

Diplomarbeit

**Frequenzstabilisierung von Diodenlasern bei 850,  
854 und 866 nm mit Linienbreiten im  
Kilohertz-Bereich**

zur Erlangung des akademischen Grades eines Magisters der  
Naturwissenschaften vorgelegt von

Gregor Thalhammer

Institut für Experimentalphysik der Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

Innsbruck im Mai 1999



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Beschreibung der Stabilität</b>	<b>5</b>
1.1. Grundsätzliches . . . . .	5
1.1.1. Fouriertransformation . . . . .	5
1.1.2. Spektrale Energiedichte . . . . .	6
1.1.3. Spektrale Leistungsdichte . . . . .	6
1.1.4. Autokorrelation und Wiener-Khintchine Theorem . . . . .	6
1.1.5. Faltungssatz . . . . .	7
1.1.6. Andere Konventionen . . . . .	8
1.2. Beschreibung von Frequenzschwankungen . . . . .	8
1.2.1. Instantane Frequenz . . . . .	8
1.2.2. Instantane Frequenz von reellen Signalen . . . . .	9
1.2.3. Frequenzschwankung, Phasenabweichung und mittlere Phasenänderung . . . . .	9
1.2.4. Klassifikation von Frequenzschwankungen . . . . .	10
1.2.5. Beschreibung von Frequenzschwankungen im Frequenzbereich . . . . .	10
1.2.6. Zusammenhang: Leistungs- und Frequenzrauschspektrum . . . . .	12
1.2.7. Allanvarianz . . . . .	14
1.2.8. Schwebungsmessung . . . . .	15
<b>2. Frequenzstabilisierung</b>	<b>19</b>
2.1. Linienbreiten von Diodenlasern . . . . .	19
2.2. Linienbreitenreduktion durch optische Rückkopplung . . . . .	20
2.3. Der optische Resonator als Interferometer . . . . .	21
2.3.1. Dynamisches Verhalten . . . . .	24
2.4. Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall . . . . .	25
2.4.1. Dynamisches Verhalten . . . . .	29
2.4.2. Phasenmodulation versus Amplitudenmodulation . . . . .	29
2.5. Phasenstarre Kopplung . . . . .	30
2.6. Kammgenerator . . . . .	31

<b>3. Experimenteller Aufbau</b>	<b>33</b>
3.1. Aufbau gitterstabilisierter Diodenlaser . . . . .	33
3.1.1. Laserdioden . . . . .	33
3.1.2. Aufbau . . . . .	33
3.2. Optischer Aufbau . . . . .	35
3.2.1. Optischer Resonator . . . . .	37
3.3. Elektronischer Aufbau . . . . .	37
3.3.1. Fehlersignalerzeugung . . . . .	37
3.3.2. Photodiode . . . . .	41
3.3.3. Regelverstärker . . . . .	41
3.4. Fehlersignal . . . . .	42
3.5. Der driftstabile optische Resonator . . . . .	42
3.5.1. Resonatordrift . . . . .	42
3.5.2. Aufbau . . . . .	44
3.6. Sättigungsspektroskopie an Cäsium . . . . .	45
<b>4. Messungen zur Stabilität</b>	<b>49</b>
4.1. Messung der Resonatordrift des driftstabilen Resonators . . . . .	49
4.2. Messung der Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz . . . . .	50
4.3. Frequenzgang Gitterpiezo . . . . .	54
4.4. Akustische Störungen . . . . .	57
4.5. Messungen zur kurzfristigen Stabilität . . . . .	59
4.5.1. Schwebungsmessungen . . . . .	59
4.5.2. Transmission durch optischen Resonator . . . . .	65
4.5.3. Allanvarianz . . . . .	70
4.6. Phasenstarre Kopplung . . . . .	71
<b>5. Spektroskopische Messungen an gefangenen <math>\text{Ca}^+</math>-Ionen</b>	<b>73</b>
5.1. Termschema von $^{40}\text{Ca}^+$ . . . . .	73
5.2. Lineare Paulfalle . . . . .	75
5.3. Laserkühlen von gefangenen Ionen . . . . .	78
5.3.1. Dopplerkühlen . . . . .	78
5.3.2. Seitenbandkühlen . . . . .	81
5.4. Optogalvanische Spektroskopie . . . . .	84
<b>6. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>87</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>89</b>

