizienten von 10^{-8} K^{-1} zwischen 26°C und 36°C aufweist¹⁵. Der ULE-Abstandshalter ist, wie in Abbildung 5.5 dargestellt, mit Hilfe einer zylindrischen Halterung mit Kreuzstruktur aus Edelstahl (1.4435), vertikal montiert. Durch vertikale Vibrationen getrieben, schwingen die Spiegel gemeinsam um ihr Massenzentrum und die vertikale Bewegung der Spiegel relativ zueinander kann minimiert werden.

Damit die Änderung des Brechungsindex zwischen den Spiegeln verhindert werden kann, befindet sich der Resonator im Hochvakuum bei einem Druck von $< 3 \cdot 10^{-7}$ mbar. Dieser Druck wurde an der Spannungsversorgung¹⁶ der Ionenpumpe gemessen. Die Vakuumkammer ist auf Teflonfüßen, welche die Vibrationsübertragung minimieren, in einer Aluminiumbox aufgestellt. Die Aluminiumbox ist mit Heizmatten und einer folgenden Isolationsschicht bestückt. Zusammen mit einem elektrischen Regler¹⁷ wird die Box über die Heizmatten temperaturstabilisiert. Die Fenster in der Aluminiumbox und der Vakuumkammer gewährleisten den optischen

¹³ Toptica FALC110 ¹⁴ Advanced Thin Films ¹⁵ Herstellerangaben von Corning Inc. ¹⁶ PS-10 ION PUMP POWER SUPPLY von Thermionics Northwest, Inc. ¹⁷ SRS SIM960

Zugang zum Resonator. Diese Fenster sind schräg zueinander installiert, um Etalon-Effekte zu verhindern.

Der Aufbau ist inklusive optischen Elementen auf einem optischen Versuchstisch montiert. Dieser Tisch wird von einer Vibrations-Isolations-Plattform¹⁸ gegen mechanische Vibrationen geschützt. Zusätzlich steht die Plattform auf einem schweren Granitblock. Der Block wirkt, zusammen mit den am Boden angebrachten Gummidämpfern, als mechanischer Tiefpass.

Zur thermischen und akustischen Entkopplung vom restlichen Labor wird rund um die Vakuumkammer eine Holzbox aufgebaut. Diese Holzbox ist innen mit Bleimatten, gefolgt von akustischen Dämmmatten, ausgekleidet. Die Bleimatten verbessern durch ihre Masse das Tiefpassverhalten der Holzbox. Die akustischen Dämmmatten mit pyramidenförmiger Oberfläche, mit einer Pyramidenhöhe von 4-6 cm, vermindern das Entstehen von akustischen Stehwellen innerhalb der Box.

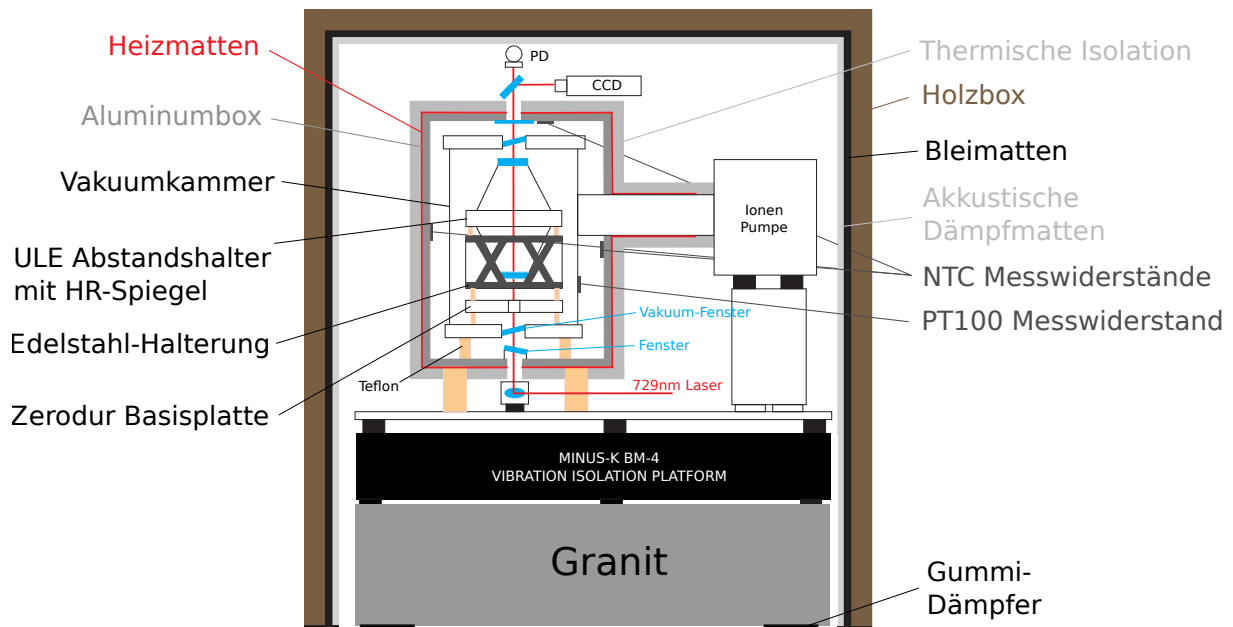


Abbildung 5.5: Aufbauskiizze des Resonators hoher Finesse. Der Resonator besteht aus einem ULE-Abstandshalter und zwei hochreflektierenden Spiegel und ist mit Hilfe einer zylindrischen Halterung mit Kreuzstruktur aus Edelstahl (1.4435), einer Zerodur-Basisplatte und Teflonfüßen in einer Vakuumkammer montiert. Diese Kammer befindet sich in einer mit Heizmatten temperaturstabilisierten Aluminiumbox. Der Aufbau inklusive optischen Elementen befindet sich auf einer Vibrations-Isolations-Plattform. Diese wiederum steht auf einem, von Gummidämpfern gestützten, Granitblock. Der gesamte Aufbau befindet sich in einer Holzbox mit innen angebrachten Bleimatten und akustischen Dämmmatten. Die Abbildung ist in veränderter Form aus Material von [66] bereitgestellt.

5.3.2 Optischer Aufbau

Der optische Aufbau gestaltet sich ähnlich wie beim Resonator mittlerer Finesse (siehe Kapitel 5.2.2). Ausgehend vom Lasersystem (siehe Kapitel 5.1 Abbildung 5.1) wird ein Teil des

¹⁸ MINUS-K BM-4

Laserstrahl über eine polarisationserhaltende Einmodenfaser zum Aufbau geleitet. Wie in Abbildung 5.6 dargestellt ist, passiert der Strahl als Erstes ein Keilplättchen aus Glas, welches rund 4% des Lichts zurück in die Faser reflektiert. Dieses reflektierte Licht wird später zur Kompensation des Faserrauschens verwendet (siehe Kapitel 5.3.4). Damit keine Etaloneffekte auftreten können, ist das Keilplättchen in einem Winkel von 4° geschnitten. Ein darauf folgender optischer Isolator verhindert die Rückkopplung der Reflexion des Resonators in die Laserdiode. Ein 1 GHz akustooptischer Modulator (AOM¹⁹) passt die Frequenz des Lasers an die Resonanzfrequenz des optischen Resonators an. Im weiteren Aufbau folgt, wie im Aufbau für den Resonator mittlerer Finesse ein Glan-Thompson-Prisma und ein EOM²⁰ zur Modulation der Seitenbänder. Danach passiert der Laserstrahl einen polarisierenden Strahlteiler welcher zusammen mit dem darauf folgenden $\lambda/4$ -Wellenplättchen gewährleistet, dass die Reflexion des Resonators auf eine Photodiode (PD1²¹) gelenkt wird. Zur Überwachung der Transmission werden eine Photodiode (PD2²²) und eine CCD-Kamera installiert. Die benötigte Strahltaile am Ort des planen Eingangspiegels des Resonators errechnet sich mit Gleichung 4.33, einem Spiegelradius von $r = 500$ mm und einem Spiegelabstand $L = 77.5$ mm zu $w_0 \approx 205$ μm .

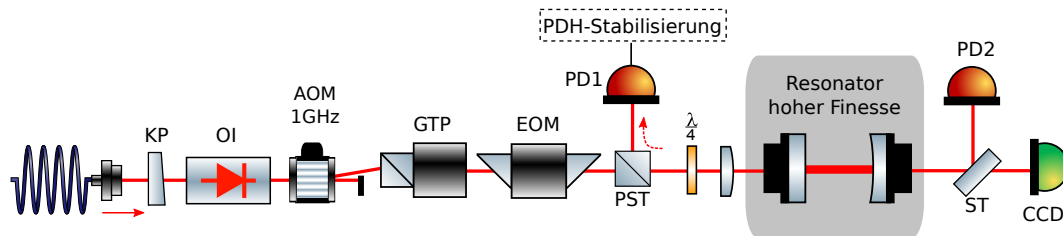


Abbildung 5.6: Skizze vom optischen Aufbau des Resonators hoher Finesse. Der 729nm Laserstrahl wird von der Faser über ein Keilplättchen (KP), einen akustooptischen Modulator (AOM), ein Glan-Thompson-Prisma (GTP), einen elektrooptischen Modulator (EOM), einen polarisierenden Strahlteiler (PST), ein $\lambda/4$ -Wellenplättchen und eine Linse in den Resonator eingekoppelt. Eine Photodiode (PD2) und eine CCD-Kamera dienen der Überwachung der Transmission. Die Photodiode (PD1) zeichnet den reflektierten Teil des Resonators auf. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

5.3.3 Resonatorparameter

Freier Spektralbereich

Wie bei der Messung des freien Spektralbereichs des Resonators mittlerer Finesse in Kapitel 5.2.3 werden Schwebungsmessungen zwischen unserem 729 nm Laser und dem stabilen Referenzlaser durchgeführt. Dazu wird der 729 nm Laser auf zwei benachbarte TEM_{00} Moden des Resonators hoher Finesse stabilisiert. Aus der Differenzfrequenz der beiden Messungen lässt sich der freie Spektralbereich bestimmen. Laut Herstellerangaben beträgt die Länge des Abstandhalters 77.5 mm. Daraus errechnet sich theoretisch der freie Spektralbereich zu $\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.934$ GHz. Der im Labor gemessene Modenabstand $\Delta\nu_{\text{FSB}}$ beträgt:

$$\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.9330733(2) \text{ GHz} \quad (5.4)$$

¹⁹ Brimrose GPF-1000-500-729 ²⁰ Linos PM25 ²¹ Thorlabs PDA10A-EC ²² Thorlabs PDA36A-EC 40 dB Verstärkung

Aus Gleichung (4.19) folgt für die optische Weglänge L :

$$L = 77.54296(1) \text{ mm} \quad (5.5)$$

Vor etwa achteinhalb Jahren wurde bei diesem Resonator ein freier Spektralbereich von $\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.933073(5)$ GHz und ein optischer Spiegelabstand von $L = 77.54297(2)$ mm gemessen [66]. Die berechnete Längenänderung des Resonators von damals bis heute beträgt $\Delta L = 9(21)$ nm. Innerhalb der Fehlergrenzen kann keine Aussage über die Längenänderung des Resonators getroffen werden.

Linienbreite

Zur Bestimmung der Finesse wird die Linienbreite des Resonators über die Zerfallskonstante des Lichtfeldes, mit der sogenannten Resonatorabklingzeitspektroskopie, bestimmt. Dazu wird ein schneller RF-Schalter²³ verwendet, der in der Lage ist das am AOM vor der Kavität anliegende RF-Signal innerhalb von 15 ns abzuschalten. Dadurch kann gewährleistet werden, dass der Zerfall des Lichtfeldes nicht von der Abschaltzeit des einfallenden Lichtes dominiert wird. Zur Detektion betrachten wir das Transmissionsignal der Photodiode PD2 (siehe Abbildung 5.6). Eine Bandbreite von 150 kHz bei einer Verstärkung von 40 dB, was einer Zeitauflösung von $7 \mu\text{s}$ entspricht, ist für diese Messungen ausreichend. Zur Charakterisierung der Photodiode wird eine baugleiche Diode direkt hinter dem 1GHz AOM²⁴ platziert und die Abklingzeit des Photodiodensignals des einfallenden Lichts über verschiedene Impulslängen vermessen. Wie in

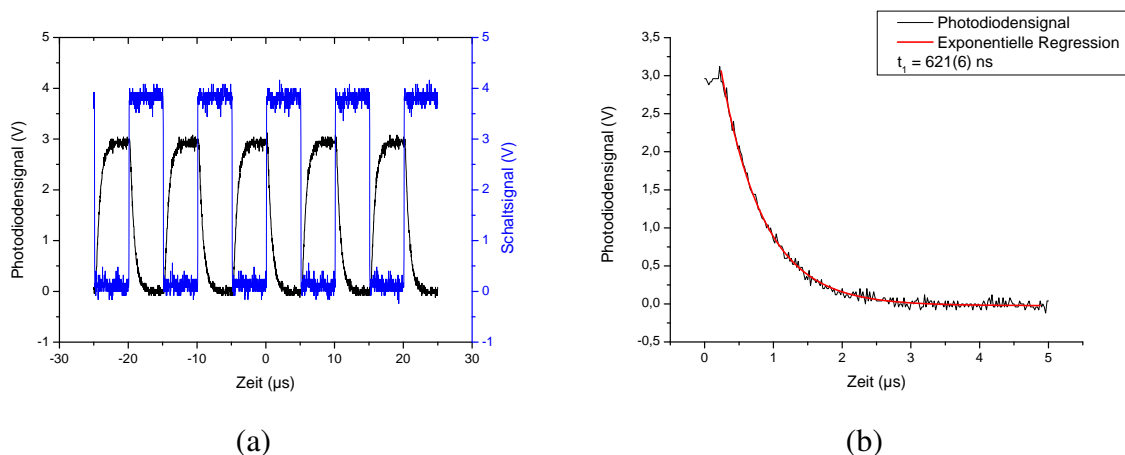


Abbildung 5.7: (a) Charakterisierung des Photodiodensignals direkt hinter dem AOM mit $5 \mu\text{s}$ Impulsen. In Blau ist das RF-Schaltsignal aufgetragen. In Schwarz ist das Photodiodensignal dargestellt. (b) Vergrößerte Ansicht eines Abklingvorgangs. In rot ist eine exponentielle Regression mit einer charakteristischen Abklingzeit der Kombination Photodiode plus AOM von $t_1 = 621(6)$ ns eingezeichnet.

Abbildung 5.7 (a) dargestellt ist, sind Impulse mit einer Länge von $5 \mu\text{s}$ noch unterscheidbar. Die charakteristische Abklingzeit, welche eine Kombination aus dem Zeitverhalten der Photodiode und des AOMs ist, liegt bei $t_1 = 621(6)$ ns. Diese systematische Verzögerung würde lediglich exponentiell zur linearen Differentialgleichung (4.22) des Zerfalls addiert werden und kann deshalb vernachlässigt werden.

²³ MiniCircuits ZASWA-2-50DR+ ²⁴ Brimrose GPF-1000-500-729

In Abbildung 5.8 sind zwei Messungen zur Lebensdauer des Lichtfeldes im Resonator dargestellt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird das einfallende Licht durch den AOM abgeschaltet und es kann ein exponentieller Zerfall des Lichtfeldes beobachtet werden. Die Linienbreite des Resonators hoher Finesse kann damit bestimmt werden zu:

$$\delta\nu_R = 4.40(6) \text{ kHz} \quad (5.6)$$

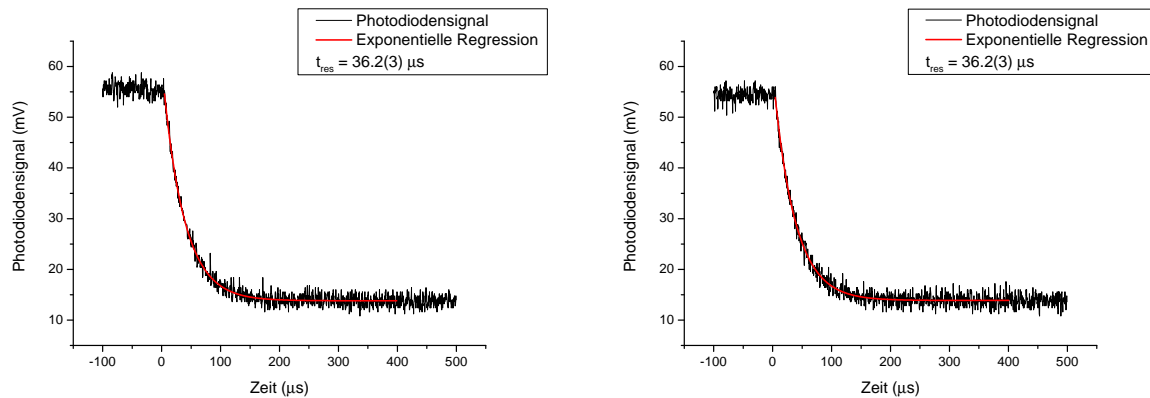


Abbildung 5.8: Zwei Messungen zur Lebensdauer des Lichtfeldes im Resonator hoher Finesse. Aus den exponentiellen Regressionen errechnet sich die durchschnittliche Lebensdauer zu $t_{res} = 36.17(46) \mu\text{s}$.

Finesse

Aus der durchschnittlichen Lebensdauer $t_{res} = 36.17(46) \mu\text{s}$ berechnet sich die Finesse \mathcal{F} nach Kapitel 4.3.3 zu:

$$\mathcal{F} = 2\pi t_{res} \Delta\nu_{FSB} = 440000(5500) \quad (5.7)$$

5.3.4 Kompensation von Faserrauschen

Faserrauschen ist eine von der Umgebung in die Faser induzierte Störung. Optische Fasern sind sehr sensibel gegenüber Druckschwankungen, Temperaturschwankungen und mechanischen Einwirkungen wie Vibrationen oder Biegung. Je nach Länge der Faser kann die Verbreiterung einer schmalen Laserlinienbreite im Bereich von wenigen 100 Hz bis zu wenigen kHz betragen [67]. Aufgrund der geplanten Linienbreite von < 10 Hz muss das von der Faser induzierte Rauschen kompensiert werden. Zur Kompensation wird ein Verfahren in Anlehnung an die Veröffentlichungen [68, 69] gewählt. Dabei wird die Stabilisierung mit Hilfe einer elektronischen Phasenregelschleife (PLL engl. *phase locked loop*) realisiert.

In unserem Experiment werden polarisationserhaltende Glasfasern von unterschiedlicher Länge verwendet. Beispielsweise führt ein Lichtwellenleiter von der Laserdiode zum Resonator mittlerer Finesse (siehe Abbildung 5.1), wobei hier keine Kompensation benötigt wird, da die Faser nur wenige Meter lang ist und die Linienbreite des Lasers an dieser Stelle bereits mehrere kHz beträgt. Für eine Frequenzstabilisierung in den < 10 Hz Bereich muss das Rauschen der Faser zum Resonator hoher Finesse kompensiert werden. Insgesamt werden folgende Fasern gegen Rauschen geschützt: die Fasern zum optischen Resonator hoher Finesse (~ 5 m Länge) und zum stabilen Referenzlaser (~ 220 m Länge). In Abbildung 5.9 ist der optische Aufbau für eine solche Kompensation schematisch dargestellt.

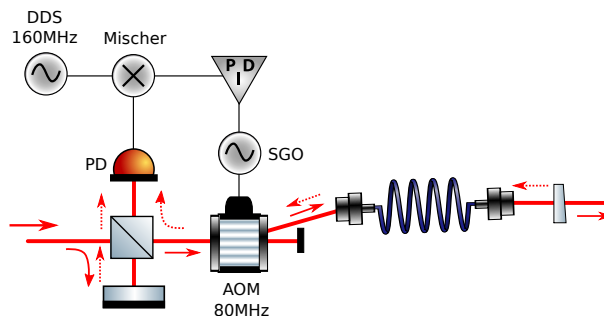


Abbildung 5.9: Skizze vom Aufbau zur Kompensation von Faserrauschen. Das Laserlicht passiert einen Strahlteiler, wobei ein Teil des Lichts über einen Spiegel auf eine Photodiode (PD) gelenkt wird. Der Rest passiert einen akustooptischen Modulator (AOM) mit einer Treiberfrequenz von 77.6 MHz und wird anschließend durch die Faser geschickt. Ein Teil des Strahls wird am Ende der Faser reflektiert, passiert den AOM ein zweites Mal und gelangt dann ebenfalls zur Photodiode (PD). Das Signal der Photodiode wird mit einem stabilen 155.6 MHz Referenzsignal gemischt (Mischer) und an einen PID-Regler als Fehlersignal weitergeleitet. Der PID-Regler gibt das Stellsignal weiter zu einem spannungsgeregelten Oszillator (SGO), welcher den AOM treibt. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

Der schmalbandige Laserstrahl wird durch eine Glasplatte im Verhältnis 96:4 aufgeteilt. Über einen Spiegel werden die abgezweigten $\sim 4\%$ auf eine Photodiode gelenkt. Der Rest des Strahls ($\sim 96\%$) wird über einen AOM²⁵ mit 77.6 MHz frequenzverschoben und anschließend in eine Faser gekoppelt. Nach dem Lichtwellenleiter werden wiederum 4% durch einen Glaskeil zurück reflektiert. Dieses Licht passiert die Faser sowie den AOM ein zweites Mal und wird dann über den Strahlteiler auf dieselbe Photodiode geschickt. An der Photodiode entsteht dadurch eine Überlagerung aus dem einfallenden, ungestörten Strahl und dem Licht, welches

²⁵ Gooch&Housego 3080-122

die Faser zweimalig passiert hat und dadurch das Rauschen aufmoduliert bekommen hat. Aufgrund der Frequenzverschiebungen durch den AOM auf dem Hin- sowie auf dem Rückweg ergibt sich eine Schwebungsmessung bei einer Frequenz von 155.6 MHz an der Photodiode. Das Photodiodensignal enthält nun die Rauschinformation der Faser um 155.6 MHz zentriert. Das Photodiodensignal und ein 155.6 MHz Referenzsignal eines direkten digitalen Synthesizers (DDS) werden mit Hilfe eines Mischers gemischt. Das heruntergemischte Fehlersignal wird dann zum PID-Regler weitergeleitet. Der Regler sendet das Stellsignal zu einem spannungsgeordneten Oszillator, welcher den AOM treibt. Durch das Stellsignal wird gerade das Inverse des Faserrauschens auf den Laser moduliert. Passiert der Laser den Lichtwellenleiter kompensieren sich das echte Faserrauschen und das aufmodulierte Inverse.

In Abbildung 5.10 sind Messungen von den Rauscheigenschaften mit und ohne Stabilisierung der längsten Glasfaser (~220 m) dargestellt. Die Frequenzverbreitung des Lasers durch diese Faser beträgt ~1 kHz. Mit Hilfe der Faserstabilisierung ist es möglich, die Verbreiterung unter die Auflösung des Spektrumanalysators von 1 Hz zu minimieren. Das bedeutet, dass bei eingeschalteter Kompensation des Faserrauschens die Linienbreite des Lasers beim Passieren dieser Faser um weniger als 1 Hz vergrößert wird. Mit dieser Stabilisierungsmethode ist eine Transmission über Kilometer lange Glasfasern mit einer Genauigkeit im Sub-Millihertz Bereich möglich [68–71].