# Einleitung

In letzter Zeit haben neue Entwicklungen rund um den bislang noch nicht real existierenden Quantencomputer nicht nur in der Fachwelt großes Aufsehen verursacht. Im Unterschied zu konventionellen digitalen Computern, die die Information als Kombinationen von zwei Zuständen „0“ und „1“ speichern, operiert ein Quantencomputer mit der quantenmechanischen Überlagerung von zwei Zuständen, dem Quanten-Bit oder „qubit“. Eine Kombination solcher überlagerter Zustände, die in Analogie zur Digitaltechnik als „Quanten-Register“ bezeichnet wird, repräsentiert gleichzeitig viele verschiedene Zahlen. Manipulationen damit, ohne dass die Überlagerung zerstört wird, bedeutet ein simultanes Operieren auf allen jenen Zahlen, die dieses Quanten-Register repräsentiert. Ein effektiver Algorithmus zur Primfaktorisation von ganzen Zahlen (SHOR, 1997), der diesen „Quantenparallelismus“ ausnützt, wurde 1994 von dem Mathematiker Peter Shor entdeckt. Er konnte zeigen, dass sein Algorithmus zur Faktorisierung einer Zahl mit  $n$  Stellen auf einem Quantencomputer einen Zeitaufwand proportional zu  $n^2$  benötigt, während der Zeitaufwand der besten bekannten bisherigen Algorithmen exponentiell mit der Stellenzahl (wie  $\exp(n^{\frac{1}{3}})$ ) wächst, d.h. die Faktorisierung großer Zahlen, die auf klassischen Computern undurchführbar ist, wäre mittels eines Quantencomputers durchaus lösbar. Die Besonderheit dieser Entdeckung liegt darin, dass die Sicherheit vieler Verschlüsselungssysteme, insbesondere des weitverbreiteten RSA-Systems, auf der Annahme beruht, dass die Faktorisierung großer Zahlen mit herkömmlichen Methoden extrem zeitaufwendig ist. Peter Shor wurde für diese und weitere Arbeiten über den Quantencomputer 1998 der internationale Nevanlinna-Preis verliehen, eine sehr hohe Auszeichnung auf dem Gebiet der Mathematik.

Die physikalische Realisation eines Quantencomputers erfordert hinreichend stabile Quantensysteme, die untereinander stark wechselwirken, jedoch ansonsten möglichst schwach mit der Umgebung um störende Einflüsse zu vermeiden. Weitere Punkte, die gelöst werden müssen, sind die Präparation eines definierten (reinen) Anfangszustandes, die Abfrage des Endergebnisses mit hinreichender Sicherheit sowie die zuverlässige Durchführung der notwendigen logischen Verknüpfungen durch gezielte Manipulationen von außen, ohne dass dadurch die Kohärenz zerstört wird. Die beiden theoretischen Physiker Cirac und Zoller der Universität Innsbruck schlugen 1995 ein Konzept zur praktischen Verwirklichung eines Quantencomputers vor (CIRAC und ZOLLER, 1995), das diese Forderungen berücksichtigt. Das Konzept umfasst die Manipulation von ge-

fangenen, lasergekühlten Ionen mithilfe von Lasern. Die Information ist in langlebigen, angeregten elektronischen Zuständen der Ionen gespeichert und wird durch geeignete Laserpulse kontrolliert. Die Verknüpfung der internen Zustände mehrerer Ionen erfolgt über die kollektive Bewegung der Ionen in der Falle.