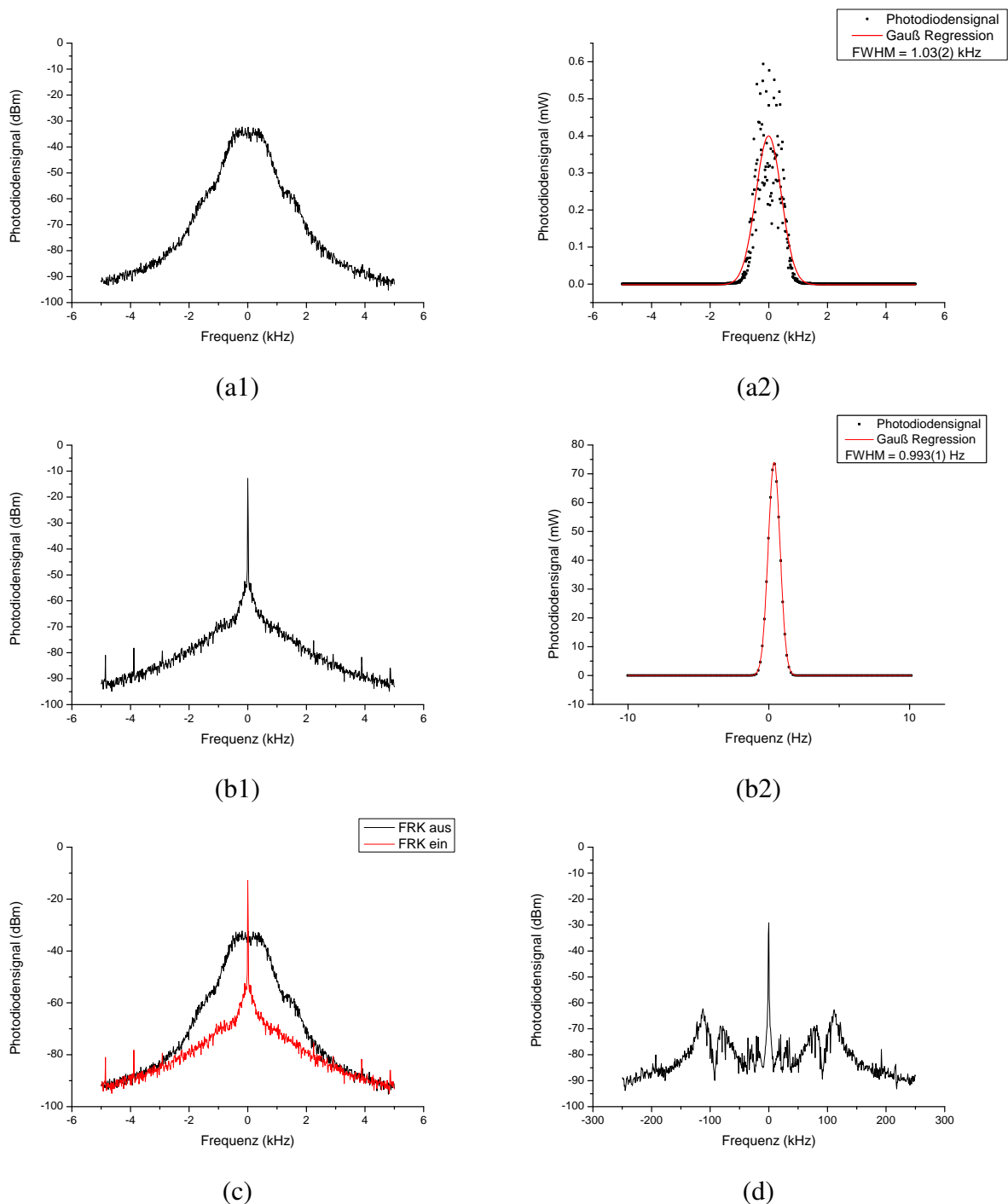


Abbildung 5.10: Spektrale Aufnahmen des Faserrauschens um eine Zentrumsfrequenz von 155.6 MHz. **(a)** Faserrauschen bei ausgeschalteter Kompensation. **(a1)** Das logarithmische Photodiodensignal (dBm) aufgetragen gegen die Frequenz. **(a2)** Das lineare Photodiodensignal (mW) aufgetragen gegen die Frequenz in schwarz mit einer gaußförmigen Regression in rot. **(b)** Faserrauschen bei eingeschalteter Kompensation. **(b1)** Das logarithmische Photodiodensignal (dBm) aufgetragen gegen die Frequenz. **(b2)** Das lineare Photodiodensignal (mW) aufgetragen gegen die Frequenz in schwarz mit einer gaußförmigen Regression in rot. **(c)** Kombination des Faserrauschens bei ein- und ausgeschalteter Faserstabilisierung, wobei in schwarz die Faserrauschkompensation (FRK) aus- und in rot die Faserrauschkompensation (FRK) eingeschaltet ist. Die Linienbreite ohne Kompensation beträgt $\text{FWHM} = 1.03(2)$ kHz. Die Linienbreite mit Kompensation ergibt laut Messung $\text{FWHM} = 0.993(1)$ Hz. **(d)** Frequenzspektrum bei aktiver Stabilisierung über einen Bereich von 500 kHz. In diesem Spektrum sind die Resonanzen des Regelkreises um ± 110 kHz ersichtlich.

5.3.5 Temperaturstabilisierung

Anhand der Stehwellenbedingung $\nu_m = mc/2nL$ (siehe Gleichung (4.18) in Kapitel 4.3.2) ist erkennbar, dass die Frequenz der Mode im Resonator nur vom Abstand der beiden Spiegel abhängt. Jede Temperaturänderung führt über thermische Expansion des Abstandhalters zu einer Änderung in der Frequenz des Lasers. In Kapitel 5.3.1 wurde beschrieben, dass die Vakuumkammer durch Heizmatten an der Aluminiumbox stabilisiert wird. Zur Messung der Temperatur wurde im inneren der Aluminiumbox an jeder Wand jeweils ein NTC-Sensor (engl. *negative temperature coefficient*) mit negativem Temperaturkoeffizient installiert. Aus diesen 6 Temperatursignalen wird der Mittelwert gebildet. Mit Hilfe eines Potentiometers in einer Wheatstone-Bridge-Schaltung lässt sich der Sollwert einstellen. Das Fehlersignal der Wheatstone-Bridge-Schaltung wird an den Temperaturregler²⁶ gesendet, welcher über einen Verstärker die Heizmatten steuert. Als zusätzlicher Temperatursensor wurde ein Platin-Messwiderstand (PT100) außen an der Vakuumkammer angebracht. Dieser dient der absoluten Temperaturüberwachung außerhalb des Regelkreises.

Wie in Kapitel 5.3.1 beschrieben wurde, ist der Abstandhalter zwischen den Spiegeln aus ULE Material hergestellt. Der Ausdehnungskoeffizient des ULE Materials sollte laut Hersteller²⁷ im Temperaturbereich zwischen 26 °C und 36 °C unter $\alpha = \Delta L/(L\Delta T) \leq 10^{-8} \text{ K}^{-1}$ liegen. Für die Berechnung wird eine quadratische Abhängigkeit der Frequenzänderung bezüglich der Temperaturänderungen angenommen [11, 72]

$$\Delta\nu \propto \Delta T^2. \quad (5.8)$$

Es gibt also eine optimale Temperatur, welche am Umkehrpunkt dieser Parabel liegt, bei der die Frequenzänderung aufgrund einer Temperaturänderung in erster Ordnung verschwindet.

In Abbildung 5.11 sind die Messdaten der Frequenzänderungen bezogen auf die Temperatur dargestellt. Die Temperatur wird dabei mit Hilfe des PT100 Sensors an der Außenwand der Vakuumkammer bestimmt. Die Frequenzabweichungen werden gegen den stabilen Referenzlaser gemessen. Diese Messpunkte werden in einem Abstand von 2-3 Tagen aufgenommen, da es eine gewisse Zeit benötigt, bis sich die angezeigte Temperatur am Sensor auch innerhalb der Vakuumkammer einstellt.

Weil das System nicht gekühlt werden kann, können nur Messwerte oberhalb der Raumtemperatur (25 °C) aufgenommen werden. Die obere Grenze der Temperaturstabilisierung liegt aufgrund des Potentiometers der Wheat-Stone-Brücke bei ~30 °C. Diese Umstände führen zu der geringen Anzahl von Messdaten. Mit Hilfe einer parabelförmigen Regression erhält man eine Abschätzung für die optimale Temperatur T_0 des Systems

$$T_0 = 14_{-50}^{+10} \text{ °C}. \quad (5.9)$$

Aufgrund der geringen Anzahl an Messdaten und dem Umstand, dass der Abstand zu T_0 relativ groß ist, zeigt sich ein großer statistischer Fehler in der Bestimmung des optimalen Temperaturpunkts. Der statistisch errechnete Fehler beträgt $\pm 50 \text{ °C}$. Mit dem Wissen, dass die optimale Temperatur unterhalb des gemessenen Temperaturbereichs liegt, kann der Fehler nach oben hin mit $+10 \text{ °C}$ begrenzt werden.

²⁶ SRS SIM960 ²⁷ Corning Inc.

Zusätzlich lässt sich aus einer linearen Regression über die letzten drei Datenpunkte zwischen 28 °C und 29 °C die Frequenzabhängigkeit des Lasers bezüglich der Temperatur berechnen

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta T} = 12(3) \text{ MHz/K.} \quad (5.10)$$

Daraus berechnet sich der Ausdehnungskoeffizient mit der Laserfrequenz von $\nu \approx 411 \text{ THz}$ zu $\alpha = \Delta\nu/(\nu\Delta T) = 2.9(8) \cdot 10^{-8} \text{ K}^{-1}$. Dieser Wert liegt nur leicht über dem spezifizierten Wert von $\alpha < 10^{-8} \text{ K}^{-1}$. Setzt man Temperaturwerte in die Gleichung der quadratischen Regression ein, wobei davon ausgegangen wird, dass die Temperatur in einem Bereich von 10 mK stabilisiert ist, berechnet sich die Temperaturempfindlichkeit zu $\Delta\nu/\Delta T \approx 12.5 \text{ MHz/K}$ bei 29 °C, $\Delta\nu/\Delta T \approx 9 \text{ MHz/K}$ bei 26 °C und $\Delta\nu/\Delta T \approx 9 \text{ kHz/K}$ bei 14.43 °C. Diese Werte sollen einen Einblick in die Größenordnungen geben, wobei auf die Angabe von Fehlern aufgrund der großen statistischen Fehler verzichtet wird. Die derzeit niedrigste Temperatur, auf die die Vakuumkammer stabilisiert werden kann, ist 26 °C. Da die Frequenzabhängigkeit in diesem Bereich bereits nahezu linear ist, würde eine Stabilisierung auf 26 °C allerdings zu Lasten der Regelung gehen. Da bei dem hier verwendeten System nur aktiv geheizt werden kann, würde mit kleinerem Abstand zur Raumtemperatur ($\sim 25 \text{ °C}$) die Kühlung, also das Nicht-Heizen, träger werden. Im Laborbetrieb wird die Vakuumkammer auf $\sim 29 \text{ °C}$ stabilisiert. Optimal wäre ein Umbau des Temperaturregelsystems, welches eine Kühlung zum optimalen Temperaturpunkt $T_0 \approx 14 \text{ °C}$ erlaubt.

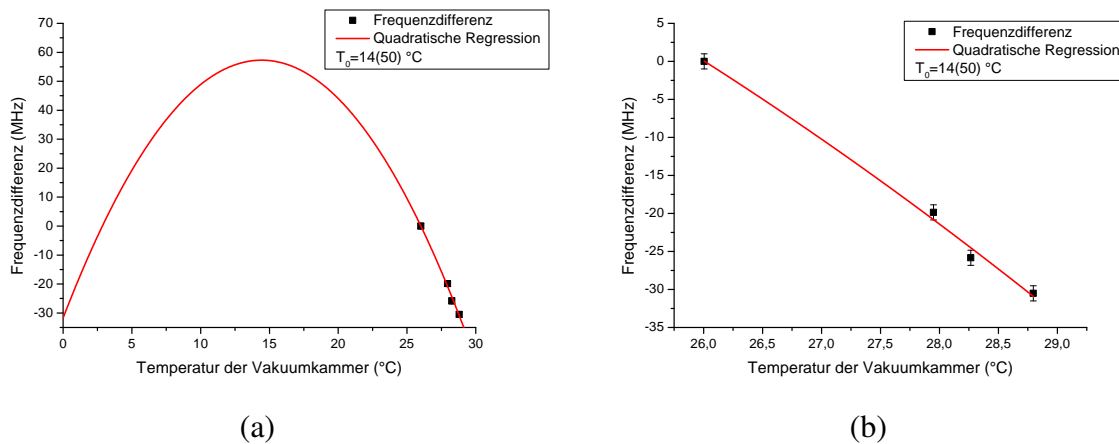


Abbildung 5.11: (a) Messung der Frequenzveränderung in Abhängigkeit der Temperatur. In rot eingezeichnet ist eine quadratische Regression. (b) Vergrößerte Ansicht über den gemessenen Temperaturbereich. Die optimale Temperatur liegt bei $T_0 = 14(50) \text{ °C}$.

Temperaturverhalten der Vakuumkammer

Zur Charakterisierung der Temperaturstabilisierung werden die Temperaturen des Labors, der Holzbox und der Vakuumkammer über mehrere Tage aufgezeichnet. Für die Temperatureaufzeichnung im Labor und in der Holzbox wurde ein Temperaturschreiber in Form eines Raspberry PI's mit digitalen I²C-Temperatursensoren installiert. Die Temperatur der Vakuumkammer

wird mit dem Platin-Temperaturwiderstand (PT100) über eine Widerstandsmessung protokolliert. Der PT100 Sensor befindet sich dabei außerhalb des Regelkreises und ist an der Außenwand der Vakuumkammer angebracht.