Einzelne gefangene und lasergekühlte Ionen im Ultrahochvakuum stellen ideale Bedingungen für hochauflösende Spektroskopie und die Untersuchung von Quantenphänomenen dar. Die Verringerung der kinetischen Energie durch Laserkühlung, sogar bis in den Bewegungsgrundzustand, vermeidet Verbreiterungsmechanismen aufgrund der Bewegung der Ionen, wie sie z.B. bei der Spektroskopie an Gasen auftreten. Durch die Lokalisation der Ionen in der Falle werden sehr lange Interaktionszeiten möglich, eine weitere Notwendigkeit für hochauflösende Spektroskopie. Die Ionen sind zudem isoliert von störenden externen Einflüssen. Durch Spektroskopie an einem einzigen Ion werden zudem typische Einzelteilchenphänomene wie Quantensprünge oder Photon-Anti-Bunching im Fluoreszenzlicht eines einzelnen Ions beobachtbar (SAUTER et al., 1986; SCHUBERT et al., 1995), die bei Messung an einem Ensemble von Teilchen untergehen. Ziel vieler Experimente ist es weiters, innere (elektronische) sowie äußere (Bewegungszustand) Zustände einzelner Ionen durch Manipulation mittels Laserlicht beliebig zu kontrollieren (LEIBFRIED et al., 1997; MONROE et al., 1996). Abgesehen von den Experimenten zur Realisierung eines Quantencomputers mithilfe von gespeicherten Ionen werden Experimente vorgenommen, die zur Herstellung von Frequenzstandards mit sehr hoher Güte dienen und die in Zukunft möglicherweise das auf Cäsium-Atomuhren beruhende bisherige Frequenznormal ablösen werden.

In einer Reihe von Experimenten an gefangenen  $\text{Be}^+$ -Ionen (LEIBFRIED et al., 1996; MONROE et al., 1995) demonstrierte die Gruppe um D. Wineland die Umsetzbarkeit des Konzeptes von Cirac und Zoller. Insbesondere demonstrierten sie die notwendigen Manipulationen zur Implementation eines CNOT-Gatters, von dem gezeigt wurde, dass es für Quantencomputer die gleiche Rolle als universelles Logikgatter spielt wie das NAND-Gatter für konventionelle digitale Computer.

In der Arbeitsgruppe von Prof. Blatt laufen seit einiger Zeit Experimente, die zum Ziel haben, das Konzept von Cirac-Zoller mithilfe einer Kette von  $\text{Ca}^+$ -Ionen, die in einer linearen Paulfalle gespeichert sind, zu verwirklichen (NÄGERL et al., 1998a). Die lineare Falle hat gegenüber anderen Konzepten den Vorteil, dass die Erweiterung auf mehrere Quantenbits ohne prinzipielle Schwierigkeiten möglich ist. Insbesondere die Manipulation einzelner Ionen in einer Kette von Ionen konnte demonstriert werden (NÄGERL et al., 1998b). Die benötigten Laser, um die diversen Übergänge von  $\text{Ca}^+$  zu treiben, sind relativ leicht verfügbar. Insgesamt stehen Laser bei fünf verschiedenen Wellenlängen zur Verfügung, zwei sind Titan-Saphir-Laser, die übrigen drei sind Diodenlaser.

Diodenlaser haben in der Spektroskopie und Quantenoptik weite Verbreitung gefunden. Die Vorteile gegenüber anderen Lasersystemen sind vor allem der einfache Aufbau und die günstigen Anschaffungs- und Betriebskosten. Freilaufende Diodenlaser besitzen jedoch eine schlechte spektrale Qualität (d.h. Linienbreiten von mehreren MHz) und un-