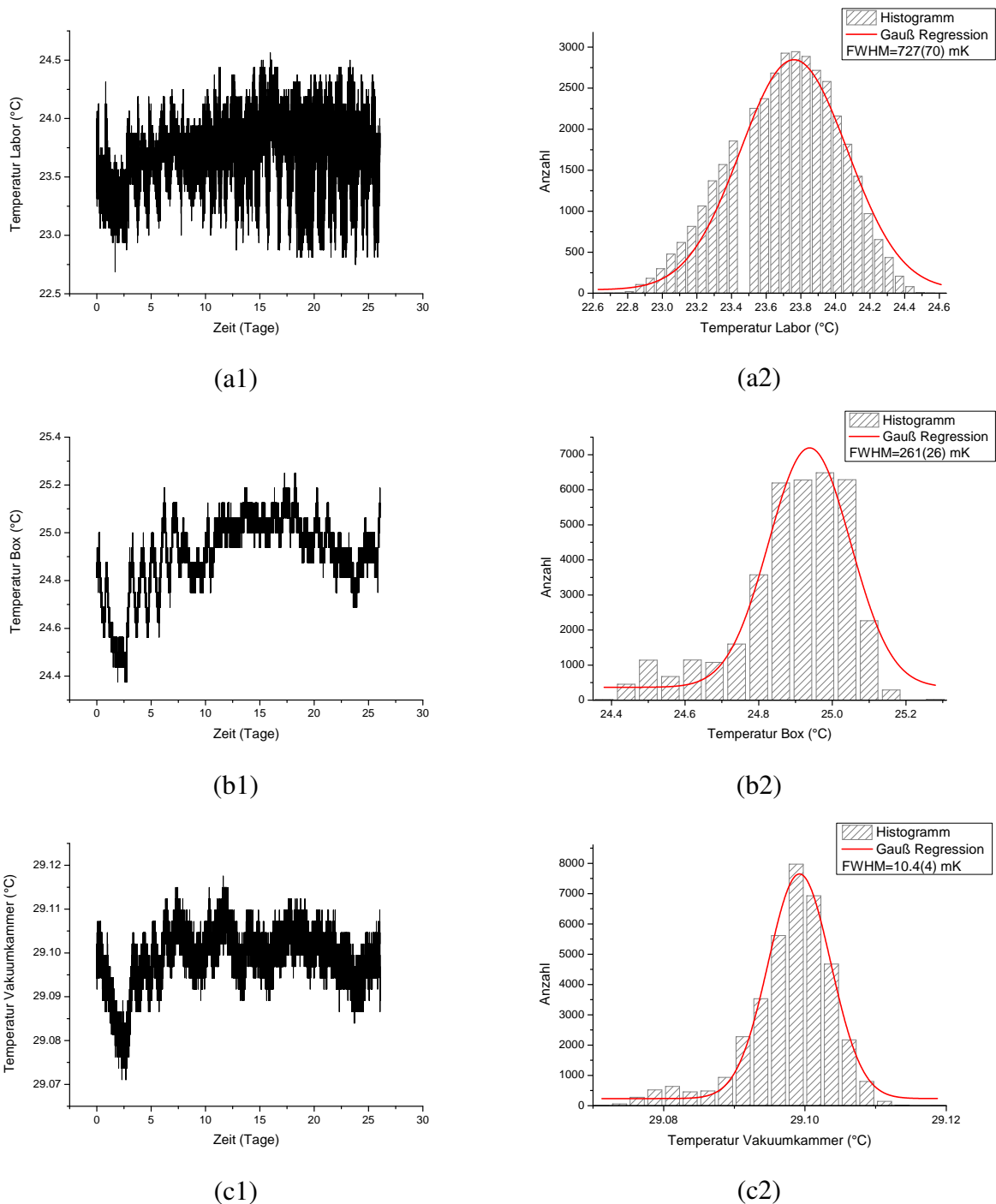


Abbildung 5.12: (#1) Temperaturverläufe über eine Dauer von 27 Tagen vom 12.09.2014 bis zum 08.10.2014. (#2) Histogramme der Temperaturverteilungen. (a) Labor, (b) Box und (c) Vakuumkammer

In Abbildung 5.12 (a1), (b1), (c1) sind der Temperaturverlauf im Labor, in der Holzbox und an der Vakuumkammer über einen Zeitraum von etwa 27 Tagen vom 12.09.2014 bis zum 08.10.2014 dargestellt. Jeweils daneben (Abbildung 5.12 (a2), (b2), (c2)) sind Histogramme des Temperaturverlaufs abgebildet. Die Histogramme wurden mit gaußförmigen Regressionen genähert. Durch die Holzbox verringert sich die volle Halbwertsbreite der Temperaturverteilung der Box relativ zum Labor um einen Faktor 2.8(4) von $\text{FWHM}_{\text{Labor}} = 727(70)$ mK auf $\text{FWHM}_{\text{Box}} = 261(26)$ mK. Die Temperaturstabilisierung der Aluminiumbox verkleinert die volle Halbwertsbreite der Vakuumkammer relativ zur Box um einen Faktor 25(3) von $\text{FWHM}_{\text{Box}} = 261(26)$ mK auf $\text{FWHM}_{\text{Kammer}} = 10.4(4)$ mK. Daraus kann auf eine Gesamtverkleinerung der Temperaturschwankungen im Labor auf die Vakuumkammer um einen Faktor von 70(7) geschlossen werden. Wird angenommen, dass die Raumtemperatur mit einer Periode von etwa 24 Stunden oszilliert, kann die Driftrate der Laserfrequenz mit einem linear Drift über 12 Stunden genähert werden. Mit einer Temperaturempfindlichkeit des Resonators hoher Finesse von $\Delta\nu/\Delta T = 12(3)$ MHz/K errechnet sich eine theoretische Driftrate von 200(50) Hz/s bei einer Temperaturänderung von $\Delta T_{\text{Labor}} = 727(70)$ mK. Mit der Temperaturstabilisierung der Aluminiumbox kann diese Driftrate auf einen theoretischen Wert von 2.9(7) Hz/s bei einer Temperaturänderung von $\Delta T_{\text{Kammer}} = 10.4(4)$ mK verbessert werden.

Beim Vergleich des zeitlichen Verlaufs im Labor und in der Holzbox wird ersichtlich, dass die Holzbox als Tiefpass fungiert und die schnellen Temperaturoszillationen des Labors dämpft. Weiters kann beobachtet werden, dass die stabilisierte Vakuumkammertemperatur der Temperatur der Holzbox und somit der Temperatur des Labors folgt. Dies liegt daran, dass sich die Vakuumkammer trotz stabilisierter Aluminiumbox und gedämmter Holzbox thermisch nicht völlig vom Labor trennen lässt. Zudem sind die Kabel und der Temperaturregler selbst den Temperaturschwankungen des Labors ausgesetzt.

5.3.6 Frequenzstabilisierung

Die Frequenzstabilisierung des Resonators hoher Finesse funktioniert analog zur bereits vorgestellten Stabilisierung des Resonators mittlerer Finesse (siehe Kapitel 5.2.4). Der größte Unterschied ist, dass das Stellsignal des PID-Reglers nicht direkt auf die Laserdiode zurückgekoppelt wird (siehe Abbildung 5.4) sondern auf einen im Strahlengang implementierten akustooptischen Modulator (siehe 270 MHz AOM in Abbildung 5.13).

Die Reflexion des Resonators hoher Finesse wird von der Photodiode²⁸ nachgewiesen. Das Photodiodensignal wird über einen Verstärker²⁹ an den Mischer³⁰ weitergeleitet. Das Photodiodensignal wird am Mischer mit dem Direkt-Digitale-Synthesizer (DDS2) Referenzsignal zum PDH-Fehlersignal heruntergemischt. Dieses Signal wird dem PID-Regler³¹ zugeführt, welcher die Frequenz des 270 MHz AOMs über einen spannungsgeregelten Oszillator³² regelt. Durch die verwendeten elektronischen Bauteile und den Weg den das Licht von der Modulation bis zur Detektion zurücklegt, kommt es zu einem Phasenunterschied der Signale am Mischer. Zur Phasenanpassung der Signale werden zwei separate DDS verwendet, deren relative Phase eingestellt werden kann. Zur Generierung des PDH-Fehlersignals sollten die Signale, wie in Kapitel 4.4 beschrieben, in Phase sein ($\phi = 0$).

²⁸ Thorlabs PDA10A-EC ²⁹ MiniCircuits ZFL-500LN+ ³⁰ MiniCircuits ZLW-6+ ³¹ SRS SIM960

³² MiniCircuits ZOS-400+

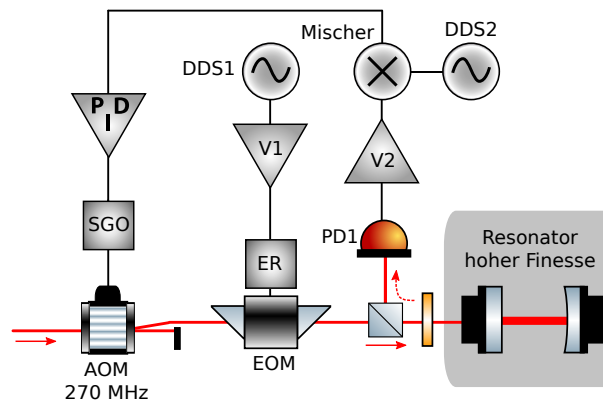


Abbildung 5.13: Skizze vom Aufbau der PDH-Stabilisierung, wobei nur die, für die Stabilisierung, wichtigen Elemente eingezeichnet sind. Das Direkt-Digitaler-Synthesizer (DDS) Signal treibt mit Hilfe eines Verstärkers (V1) einen elektrischen Resonator (ER) und somit den EOM. Mit dem Signal eines weiteren DDS wird das verstärkte (V2) Fehlersignal der Photodiode (PD1) in einem Mischer heruntergemischt. Das PDH-Fehlersignal des Mixers wird an den PID-Regler angeschlossen. Dieser Regler stabilisiert die Laserfrequenz über einen am spannungsgeregelten Oszillator (SGO) angeschlossenen 270 MHz AOM. Diese Abbildung wurde mit Elementen aus [21] erstellt.

5.4 Stabilisierung der Laserfrequenz auf die Ionenfrequenz

Aufgrund von thermischen Driften des Resonators hoher Finesse (siehe Abbildung 5.12) wandert die 729 nm Laserfrequenz relativ zur $S_{1/2}-D_{5/2}$ Übergangsfrequenz der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen. Deswegen ist die Stabilisierung auf den Resonator für kurzzeitige Frequenzstabilität im Bereich von wenigen Minuten geeignet. Für die Langzeitstabilisierung werden spektroskopische Messungen am $S_{1/2}-D_{5/2}$ Übergang der Ionen durchgeführt.

Aus zeitlichen Gründen konnte die geplante Kompensation der Resonatordriften durch Ramsey-Spektroskopie [73] nicht mehr implementiert werden. Stattdessen wurde als Übergangslösung eine Driftkompensation mit dem stabilen Referenzlaser aufgebaut. Der Referenzlaser selbst ist auf den $S_{1/2}-D_{5/2}$ Übergang der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen bei 729 nm mittels Ramsey-Spektroskopie stabilisiert. Das Schwebungssignal unseres Lasers mit dem Referenzlaser wird von einer Photodiode aufgezeichnet. Ein Frequenzzähler³³ wertet die Frequenzdifferenz der beiden Laser aus. Die Daten werden per USB an ein LabView Programm auf einem PC gesendet. Dieses, in Zusammenarbeit mit Philip Holz geschriebene Programm, wertet die Daten des Frequenzzählers aus. Dabei wird jede Sekunde ein Datenpunkt aufgenommen und gespeichert. Der aktuelle Frequenzdrift wird mit Hilfe einer linearen Regression über einen benutzerdefinierten Zeitbereich (typischerweise 300 s) ermittelt. Die Steigung dieser linearen Regression entspricht gerade dem aktuellen Frequenzdrift relativ zum Referenzlaser. Die berechnete lineare Frequenzmodulation wird dann einem Frequenzgenerator³⁴ mittels GPIB Schnittstelle übergeben. Dieser Frequenzgenerator steuert den 1 GHz AOM³⁵ vor dem Resonator hoher Finesse, welcher die Laserfrequenz in 1 Hz Schritten im berechneten Schritintervall verschiebt.

Das Programm erkennt dabei anhand des Residuums der linearen Regression, ob die beiden Laser während des letzten Intervalls korrekt stabilisiert waren. Fällt einer der beiden Laser kurzzeitig aus der Stabilisierung vergrößert sich das Residuum in der Regel um mehr als 5

³³ TTi TF930 ³⁴ Marconi 2024 ³⁵ Brimrose GPF-1000-500-729

Größenordnungen. Steigt das Residuum um mehr als 3 Größenordnungen wird ein Fehler angenommen (z.B. ein Laser ist nicht korrekt stabilisiert) und die Drift wird mit den Daten der letzten, korrekten Regression kompensiert. Durch diese Methode ist es möglich, die Driften des 729 nm über einen Arbeitstag zu kompensieren, auch wenn der Referenzlaser zeitweise (bis zu etwa einer Stunde) nicht verfügbar ist.