---

zureichende Langzeitstabilität, um für hochauflösende Spektroskopie geeignet zu sein. Eine Linienbreitenreduktion und Frequenzstabilisierung ist notwendig, um mit anderen Lasersystemen konkurrieren zu können. Die am häufigsten angewandten Verfahren zur Frequenzstabilisierung sind die optische Rückkopplung von einem externen Resonator oder von einem Gitter und die aktive Frequenzstabilisierung auf einen optischen Resonator oder einen atomaren Übergang. Für eine effektive Linienbreitenreduktion durch eine aktive Regelung ist eine hohe Regelbandbreite notwendig, bei Diodenlasern lassen sich durch Modulation des Injektionsstroms Regelbandbreiten bis zu einigen MHz erreichen. Die hohe erreichbare Regelbandbreite macht Diodenlaser geeignet für die phasenstarre Koppelung. Dadurch lässt sich die Differenzfrequenz zweier Diodenlaser mit großer Genauigkeit festlegen. Ebenso ist dadurch der Aufbau von Frequenzketten möglich, der zur genauen Vermessung von großen optischen Frequenzintervallen dient oder zur Absolutmessung von optischen Frequenzen durch Vergleich mit dem primären Frequenznormal von Cäsium-Atomuhren im Mikrowellenbereich.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden die Frequenz von Diodenlasern bei 866 nm, 854 nm und 850 nm durch optische Rückkopplung von einem Gitter und aktive Regelung auf einen optischen Resonator stabilisiert. Für die Diodenlaser bei 850 nm und 854 nm wurde durch Analyse des Schwebungssignals eine Linienbreite relativ zum Referenzresonator von 320 Hz gemessen. Mithilfe eines weiteren Diodenlasers bei 852 nm wurde Sättigungsspektroskopie an Cäsium betrieben. Damit konnte die Drift des optischen Resonators gemessen werden. Durch einige Verbesserungen konnte die Drift auf weniger als 100 kHz/h gesenkt werden. Langfristig bleibt die Resonanzfrequenz auf ca. ein MHz stabil.

Die Diodenlaser bei 866 nm und 854 nm werden dazu verwendet, um sehr langlebige Zustände von  $\text{Ca}^+$  an schnell in den Grundzustand zerfallende Niveaus anzukoppeln. Dadurch kann die Besetzung der langlebigen Zustände gezielt entleert werden. Dies ist notwendig, um für Doppler- bzw. Seitenbandkühlen möglichst große Kühlraten zu erzielen.

In erstem Kapitel dieser Arbeit werden Konzepte zur Beschreibung der Stabilität von Lasern vorgestellt. Das verwendete Verfahren zur Frequenzstabilisierung wird in Kapitel 2 näher erläutert, Kapitel 3 enthält die detaillierte Beschreibung der experimentellen Aufbauten. Damit erfolgte Messungen zur erreichten Stabilität der Diodenlaser zeigt das folgende Kapitel. Im abschließenden Kapitel 5 werden einige Experimente an gefangenen  $\text{Ca}^+$ -Ionen zusammen mit dem nötigen theoretischen Hintergrund vorgestellt, die mithilfe der aufgebauten Diodenlaser ermöglicht wurden.



# 1. Beschreibung der Stabilität

Ziel des experimentellen Teils dieser Arbeit war es, Diodenlaser mit möglichst geringer Linienbreite und geringer Driftrate aufzubauen. In folgenden Kapitel werden nun einige Möglichkeiten vorgestellt, die Frequenzstabilität quantitativ zu beschreiben.

## 1.1. Grundsätzliches

Für die im folgenden verwendeten Begriffe wie Fouriertransformation, Leistungsspektrum etc. gibt es in der Literatur unterschiedliche Definitionen, die sich insbesondere in der Wahl der Normierungsfaktoren unterscheiden. Deshalb werden in diesem Abschnitt die im Weiteren verwendeten Konventionen vorgestellt. Die meisten wurden aus dem Buch von CHAMPENEY (1973) übernommen, nicht angeführte Beweise sind ebenfalls dort zu finden.

**Integralgrenzen** Falls für ein bestimmtes Integral keine Integrationsgrenzen angegeben werden, sind als Grenzen  $-\infty$  bis  $\infty$  gemeint.

### 1.1.1. Fouriertransformation

Für ein Signal  $f(t)$  mit

$$\int |f(t)|^2 dt < \infty \tag{1.1}$$

wird

$$F(\omega) := \int f(t)e^{-i\omega t} dt \tag{1.2}$$

als Fouriertransformierte  $F(\omega)$  von  $f(t)$  bezeichnet.

Mittels der Fourierumkehrtransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega)e^{i\omega t} dt \tag{1.3}$$

lässt sich (unter zusätzlichen Annahmen über  $f(t)$ ) die ursprüngliche Funktion aus deren Fouriertransformierten rekonstruieren. Gleichung (1.3) wird auch als Fourierdarstellung der Funktion  $f$  bezeichnet.

### 1.1.2. Spektrale Energiedichte

Die durch ein elektrisches Signal übertragene Leistung ist proportional zum Quadrat der Spannung, ebenso ist die durch eine elektromagnetische Welle übertragene Energie mit dem Quadrat der elektrischen Feldstärke verknüpft. Die Gesamtenergie ist dann das Integral über die Leistung

$$E_{\text{ges}} = \int |f(t)|^2 dt. \quad (1.4)$$

Analog dazu definiert man die spektrale Energiedichte

$$S_f(\omega) := |F(\omega)|^2 = F^*(\omega)F(\omega). \quad (1.5)$$

Damit gilt

$$\int S_f(\omega) d\omega = 2\pi \int |f(t)|^2 dt, \quad (1.6)$$

die spektrale Dichte kann also (bis auf den Normierungsfaktor  $2\pi$ ) als die Verteilung der Gesamtenergie im Frequenzbereich interpretiert werden.

### 1.1.3. Spektrale Leistungsdichte

Viele Signale, insbesondere periodische, besitzen keine endliche Gesamtenergie, und damit keine Fouriertransformierte, jedoch endliche mittlere Leistung

$$\langle |f(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.7)$$

Analog zur spektralen Energiedichte definiert man die spektrale Leistungsdichte

$$P_f(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_T(\omega)|^2 \quad \text{mit} \quad F_T(\omega) = \int_{-T}^T f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.8)$$

und in Analogie zu (1.6) gilt

$$\int P_f(\omega) d\omega = 2\pi \langle |f(t)|^2 \rangle. \quad (1.9)$$

### 1.1.4. Autokorrelation und Wiener-Khintchine Theorem

Für Signale mit endlicher Energie wird die Autokorrelation durch

$$\rho_f(\tau) := \int f^*(t) f(t + \tau) dt \quad (1.10)$$

definiert, für Signale mit endlicher Leistung verwendet man hingegen die modifizierte Definition

$$R_f(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^*(t) f(t + \tau) dt = \langle f^*(t) f(t + \tau) \rangle \quad (1.11)$$

für die Autokorrelation der Funktion  $f$ .

Das Wiener-Khintchine Theorem stellt die Verbindung zwischen Autokorrelation und spektraler Dichte her. Es besagt, dass  $S_f(\omega)$  bzw.  $P_f(\omega)$  die Fouriertransformierten von  $\rho_f(\tau)$  bzw.  $R_f(\tau)$  sind, d.h.

$$S_f(\omega) = \int \rho_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad \text{bzw.} \quad (1.12)$$

$$P_f(\omega) = \int R_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.13)$$

### 1.1.5. Faltungssatz

Die Faltung zweier Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  ist durch

$$f(t) \otimes g(t) := \int f(t') g(t - t') dt' \quad (1.14)$$

gegeben. Werden die Fouriertransformierten von  $f(t)$  und  $g(t)$  mit  $F(\omega)$  bzw.  $G(\omega)$  bezeichnet, so besagt der Faltungssatz, dass die Fouriertransformierte von  $f(t) \otimes g(t)$  durch  $F(\omega)G(\omega)$  gegeben ist. Umgekehrt erhält man die Fouriertransformierte von  $f(x)g(x)$  als die Faltung  $\frac{1}{2\pi} F(\omega) \otimes G(\omega)$  der einzelnen Fouriertransformierten.

Ähnliches gilt auch für die Kreuzkorrelation von  $f(t)$  und  $g(t)$

$$\rho_{fg}(\tau) := f(t) * g(t) := \int f^*(t) g(t + \tau) dt, \quad (1.15)$$

deren Fouriertransformierte  $F^*(\omega)G(\omega)$  ist.