Kapitel 6

Charakterisierung des 729 nm Lasers

In Rahmen dieser Masterarbeit wurde eine Frequenzstabilisierung eines kommerziellen Diodenlasersystems aufgebaut. In den vorangegangenen Kapiteln sind bereits die einzelnen Komponenten, wie beispielsweise die Kompensation von Faserrauschen, oder die Temperaturstabilisierung des Resonators hoher Finesse charakterisiert worden. Auch der mechanische Aufbau und die wichtigen Kenngrößen der eingesetzten optischen Resonatoren, wie der freie Spektralbereich und die Linienbreite, wurden im vorigen Kapitel diskutiert.

Alle diese Eigenschaften zusammen tragen zum Gesamtverhalten des Lasersystems bei. Betrachtet man das Lasersystem als schwarze Kiste, die einfach nur Laserlicht für die Experimente zur Verfügung stellt, sind lediglich die Anforderungen aus Kapitel 3 von Interesse. Dabei handelt es sich um die emittierte Lichtleistung, die Frequenzgenauigkeit und die Langzeitstabilität des 729 nm Lasers. Für die emittierte Lichtleistung ist ein Wert von ~ 300 mW ermittelt worden. Die Frequenzgenauigkeit und die Langzeitstabilität werden in den folgenden Kapiteln über die Linienbreite 6.1 und die Driftraten 6.2 charakterisiert.

Das Lasersystem ist zweistufig aufgebaut, wobei die Frequenz des Lasers zuerst mit dem Resonator mittlerer Finesse vorstabilisiert und dieses vorstabilisierte Licht dann mit Hilfe des Resonators hoher Finesse endstabilisiert wird. Aus diesem Grund wird die Linienbreite für die zwei Fälle untersucht, in denen der Laser nur durch den Aufbau des Resonators mittlerer Finesse und in denen der Laser durch beide Resonatoren stabilisiert ist.

6.1 Die Linienbreite des Lasers

Wie in Kapitel 4.5 theoretisch beschrieben ist, werden die folgenden Messungen mit Hilfe von Schwebungsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser durchgeführt. Dieser Referenzlaser ist schmalbandig (~ 1 Hz) und auf die 729 nm Übergangsfrequenz der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen stabilisiert [13].

6.1.1 Die Linienbreite nach der Vorstabilisierung

Die Linienbreite des Lasers nach der Vorstabilisierung gibt Auskunft darüber, wie schmal die Linienbreite des Diodenlasers mit der Stabilisierung auf einen Resonator mittlerer Finesse mit $\mathcal{F} = 6300 \pm 2500$ ist.

Da die Linienbreite des Referenzlasers etwa 1 Hz beträgt [13], kann der Referenzlaser hier bei der Messung der Linienbreite vernachlässigt werden. Nach der Vorstabilisierung konnte folgende volle Halbwertsbreite des Leistungsspektrums des Lasers durch Schwebungsmessungen nachgewiesen werden

$$\text{FWHM}_{MG} = 3.74(2) \text{ kHz.} \quad (6.1)$$

Die Messungen zu dieser Linienbreite sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Bei dieser Linienbreite ist zu beachten, dass es sich um eine Einzelmessung handelt und nicht über mehrere Messungen gemittelt wurde. Bei der gewählten Auflösung des Spektrumanalysators von 1 kHz resultiert eine Aufnahmedauer von 1 ms. Langsame Fluktuationen oder Driften in der Frequenz des Lasers werden dadurch nicht ersichtlich. Die Driften des Resonators mittlerer Finesse sind jedoch nicht von Belang, da diese klein genug sind um auf den Resonator hoher Finesse zu stabilisieren ($< 5 \text{ MHz/Tag}$) und die Laserdriften am Ende vom Resonator hoher Finesse vorgegeben werden.

Im Vergleich zur Linienbreite des Diodenlasers ohne aktive Stabilisierung von $2.2(1) \text{ MHz}$, kann die Linienbreite mit der Vorstabilisierung auf $3.74(2) \text{ kHz}$ um einen Faktor $590(30)$ verkleinert werden, wobei die Linienbreite durch die mittlere Finesse des Resonators von $\mathcal{F} = 6300 \pm 2500$ begrenzt wird. Aufgrund der erreichten Linienbreite von $3.74(2) \text{ kHz}$ ist eine Stabilisierung des Lasers auf den Resonator hoher Finesse mit einem Regler mit 100 kHz Bandbreite möglich.

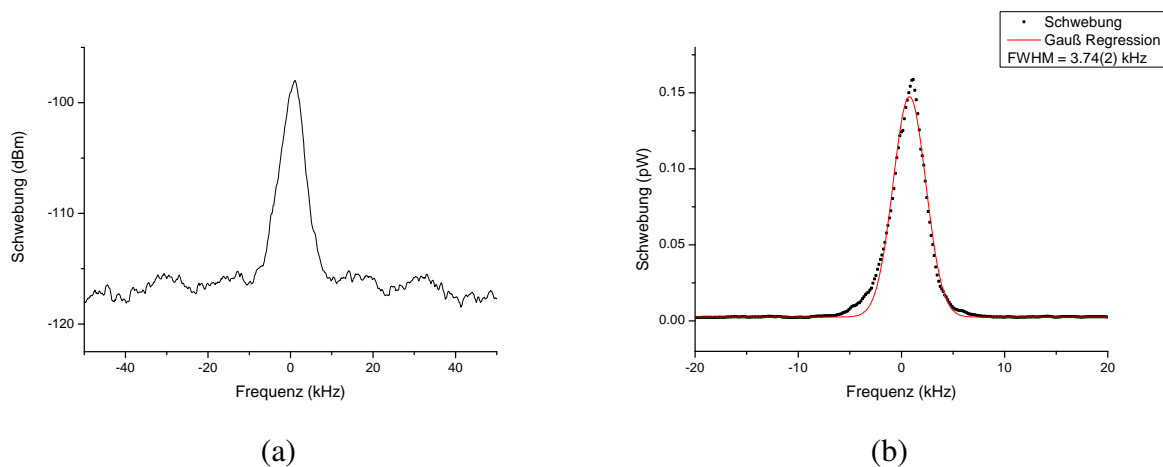


Abbildung 6.1: Messung der Linienbreite bei Stabilisierung auf den Resonator mittlerer Finesse über einen Frequenzbereich von 100 kHz mit einer Auflösung des Spektrumanalysators von 1 kHz. Bei dieser Messung wurde nicht gemittelt, wodurch sich eine Aufnahmedauer von 1 ms ergibt. (a) Logarithmisches Spektrum des Schwebungssignals. (b) Auszug des linearen Spektrums des Schwebungssignals inklusive gaußförmiger Regression in Rot. Die volle Halbwertsbreite beträgt $\text{FWHM} = 3.74(2) \text{ kHz}$.

6.1.2 Die Linienbreite nach der Endstabilisierung

Nachdem der 729 nm Laser durch den Resonator mittlerer Finesse vorstabilisiert ist, wird das Licht mit einer Linienbreite von $3.74(2) \text{ kHz}$ zum Resonator hoher Finesse (HF) mit $\mathcal{F} = 440000(5500)$ gesendet.

Bei der Endstabilisierung wurden mehrere Messungen zur Bestimmung der Linienbreite durchgeführt. Es wurden dabei die Auflösung Δf des Spektrumanalysators und die Anzahl N_M der Messungen über die gemittelt wurde, variiert. Die Messungen sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Als Übersicht ist in Abbildung 6.2 (a) ein logarithmisches Spektrum (in dBm) über einen Frequenzbereich von 500 Hz dargestellt. In den Abbildungen 6.2 (b)-(d) sind lineare Spektren (in pW) mit unterschiedlicher Auflösung Δf , Anzahl der Messungen über die gemittelt wurde N_M und Aufnahmedauer Δt über einen Frequenzbereich von 150 Hz dargestellt. Abbildung 6.2 (b) zeigt eine Messung mit einer Auflösung von 1 Hz und einer Aufnahmedauer von 1 s. In Abbildung 6.2 (b) bzw. 6.2 (c) wurde bei einer Auflösung von 5 Hz über 10 bzw. 25 Messungen gemittelt. Dies entspricht einer Aufnahmedauer von 2 s bzw. 5 s. Die vollen Halbwertslinienbreiten FWHM_{HF} wurden mit Hilfe von lorentzförmigen Regression ermittelt. Die Ergebnisse der Messungen sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Tabelle 6.1: Linienbreitenmessungen des 729 nm Lasers während der Stabilisierung auf den Resonator hoher Finesse (HF). Die Messungen unterscheiden sich in der spektralen Auflösung Δf , in der Anzahl der Messungen über die gemittelt wurde N_M und in der Aufnahmedauer Δt .

Δf	N_M	Δt	FWHM_{HF}
1 Hz	1	1 s	1.73(5) Hz
5 Hz	10	2 s	6.02(7) Hz
5 Hz	25	5 s	16.9(3) Hz

Wie in Kapitel 4.5 beschrieben wurde, folgt die spektrale Leistungsdichte bei Rauschen mit hoher Grenzfrequenz (weißes Rauschen) einer Lorentzkurve und bei Rauschen mit niedriger Grenzfrequenz einer Gaußkurve. Aus den Schwebungsmessungen geht hervor, dass die Leistungsspektren mit einer Lorentzkurve genähert werden können. Dies lässt darauf schließen, dass in den Leistungsspektren beider Laser weißes Rauschen eine dominante Rolle spielt.

Bei der kleinstmöglichen Auflösung des Spektrumanalysators von 1 Hz konnte in einer Einzelmessung eine Linienbreite von $\Delta\nu_S = 1.73(5)$ Hz im Zeitraum von 1 s festgestellt werden. Da laut Gleichung (4.59) die Breite der Schwebungsmessung aus der Summe der Laserlinienbreiten besteht $\Delta\nu_S = \Delta\nu_{L1} + \Delta\nu_{L2}$, kann angenommen werden, dass die Linienbreiten der einzelnen Laser für kurze Zeiten (1 s) unter $\Delta\nu_L < 1.73(5)$ Hz liegt. Dieser Wert liegt unter den Anforderungen aus Kapitel 3 von $\Delta\nu_L < 1.73(5) < 10$ Hz. Vergleicht man den Wert von 1.73(5) Hz mit der Linienbreite nach der Vorstabilisierung von 3.74(2) kHz konnte die Linienbreite weiter um einen Faktor von 2200(100) verkleinert werden. Wird beispielsweise angenommen, dass die beiden Laser die gleiche Linienbreite besitzen $\Delta\nu_{L1} = \Delta\nu_{L2}$, berechnet sich die Linienbreite eines einzelnen Lasers mit Gleichung (4.59) zu $\Delta\nu_L = \Delta\nu_S/2 = 0.87(3)$ Hz. Wie in Tabelle 6.1 ersichtlich ist, hat die Frequenzdrift des Resonators Auswirkungen auf die Linienbreite. Tendenziell ist die Linienbreite umso größer, je länger gemessen wird.

Bei der Betrachtung von Abbildung 6.2 (a) fallen die Seitenbänder mit 50 Hz und deren Harmonische auf. Diese Seitenbänder sind auf eine vorliegende Erdschleife zurückzuführen. Es wurde versucht dieser Störung auf der Grund zu gehen. Aus zeitlichen Gründen konnte jedoch noch keine eindeutige Quelle ausgemacht werden. Möglicherweise besteht diese Erdschleife an der Elektronik für das Diodenlasersystem selbst.