Aus dem Faltungssatz folgt unmittelbar für die spektrale Energiedichte die Beziehung

$$S_{f \otimes g}(\omega) = S_f(\omega) S_g(\omega). \quad (1.16)$$

Falls eines der beiden Signale unendliche Gesamtenergie, jedoch endliche Leistung besitzt, lässt sich diese Beziehung zu

$$P_{f \otimes g}(\omega) = P_f(\omega) S_g(\omega) \quad (1.17)$$

erweitern.

### 1.1.6. Andere Konventionen

Für reelle Signale  $f(t)$  ist die spektrale Dichte  $S_f(\omega)$  symmetrisch bzgl.  $\omega = 0$ , deshalb verwendet man stattdessen oft die einseitige spektrale Dichte

$${}^{(1S)}S_f(\omega) := \begin{cases} 2S_f(\omega) & \text{für } \omega > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.18)$$

Gleichung 1.6 gilt dann weiterhin, die Integration erstreckt sich jedoch üblicherweise von 0 bis  $\infty$ .

In der konkreten Anwendung ist es meist praktischer, die spektralen Dichten in Abhängigkeit von der Frequenz  $\nu$  anstatt von der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi\nu$  zu verwenden. Dazu definiert man üblicherweise die Fouriertransformierte in Abhängigkeit von  $\nu$  als

$$G(\nu) := \int f(t)e^{-i2\pi\nu t} dt, \quad (1.19)$$

und der Zusammenhang mit der Definition (1.2) der Fouriertransformation ist durch

$$G(\nu) = F(2\pi\nu) \quad (1.20)$$

gegeben. Analog zu (1.5) ist die spektrale Energiedichte in Abhängigkeit von  $\nu$  als

$$W_f(\nu) := |G(\nu)|^2 \quad (1.21)$$

definiert. Insbesondere gilt dann wegen (1.6)

$$\int |f(t)|^2 dt == \int W_f(\nu) d\nu. \quad (1.22)$$

## 1.2. Beschreibung von Frequenzschwankungen

### 1.2.1. Instantane Frequenz

Ein Laser erzeugt ein oszillierendes elektrisches Feld, das durch

$$E(t) = A(t) \exp(i\varphi(t)) \quad (1.23)$$

beschrieben wird, mit (reeller) Amplitude  $A(t)$  und Phase  $\varphi(t)$ . Die *instantane Frequenz* ist dann durch die zeitliche Ableitung der Phase  $\dot{\varphi}(t)$  gegeben.

### 1.2.2. Instantane Frequenz von reellen Signalen

Für reelle Signale der Form

$$f(t) = A(t) \cos(\varphi(t)), \quad (1.24)$$

wie sie sich durch Messung des elektrischen Feldes ergeben würden, ist die instantane Frequenz nicht eindeutig definiert, da eine Zerlegung in Amplitude und Phase nicht eindeutig aus dem Signal abgeleitet werden kann. Das Konzept des analytischen Signals (COHEN, 1995; MANDEL und WOLF, 1995) hilft hier weiter. Der Realteil des dem reellen Signal  $s(t)$  zugeordneten analytische Signal  $z(t)$  stimmt mit dem reellen Signal überein. Für die Fouriertransformierten  $F(\omega)$  und  $Z(\omega)$  gilt die Beziehung

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega) & \text{für } \omega > 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (1.25)$$

die eine Möglichkeit liefert, aus einem reellen Signal das zugehörige analytische Signal zu berechnen. Die Berechnung des analytischen Signals ist auch als Hilbert-Transformation bekannt und ist unter diesem Namen in *MATLAB* implementiert.

So ist z.B. das  $\cos(\varphi(t))$  zugeordnete analytische Signal durch  $\exp(i\varphi(t))$  gegeben. Jedoch ist das analytische Signal zu  $a(t) \cos(\omega_0 t)$  nur dann gleich  $a(t) \exp(i\omega_0 t)$ , wenn das Spektrum von  $a(t)$  durch  $\omega_0$  bandbegrenzt ist, d.h. wenn  $A(\omega) = 0$  für  $|\omega| > \omega_0$ .