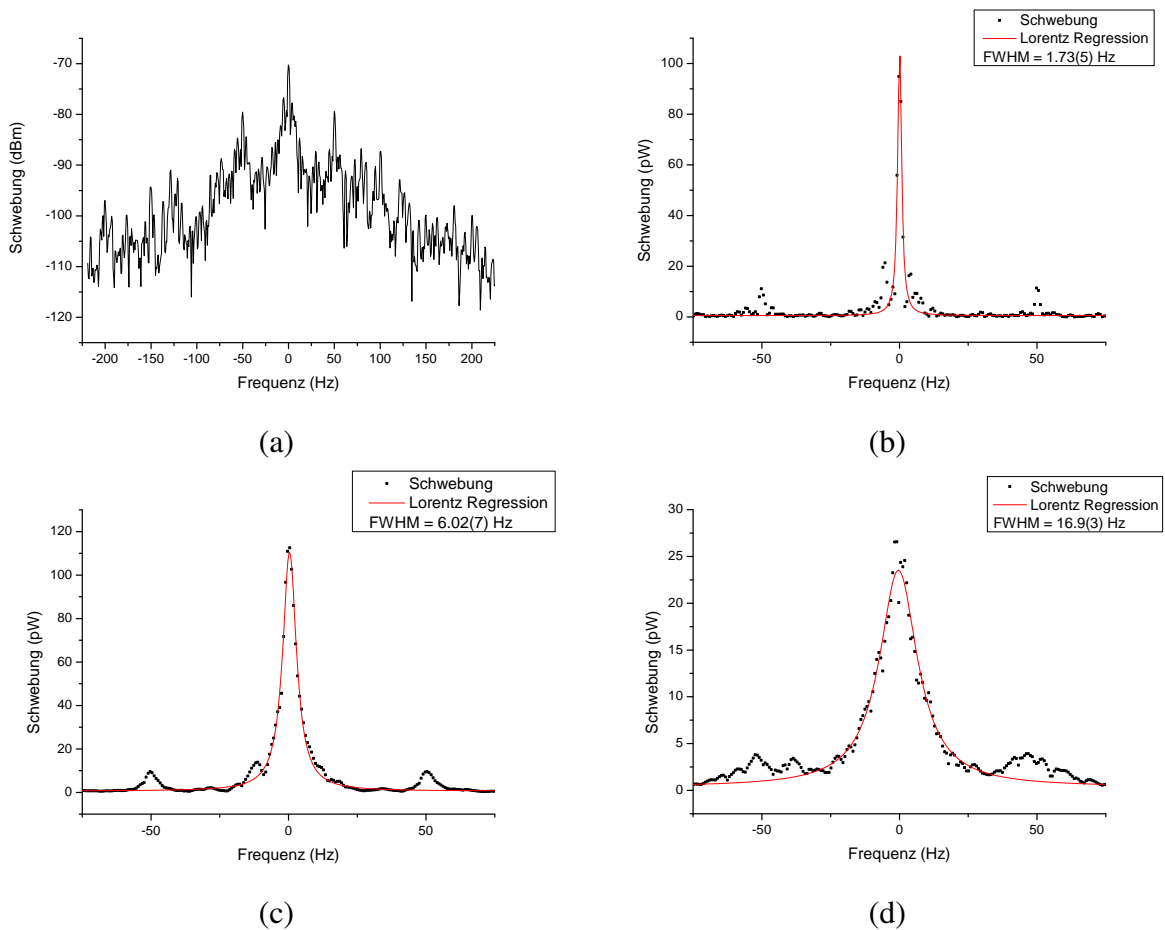


Abbildung 6.2: Messung der Linienbreite bei Stabilisierung auf den Resonator hoher Finesse. **(a)** Logarithmisches Spektrum der Schwebung mit einer Auflösung von 1 Hz ungemittelt mit einer Aufnahmedauer von $\Delta t = 1$ s. **(b)** Auszug aus (a) mit lorentzförmiger Regression in Rot mit Linienbreite $\text{FWHM} = 1.73(5)$ Hz. **(c)-(d)** Spektren mit einer Auflösung von 5 Hz, gemittelt über N_M Messungen mit lorentzförmiger Regression. **(c)** $N_M = 10$, Aufnahmedauer $\Delta t = 2$ s und $\text{FWHM} = 6.02(7)$ Hz **(d)** $N_M = 25$, Aufnahmedauer $\Delta t = 5$ s und $\text{FWHM} = 16.9(3)$ Hz

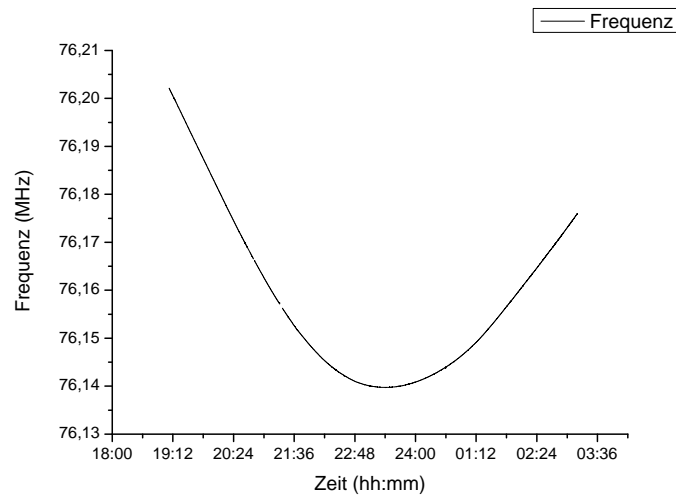
6.2 Die Frequenzdriften des Lasers

Für die Arbeit an $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen ist die Driftrate des 729 nm Lasers ein limitierender Faktor. Diese Frequenzdriften können jedoch, wie in Kapitel 3 besprochen, bis zu einer Obergrenze der Driftrate von 10 Hz/s und der Änderung der Driftrate von 0.1mHz/s^2 kompensiert werden.

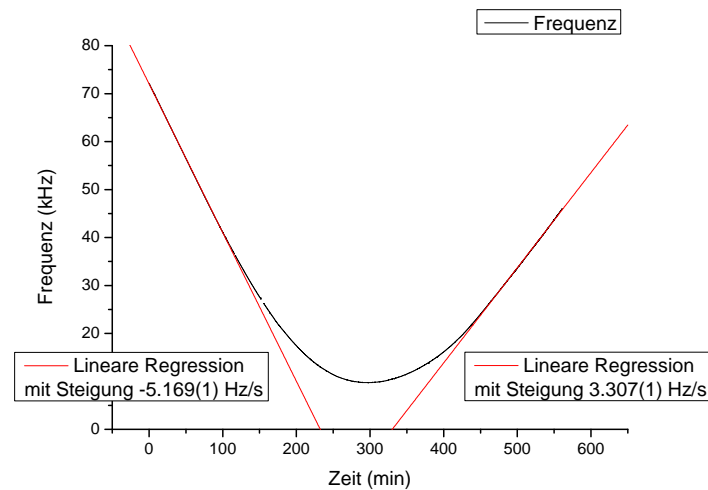
Im Folgenden werden die Driftrate und die Änderung der Driftrate des 729 nm Lasers charakterisiert. In Kapitel 4.3 ist beschrieben, dass der Abstand L der Spiegel im Resonator die Frequenz des Lasers vorgibt ($\nu_m = mc/2nL$). Dieser Abstand kann sich aus verschiedenen Gründen über die Zeit verändern: Zum Einen gibt es auf großen Zeitskalen, über Wochen und Monate, Veränderungen am Resonator, wie beispielsweise bei der optischen Kontaktierung der Spiegel. Diese Veränderungen führen zu kleinen Langzeitdriften im Bereich von $< 1\text{ Hz/s}$ [66]. Diese Driften können nicht verhindert, jedoch kompensiert werden. Zum Anderen bewirken Temperaturänderungen im Zeitbereich von Minuten bis Stunden eine Expansion oder Kontraktion des Abstandhalters zwischen den Spiegeln und damit eine Frequenzänderung. Wie in Kapitel 5.3.5 festgestellt wurde, beträgt die Abhängigkeit der Laserfrequenz gegenüber der Temperatur $\Delta\nu/\Delta T = 12(3)\text{ MHz/K}$. Für die Stabilisierung der Laserfrequenz innerhalb von 1 Hz, müsste der Resonator in einem Temperaturbereich von etwa 100 nK gehalten werden. Im Folgenden wird die Driftrate bei Stabilisierung auf den Resonator hoher Finesse ohne Kompensation charakterisiert. Anschließend werden die Frequenzdriften mit der in Kapitel 5.4 beschriebenen Kompensationsmethode untersucht.

6.2.1 Die Driften ohne Kompensation

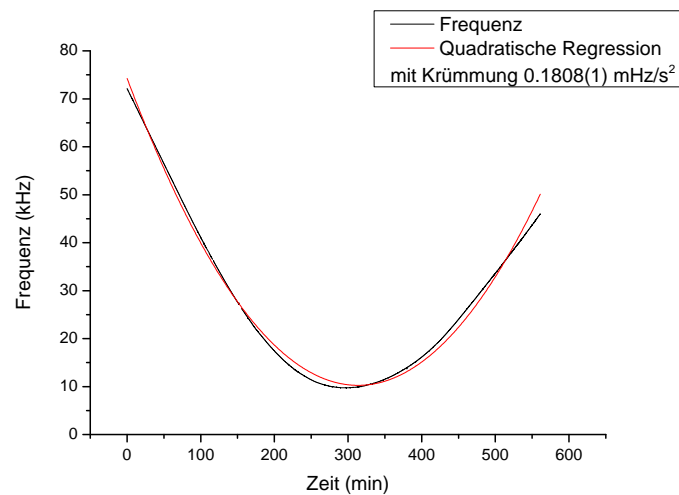
Für die Charakterisierung der intrinsischen Frequenzdriften des Resonators hoher Finesse werden Datenpunkte durch Schwebungsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser über die Nacht ermittelt. Es wird erwartet, dass die Laserfrequenz der Raumtemperatur (siehe Abbildung 5.12) folgt. Die Raumtemperatur selbst oszilliert mit einer Periode von rund einem Tag. In Abbildung 6.3 sind die Frequenzänderungen des Lasers vom 24. und vom 25.02.2015 aufgezeichnet. Anhand der Abbildung 6.3 wird ersichtlich, dass der Drift über den Zeitraum eines Tages nicht linear ist. Es wurde versucht mit Hilfe von linearen Regressionen eine Abschätzung der Größenordnungen zu erhalten. Je nach Tageszeit und Laborbenützung treten Frequenzdriften zwischen 0 Hz/s und $5.169(1)\text{ Hz/s}$ auf. Durch eine quadratische Regression über die Daten konnte eine Driftänderung von $0.1808(1)\text{ mHz/s}^2$ berechnet werden. Diese Werte liegen im Rahmen der Anforderungen aus Kapitel 3 von $5.169(1) < 10\text{ Hz/s}$ für den Drift und nur geringfügig über der Spezifikation für die Driftänderung $0.1808(1) \approx 0.1\text{ mHz/s}^2$.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 6.3: Messung der Frequenzdriften am 24.02.2015 und am 25.02.2015 zwischen 19:00 Uhr und 03:30 Uhr. **(a)** Rohdaten der Driftmessung. **(b)** Messung mit rot eingezeichneten linearen Regressionen mit einer Steigung von $-5.169(1)$ Hz/s bzw. $3.307(1)$ Hz/s. **(c)** Messung mit rot eingezeichneter quadratischer Regression mit einer Krümmung von $0.1808(1)$ mHz/s².

6.2.2 Die Driften mit Kompensation

Wie in Kapitel 6.2 gezeigt ist, sind die Frequenzdriften des 729 nm Lasers nicht linear. Mit Frequenzdriften in der Größenordnung von ~ 100 kHz pro Tag kann der ~ 1 Hz schmale 729 nm Übergang der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen ohne Kompensation dieser Driften nicht getrieben werden. Deshalb wurde ein Kompensationssystem, welches in Kapitel 5.4 beschrieben wurde, implementiert. Mit diesem System kann der 729 nm Laser auf einen Referenzlaser stabilisiert werden. Der Referenzlaser selbst ist auf den $S_{1/2}-D_{5/2}$ Übergang der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen bei 729 nm stabilisiert. Dabei wird die Frequenzdifferenz der Laser mit einem Frequenzzähler festgestellt. Von einem Lab-View Programm wird jede Sekunde die Frequenzdifferenz aufgenommen und gespeichert. Alle 300 s wird die Frequenzdrift aus den Daten der letzten 5 Minuten mit einer linearen Regression genähert. Diese lineare Frequenzmodulation wird dann einem Frequenzgenerator, welcher einen AOM treibt, weitergegeben. In Abbildung 6.4 (a) ist die Frequenzabweichung relativ zum Referenzlaser über einen Zeitraum von etwa 7 Stunden dargestellt. Aus diesen Daten wurde ein Histogramm mit gaußförmiger Regression mit $\text{FWHM} = 31.8(6)$ Hz erstellt (siehe Abbildung 6.4 (b)). Mit der Kompensation ist es möglich die Laserfrequenz in mehr als 99.7% (3σ) der Zeit von 7 Stunden innerhalb eines Bereichs von ~ 80 Hz relativ zum Referenzlaser zu halten.