### 1.2.3. Frequenzschwankung, Phasenabweichung und mittlere Phasenänderung

Die Frequenzschwankung ist als die Abweichung

$$\delta\dot{\varphi}(t) := \dot{\varphi}(t) - \langle \dot{\varphi} \rangle \quad (1.26)$$

der instantanen Frequenz von der mittleren Frequenz definiert. Zum Vergleich der Frequenzschwankungen von Oszillatoren unterschiedlicher Frequenz verwendet man die normierte Frequenzabweichung

$$y(t) := \frac{\delta\dot{\varphi}(t)}{\langle \dot{\varphi} \rangle}. \quad (1.27)$$

Stabile Oszillatoren zeichnen sich durch sehr geringe normierte Frequenzabweichungen  $|y(t)| \ll 1$  aus. Für praktische Zwecke verwendet man meist

$$\delta\nu(t) := \frac{1}{2\pi} \delta\dot{\varphi}(t) \quad (1.28)$$

anstelle von  $\delta\dot{\varphi}(t)$  oder  $y(t)$ .

Analog zu (1.26) definiert man auch die Phasenabweichung

$$\delta\varphi(t) := \varphi(t) - \langle \dot{\varphi} \rangle t. \quad (1.29)$$

Ein wichtiger Begriff für die theoretische Modellierung ist die Phasenänderung in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$

$$\Delta\varphi(t) := \delta\varphi(t + \tau) - \delta\varphi(t) \quad (1.30)$$

mit Mittelwert  $\langle \Delta\varphi \rangle = 0$ .

#### 1.2.4. Klassifikation von Frequenzschwankungen

Bei der Beschreibung von Frequenzschwankungen trifft man oft eine Einteilung in zufällige und systematische Schwankungen. Die Zuordnung zu einem der beiden Begriffe hängt auch von den betrachteten Zeiträumen ab. Beispielsweise erscheinen langfristig unvorhersehbare Frequenzschwankungen für kurze Zeiträume oft als deterministische, lineare Drift.

Der Einfluss von systematischen Schwankungen nimmt meist mit zunehmender Dauer zu und bestimmt die langfristige Stabilität. Zufällige Frequenzschwankungen, wie sie z.B. durch Rauschquellen in elektronischen Bauteilen verursacht werden, sind mit zunehmend kürzer werdenden Zeitintervalle immer bedeutender. Zu deren Beschreibung müssen statistische Methoden verwendet werden. Für eine statistische Untersuchung ist es sinnvoll, systematische und zufällige Effekte zu trennen, um eine Verfälschung der Resultate zu vermeiden.

Periodische oder fast-periodische Frequenzschwankungen, z.B. mit der Netzfrequenz von 50 Hz oder durch mechanische Schwingungen verursacht, sind meist ebenfalls vorhanden.

#### 1.2.5. Beschreibung von Frequenzschwankungen im Frequenzbereich

Diese erfolgt durch die Angabe des Frequenzrauschspektrum  $P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega)$  bzw. durch die Angabe der spektralen Dichte der Phasenabweichung  $P_{\delta\varphi}(\omega)$ . Diese sind über

$$P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega) = \omega^2 P_{\delta\varphi}(\omega) \quad (1.31)$$

miteinander verknüpft.

Ein weitere Möglichkeit ist die Angabe des Leistungsspektrum  $P_E(\omega)$ , über den Zusammenhang mit  $P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega)$  siehe Abschnitt 1.2.6 auf Seite 12.