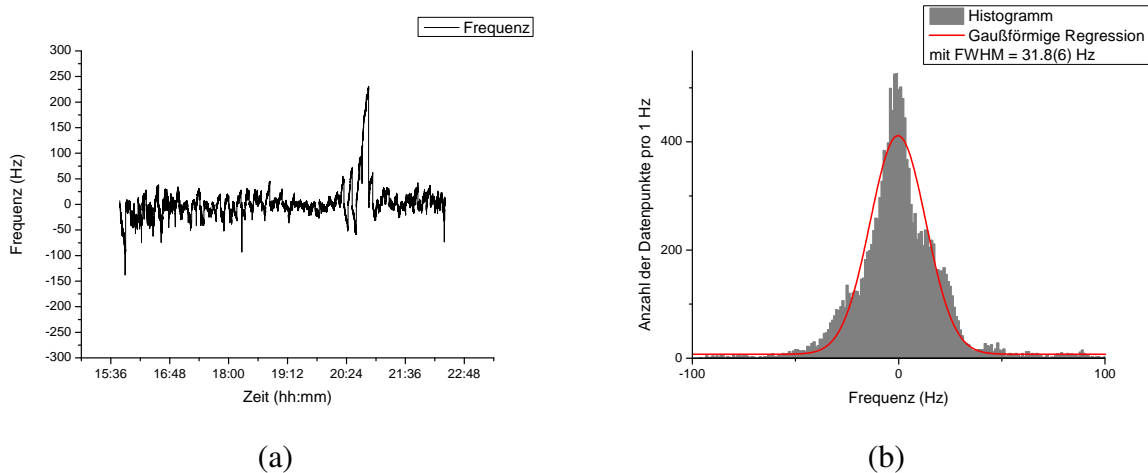


Abbildung 6.4: Messung der Frequenzdriften am 27.02.2015 mit eingeschalteter Kompensation. (a) Frequenzabweichung relativ zum Referenzlaser zwischen 15:30 Uhr und 22:30 Uhr. (b) Histogramm der Frequenzabweichung mit einer Spaltbreite von 1 Hz und einer vollen Halbwertsbreite von $\text{FWHM} = 31.8(6)$ Hz.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Masterarbeit war es, ein schmalbandiges und frequenzstabiles Lasersystem mit 729 nm Wellenlänge aufzubauen. Der 729 nm Laser wird in den Experimenten der Gruppe für Quantenoptik und Spektroskopie für die Manipulation von gespeicherten $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen in Paulfallen verwendet. Wie in Kapitel 3 beschrieben ist, treibt dieser Laser den $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$ Übergang bei einer Wellenlänge von 729 nm und wird beispielsweise zur Seitenbandkühlung, Kompensation der Mikrobewegung und zukünftig auch für die Ausführung von kohärenten Quantengattern eingesetzt. Für die Ausführung der kohärenten Quantengatter ist eine Linienbreite von < 10 Hz geplant. Des weiteren muss die Änderung der Driftrate klein genug sein (< 0.1 mHz/s²), um diese mit spektroskopischen Messungen in einem gewünschten Zeitintervall (100 s) kompensieren zu können.

Als Laserquelle wird ein kommerzielles Diodenlasersystem verwendet und mit Hilfe von optischen Resonatoren frequenzstabilisiert. Einige wichtige Parameter der optischen Resonatoren sowie die verwendete Frequenzstabilisierung nach Pound, Drever und Hall sind in Kapitel 4 diskutiert. Zur Bestimmung dieser Resonatorparameter wurden Schwebungsmessungen mit einem stabilen Referenzlaser gemacht. Aufgrund der hohen intrinsischen Linienbreite von 2.2(1) MHz des Diodenlasers ist die Stabilisierung zweistufig mit einem Resonator mittlerer sowie mit einem Resonator hoher Finesse aufgebaut. Der mechanische und optische Aufbau sowie die Messungen des freien Spektralbereichs und der Linienbreite dieser Resonatoren sind in Kapitel 5 erläutert.

Der erste Schritt der Frequenzstabilisierung ist die Vorstabilisierung durch den Resonator mittlerer Finesse mit einer vom Hersteller spezifizierten Finesse von $\mathcal{F} = 6300(2500)$. Der freie Spektralbereich dieses Resonators kann zu $\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.57499(1)$ GHz bestimmt werden. Daraus errechnet sich eine optische Länge des Resonators von $L = 95.1727(5)$ mm. Mit Hilfe des freien Spektralbereichs und der Finesse kann die Linienbreite zu $\delta\nu_{\text{R}} = 250(100)$ kHz berechnet werden. Wie in Kapitel 4 beschrieben ist, gibt diese Resonatorlinienbreite $\delta\nu_{\text{R}}$ in erster Ordnung die Steigung des PDH-Fehlersignals vor und somit die Leistungsfähigkeit der Frequenzstabilisierung. Aus der Charakterisierung des 729 nm Lasers in Kapitel 6 folgt, dass die Linienbreite des Lasers mit Hilfe der Vorstabilisierung von $\Delta\nu_{\text{L}} = 2.2(1)$ MHz auf $\Delta\nu_{\text{L}} = 3.74(2)$ kHz um einen Faktor von 590(30) verringert werden kann.

Nach diesem ersten Schritt zur Frequenzstabilisierung wird der Laser durch den Resonator hoher Finesse in den geplanten Linienbreitenbereich von < 10 Hz stabilisiert. Die Vermessung des freien Spektralbereichs ergibt bei diesem Resonator einen Wert von

$\Delta\nu_{\text{FSB}} = 1.9330733(2)$ GHz woraus sich eine optische Länge von $L = 77.54296(1)$ mm berechnen lässt. Mit Hilfe einer Resonatorabklingzeitspektroskopie kann eine Linienbreite von $\delta\nu_{\text{R}} = 4.40(6)$ kHz bestimmt werden. Aus der Linienbreite $\delta\nu_{\text{R}}$ errechnet sich zusammen mit dem freien Spektralbereich $\Delta\nu_{\text{FSB}}$ eine Finesse von $\mathcal{F} = 440000(5500)$. Aufgrund der schmalen Linienbreite, beziehungsweise der hohen Finesse kann die Linienbreite des Lasers bei Stabilisierung auf den Resonator hoher Finesse von ursprünglich $\Delta\nu_{\text{L}} = 3.74(2)$ kHz auf $\Delta\nu_{\text{L}} < 1.73(5)$ Hz (gemessen über einen Zeitbereich von 1 s) um den Faktor 2200(60) verkleinert werden. Für kurze Zeiten (~ 1 s) wurde die geplante Linienbreite $\Delta\nu_{\text{L}} < 1.73(5) < 10$ Hz erreicht. Über längere Zeiten driftet die Laserfrequenz jedoch bezüglich der Ionenfrequenz, wodurch die Linienbreite verbreitert wird.

Da die Driftrate des Lasers von der Temperaturstabilität des Resonators hoher Finesse vorgegeben wird, ist in Kapitel 5 die Temperaturstabilisierung dieses Resonators beschrieben. Durch die Temperaturschwankungen im Labor von $\Delta T = 727(70)$ mK (gemessen über einen Zeitraum von etwa 27 Tagen) und einer gemessenen Temperaturempfindlichkeit des Resonators hoher Finesse von $\Delta\nu/\Delta T = 12(3)$ MHz/K ergibt sich bei einer angenommenen Temperaturos-zillation mit einer Periode von 24 Stunden eine geschätzte Driftrate von 200(50) Hz/s. Diese Driftraten würden die Anforderungen von < 10 Hz/s deutlich überschreiten. Mit Hilfe einer elektrischen Temperaturstabilisierung der Aluminiumbox außerhalb der Vakuumkammer können die Temperaturschwankungen im Labor von $\Delta T_{\text{Labor}} = 727(70)$ mK auf $\Delta T_{\text{Kammer}} = 10.4(4)$ mK an der Vakuumkammer um einen Faktor von 70(7) verkleinert werden. Aus der Annahme einer linearen Temperaturänderung von 10.4(4) mK über 12 Stunden errechnet sich eine erwartete Frequenzdrift von 2.9(7) Hz/s.

Typische Driftraten, die aufgrund dieser Temperaturschwankungen entstehen, wurden in Kapitel 6 untersucht. Im Verlauf eines Tages konnten Frequenzdriften von bis zu 5.169(1) Hz/s gemessen werden. Die Driftänderung wurde mittels quadratischer Regression zu 0.1808(1) mHz/s² berechnet. Die Werte für die Driften 5.169(1) < 10 Hz/s liegen somit im Rahmen der Anforderungen aus Kapitel 3. Die Änderung der Driftrate 0.1808(1) ≈ 0.1 mHz/s² ist nur geringfügig höher als spezifiziert und ermöglicht dadurch eine Kompensation der Frequenzdriften. In Kapitel 6.2 konnte gezeigt werden, dass mit dem implementierten System zur Driftkompensierung die Laserfrequenz relativ zur Referenzlaserfrequenz mit Frequenzmessungen im Zeitintervall von 300 s innerhalb von 31.8(6) Hz über einen Zeitraum von 7 Stunden gehalten werden kann.

Damit das stabilisierte Laserlicht gegen äußere Störungen beim Transport über Glasfaserkabel geschützt werden kann, wurde in Kapitel 5 die Kompensation von Faserrauschen eingeführt. In diesem Kapitel ist gezeigt, dass mit der implementierten Faserstabilisierung die Linienbreite des Lasers bei der Transmission über eine 220 m lange Glasfaser um weniger als 1 Hz verbreitert wird.

Die wichtigen Kenngrößen, wie Linienbreite und Driftrate, des kommerziellen Diodenlasersystems konnten im Rahmen dieser Masterarbeit, mit Hilfe der hier vorgestellten Stabilisierungsmethoden, wesentlich verbessert werden. Die grundlegenden Experimente zur Quanteninformationsverarbeitung am $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$ Übergang der gespeicherten $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen können mit diesem 729 nm Laser durchgeführt werden. Die größte Limitierung des Systems stellt derzeit die temperaturbedingte, hohe Driftrate im Bereich von einigen Hz/s dar. Zur Minimierung der Driftraten, müsste der Resonator hoher Finesse zum optimalen Temperaturpunkt von $T_0 = 14_{-50}^{+10}$ °C gekühlt werden (siehe Kapitel 5.3.5). Dafür könnte entweder die Holzbox, die Vakuumkammer selbst, oder beides gekühlt werden. Für die derzeit geplanten Experimente ist die Kompensation

durch Schwebungsmessungen mit dem Referenzlaser jedoch ausreichend. Andererseits ist man hierbei von einem stabilisierten Referenzlaser abhängig. Mit einer Kompensation der Driften durch spektroskopischen Messungen der $^{40}\text{Ca}^+$ Ionen könnte man unabhängig vom Referenzlaser werden.

Anhang A

Abkürzungen (Akronyme)

Abkürzung	englische Bedeutung	deutsche Bedeutung
AOM		akustooptischer Modulator
ASE	Amplified spontaneous emission	Verstärkung der spontanen Emission
DDS		Direkter digitaler Synthesizer
ECDL	External cavity diode laser	Diodenlaser mit externem Resonator
EOM		Elektrooptischer Phasenmodulator
ER		Elektronischer Resonator
FG		Funktionsgenerator
FSB		Freier Spektralbereich
FWHM	Full width at half maximum	volle Halbwertsbreite
GPIO	General purpose interface bus	Schnittstellenbus für allgemeine Zwecke
HF		Hohe Finesse
LASER	Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation	Licht Verstärkung auf Basis von stimulierter Emission von Strahlung
LT		Leistungsteiler
MF		Mittlere Finesse
NTC	Negative temperature coefficient	Negativer Temperaturkoeffizient
PC	Personal computer	Computer
PD		Photodiode
PLL	Phase locked loop	Phasenregelschleife
SGO		Spannungsgeregelter Oszillator
TA	Tapered Amplifier	Trapezverstärker
ULE	Ultra low expansion	ultraniedrige Ausdehnung
USB	Universal serial bus	Universeller serieller Bus
V		Verstärker

Literaturverzeichnis

- [1] M. Niedermayr, K. Lakhmanskiy, M. Kumph, S. Partel, J. Edlinger, M. Brownnutt, and R. Blatt. *Cryogenic surface ion trap based on intrinsic silicon*, New J. Phys. **16**, 113068, (2014).
- [2] P. Jurcevic, B. P. Lanyon, P. Hauke, C. Hempel, P. Zoller, R. Blatt, and C. F. Roos. *Quasiparticle engineering and entanglement propagation in a quantum many-body system*, Nature, **511**:202–205, (2014).
- [3] D. Nigg, M. Müller, E. A. Martinez, P. Schindler, M. Hennrich, T. Monz, M. A. Martin-Delgado, and R. Blatt. *Quantum computations on a topologically encoded qubit*, Science, **345**, 6194:302–305, (2014).
- [4] S. A. Diddams, Th. Udem, J. C. Berquist, E. A. Curtis, R. E. Drullinger, L. Hollberg, W. M. Itano, W. D. Lee, C. W. Oates, K. R. Vogel, and D. J. Wineland. *An optical clock based on a single trapped $^{199}\text{Hg}^+$ ion*, Science **293**, 825, (2001).
- [5] C. W. Chou, D. B. Hume, J. C. J. Koelemeij, D. J. Wineland, and T. Rosenband. *Frequency comparison of two high-accuracy Al^+ optical clocks*, Phys. Rev. Lett. **104**, 070802, (2010).
- [6] R. W. P. Drever, J. L. Hall, and F. V. Kowalski. *Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator*, Appl. Phys. B **31**:97–105, (1983).
- [7] Ch. Salomon, D. Hils, and J. L. Hall. *Laser stabilization at the milihertz level*, JOSA B **5**, 8:1576–1587, (1988).
- [8] B. C. Young, F. C. Cruz, W. M. Itano, and J. C. Bergquist. *Visible lasers with sub-Hertz linewidths*, Phys. Rev. Lett. **82**, 3799, (1999).
- [9] M. Notcutt, LS. Ma, J. Ye, and J. L. Hall. *Simple and compact 1-Hz laser system via an improved mounting configuration of a reference cavity*, Opt. Lett. **30**, 14:1815–1817, (2005).
- [10] M. Notcutt, LS. Ma, A. D. Ludlow, S. M. Foreman, J. Ye, and J. L. Hall. *Contribution of thermal noise to frequency stability of rigid optical cavity via Hertz-linewidth lasers*, Phys. Rev. A **73**, 3:031804, (2006).
- [11] A. N. Matveev, N. N. Kolachevsky, J. Alnis, and T. W. Hänsch. *Semiconductor laser with the sub-Hertz linewidth*, Quantum Electronics **38**, 10:895, (2008).

- [12] J. Alnis, A. Matveev, N. Kolachevsky, Th. Udem, and T. W. Hänsch. *Sub-Hertz line-width diode lasers by stabilization to vibrationally and thermally compensated ultralow-expansion glass Fabry-Pérot cavities*, Phys. Rev. A **77**, 5:053809, (2008).
- [13] M. Chwalla. *Precision spectroscopy with $^{40}\text{Ca}^+$ ions in a Paul trap*. PhD thesis, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, (2009).
- [14] I. Cirac and P. Zoller. *Quantum computation with cold trapped ions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 20, (1995).
- [15] W. Paul and H. Steinwedel. *Quadrupole mass filter*, Z. Naturforsch. A **8**:448, (1953).
- [16] W. Paul, O. Osberghaus, and E. Fischer. *Ein Ionenkäfig*, Forschungsberichte des Wirtschafts-und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen **415**, Westdt. Verlag, (1958).
- [17] R.F. Wuerker, H. Shelton, and R.V. Langmuir. *Electrodynamic containment of charged particles*, J. Appl. Phys. **30**, 342, (1959).
- [18] W. Demtröder. *Laserspektroskopie*. Springer, (2000).
- [19] J. Eichler und H. J. Eichler. *Laser*. Springer, (1998).
- [20] Toptica. *TA 100, Tapered amplifier system, Manual*.
- [21] A. Franzen. *ComponentLibrary*. Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.
- [22] J. P. Gordon, H. J. Zeiger, and C. H. Townes. *The maser - New type of microwave amplifier; frequency standard, and spectrometer*, Phys. Rev. **99**, 1264, (1955).
- [23] A. L. Schawlow and C. H. Townes. *Infrared and optical masers*, Phys. Rev. **112**, 1940, (1958).
- [24] D. Mehuys, D.F. Welch, and L. Goldberg. *2.0 W CW, diffraction-limited tapered amplifier with diode injection*, Elec. Lett. **28**, 21:1944–1946, (1992).
- [25] R. A. Nyman, G. Varoquaux, B. Villier, D. Sacchet, F. Moron, Y. Le Coq, A. Aspect, and P. Bouyer. *Tapered-amplified antireflection-coated laser diodes for potassium and rubidium atomic-physics experiments*, Rev. Sci. Instrum. **77**, 033105, (2006).
- [26] J. Jin and D. A. Church. *Precision lifetimes for the Ca^+ $4p^2P$ levels: Experiment challenges theory at the 1% level*, Phys. Rev. Lett. **70**, 21:3213–3216, (1993).
- [27] D.F.V. James. *Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation*, Appl. Phys. B **66**:181–190, (1998).
- [28] P. A. Barton, C. J. S. Donald, D. M. Lucas, D. A. Stevens, A. M. Steane, and D. N. Stacey. *Measurement of the lifetime of the $3d^2D_{5/2}$ state in $^{40}\text{Ca}^+$* , Phys. Rev. A **62**, 032503, (2000).

- [29] M. Kumph, M. Brownnutt, and R. Blatt. *Two-dimensional arrays of radio-frequency ion traps with addressable interactions*, New J. Phys. **13**, 073043, (2011).
- [30] M. Kumph, P. Holz, K. Langer, M. Niedermayr, M. Brownnutt, and R. Blatt. *Operation of a planar-electrode ion trap array with adjustable RF electrodes*, (arXiv:1402.0791), (2014).
- [31] Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt, and P. E. Toschek. *Observation of quantum jumps*, Phys. Rev. Lett. **57**, 1696, (1986).
- [32] J. C. Bergquist, Randall G. Hulet, Wayne M. Itano, and D. J. Wineland. *Observation of quantum jumps in a single atom*, Phys. Rev. Lett. **57**, 1699, (1986).
- [33] C. A. Blockley, D. F. Walls, and H. Risken. *Quantum collapses and revivals in a quantized trap*, Europhys. Lett. **17**, 6:509, (1992).
- [34] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proceedings of the IEEE **51**, 1:89–109, (1963).
- [35] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, S. Gulde, M. Riebe, G.P.T Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, W. Hänsel, J. Eschner, C.F. Roos, and R. Blatt. *How to realize a universal quantum gate with trapped ions*, Appl. Phys. B **77**, 8:789–796, (2003).
- [36] T. W. Hänsch and A. L. Schawlow. *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Comm. **13**, 1:68–69, (1975).
- [37] J. Eschner, G. Morigi, F. Schmidt-Kaler, and R. Blatt. *Laser cooling of trapped ions*, J. Opt. Soc. Am. B **20**, 5:1003–1015, (2003).
- [38] F. Schmidt-Kaler, Ch. Roos, H. Ch. Nägerl, H. Rohde, S. Gulde, A. Mundt, M. Lederbauer, G. Thalhammer, Th. Zeiger, P. Barton, L. Hornekaer, G. Reymond, D. Leibfried, J. Eschner, and R. Blatt. *Ground state cooling, quantum state engineering and study of decoherence of ions in Paul traps*, J. Mod. Opt. **47**, 14-15:2573–2582, (2000).
- [39] D. J. Wineland, R. E. Drullinger, and F. L. Walls. *Radiation-pressure cooling of bound resonant absorbers*, Phys. Rev. Lett. **40**, 25:1639, (1978).
- [40] D. J. Wineland, W. M. Itano, J. C. Bergquist, and R. G. Hulet. *Laser-cooling limits and single-ion spectroscopy*, Phys. Rev. A **36**, 5:2220, (1987).
- [41] D. J. Heinzen and D. J. Wineland. *Quantum-limited cooling and detection of radio-frequency oscillations by laser-cooled ions*, Phys. Rev. A **42**, 5:2977, (1990).
- [42] G. Morigi, J. I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. *Ground-state laser cooling beyond the Lamb-Dicke limit*, Europhys. Lett. **39**, 1:13, (1997).
- [43] D.J. Berkeland, J.D. Miller, J.C. Bergquist, W.M. Itano, and D.J. Wineland. *Minimization of ion micromotion in a Paul trap*, J. Appl. Phys. **83**, 10:5025, (1998).

- [44] Ch. Roos. *Controlling the quantum state of trapped ions*. PhD thesis, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, (2000).
- [45] T. Monz. *Quantum information processing beyond ten ion-qubits*. PhD thesis, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, (2011).
- [46] S. Schneider and G. J. Milburn. *Decoherence in ion traps due to laser intensity and phase fluctuations*, Phys. Rev. A **57**, 5:3748, (1998).
- [47] T. Monz, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Chwalla, D. Nigg, W. A. Coish, M. Harlander, W. Hänsel, M. Hennrich, and R. Blatt. *14-qubit entanglement: Creation and coherence*, Phys. Rev. Lett. **106**, 13:130506, (2011).
- [48] Ph. Schindler. *Quantum computation and simulation with trapped ions using dissipation*. PhD thesis, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, (2013).
- [49] Ch. Schenk and U. Tietze. *Halbleiter-Schaltungstechnik*, volume 12. Springer, (1993).
- [50] J. Bechhoefer. *Feedback for physicists: A tutorial essay on control*, Rev. Mod. Phys. **77**:783–836, (2005).
- [51] Lunze. J. *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf Einschleifiger Regelungen*. Springer, (2012).
- [52] C. Wieman and T.W. Hänsch. *Doppler-free laser polarization spectroscopy*, Phys. Rev. Lett. **36**, 1170, (1976).
- [53] C.P. Pearman, C.S. Adams, S.G. Cox, P.F. Griffin, D.A. Smith, and I.G. Hughes. *Polarization spectroscopy of a closed atomic transition: applications to laser frequency locking*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **35**:5141–5151, (2002).
- [54] G. C. Bjorklund. *Frequency-modulation spectroscopy: a new method for measuring weak absorptions and dispersions*, Opt. Lett. **5**:15–17, (1980).
- [55] J. H. Shirley. *Modulation transfer processes in optical heterodyne saturation spectroscopy*, Opt. Lett. **7**, 11:537–539, (1982).
- [56] W. Wen-Li, Y. Jie, J. Hai-Ling, B. Zhi-Yi, M. Long-Sheng, and X. Xin-Ye. *Frequency stabilization of a 399-nm laser by modulation transfer spectroscopy in an ytterbium hollow cathode lamp*, Chinese Phys. B **20**, 013201, (2011).
- [57] F. Bertinetto, P. Cordiale, G. Galzerano, and E. Bava. *Frequency stabilization of DBR diode laser against Cs absorption lines at 852 nm using the modulation transfer method*, IEEE Trans. Instr. Meas. **50**, 2:490–492, (2001).
- [58] H.-A. Bachor and T. C. Ralph. *A guide to experiments in quantum optics*. Wiley, (2004).
- [59] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, (2007).

- [60] Eric D Black. *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*, Am. J. Phys. **69**, 1:79–87, (2001).
- [61] G. Di Domenico, S. Schilt, and P. Thomann. *Simple approach to the relation between laser frequency noise and laser line shape*, Appl. Opt. **49**, 25:4801–4807, (2010).
- [62] D.S. Elliott, R. Roy, and S. J. Smith. *Extracavity laser band-shape and bandwidth modification*, Phys. Rev. A **26**, 12, (1982).
- [63] L. Papula. *Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, (2014).
- [64] M. Kumph. *2D arrays of ion traps for large scale integration of quantum information processors*. PhD thesis, (in preparation).
- [65] W. Zhang, M. J. Martin, C. Benko, J. L. Hall, J. Ye, C. Hagemann, T. Legero, U. Sterr, F. Riehle, G. D. Cole, and M. Aspelmeyer. *Reduction of residual amplitude modulation to 10^{-6} for frequency modulation and laser stabilization*, Opt. Lett. **39**, 7:1980–1983, (2014).
- [66] G. Kirchmaier. *Frequency stabilization of a Titanium-Sapphire laser for precision spectroscopy on Calcium ions*. Master’s thesis, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, (2006).
- [67] Y. Pang, J. J. Hamilton, and J. P. Richard. *Frequency noise induced by fiber perturbations in a fiber-linked stabilized laser*, Appl. Opt. **31**, 36:7532–7534, (1992).
- [68] LS. Ma, P. Jungner, J. Ye, and J. L. Hall. *Delivering the same optical frequency at two places: accurate cancellation of phase noise introduced by an optical fiber or other time-varying path*, Opt. Lett. **19**, 21:1777–1779, (1994).
- [69] LS. Ma, P. Jungner, J. Ye, and J. L. Hall. *Accurate cancellation (to millihertz levels) of optical phase noise due to vibration or insertion phase in fiber-transmitted light*. In *Photonics West*, pages 165–175. International Society for Optics and Photonics, (1995).
- [70] S. M. Foreman, A. D. Ludlow, M. H. G. de Miranda, J. E. Stalnaker, S. A. Diddams, and J. Ye. *Coherent optical phase transfer over a 32-km fiber with 1 s instability at 10^{-17}* , Phys. Rev. Lett. **99**, 15:153601, (2007).
- [71] G. Grosche, O. Terra, K. Predehl, R. Holzwarth, B. Lipphardt, F. Vogt, U. Sterr, and H. Schnatz. *Optical frequency transfer via 146 km fiber link with 10^{-19} relative accuracy*, Opt. Lett. **34**, 15:2270–2272, (2009).
- [72] J. Alnis, A. Matveev, N. Kolachevsky, T. Wilken, R. Holzwarth, and T. W. Hänsch. *Stable diode lasers for hydrogen precision spectroscopy*, Eur. Phys. J. Special Topics **163**, 1:89–94, (2008).
- [73] N.F. Ramsey. *Molecular beams*. Clarendon Press Oxford, 1956.