### 1.2.5.1. Potenzgesetz-Modell

Zur Unterscheidung der unterschiedlichen Rauschursachen verwendet man ein phänomenologisches Modell der Form

$$P_{\delta\varphi}(\omega) = \sum_k h_k \omega^k \quad \text{mit } k \in \{-2, \dots, 2\}. \quad (1.32)$$

Im speziellen Fall sind meist nicht alle Werte für  $k$  relevant. Wird  $P_{\delta\varphi}(\omega)$  in doppelt-logarithmischem Maßstab aufgetragen und trifft das Modell zu, dann ist der jeweils in einem Frequenzbereich dominierende Anteil als Gerade mit der entsprechenden Steigung  $k$  erkennbar.

Die folgende Auflistung der möglichen Ursachen und relevanten Zeitskalen gilt speziell für frequenzstabilisierte Diodenlaser und stellt z.T. einen Vorgriff auf die entsprechenden Abschnitte dar.

#### zufälliges Driften $S(\omega) \propto \omega^{-2}$

Die Frequenz wandert zufällig, die mittlere Abweichung innerhalb eines Zeitintervalls  $\tau$  ist, im Gegensatz zu linearer Drift, proportional zu  $\sqrt{\tau}$ . Ursache ist meist die Umgebung, insbesondere zufällige Temperaturschwankungen. Ab ca. 1 Sekunde relevant.

#### 1/f-Rauschen $S(\omega) \propto \omega^{-1}$

Auch als Flackern der Frequenz bezeichnet. Tritt in elektronischen Bauteilen auf, die Ursache ist unbekannt. Bei dominierendem 1/f-Rauschen hängt die beobachtete Linienbreite stark von der Messzeit ab, das Spektrum ist Gauß-förmig.

Laut PETERMANN (1988) ist bei freilaufenden Laserdioden dieser Rauschanteil für Frequenzen unterhalb von 100 kHz dominant.

#### weißes Frequenzrauschen $S(\omega) \propto \omega^0$

Mögliche Ursachen sind weiße Rauschquellen innerhalb des Regelkreises zur Frequenzstabilisierung, dies sind insbesondere das Schrotrauschen des zur Regelung verwendeten Lichts und das Rauschen in den elektronischen Bauteilen, insbesondere den verwendeten Verstärkern. Die Spontanemission bewirkt ebenfalls weißes Frequenzrauschen (HENRY, 1982; PETERMANN, 1988). Das Spektrum ist Lorentz-förmig (siehe Gleichung (1.43)). Bei sorgfältigem Aufbau dominiert weißes Frequenzrauschen für Frequenzen von Hz bis MHz.

#### Flackern der Phase $S(\omega) \propto \omega^1$

Ursache unbekannt, ab MHz relevant.

**weißes Phasenrauschen**  $S(\omega) \propto \omega^2$

Wird durch die Spontanemission verursacht und ist ab einigen MHz relevant.

Extrapolation der Potenzgesetze über den gesamten Frequenzbereich von 0 bis  $\infty$  führt zu Konvergenzproblemen (z.B. unendliche Leistung), deshalb führt man meist noch untere bzw. obere Grenzfrequenzen für die Gültigkeit des Modells ein, wie sie sich z.B. durch eine Messung ergeben. Für lineare Drift gibt es aufgrund von Konvergenzproblemen kein Potenzgesetz.

### 1.2.6. Zusammenhang: Leistungs- und Frequenzrauschspektrum

Unter Vernachlässigung von Intensitätsschwankungen soll das elektrische Feld (vgl. Gleichungen (1.23) und (1.29)) durch

$$E(t) = A \exp(i(\delta\varphi(t) + \langle \dot{\varphi} \rangle t)) \quad (1.33)$$

beschrieben werden. Die spektrale Leistungsdichte ist dann durch die Fouriertransformierte der Autokorrelationsfunktion

$$R_E(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle = A^2 \exp(i\langle \dot{\varphi} \rangle \tau) \langle \exp(i\Delta\varphi) \rangle \quad (1.34)$$

von  $E(t)$  gegeben.

Zur Charakterisierung der Phasenabweichung  $\Delta\varphi$  dient die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\Delta\varphi)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Phase innerhalb einer Zeitspanne  $\tau$  um einen Betrag aus dem (kleinen) Intervall  $(\Delta\varphi, \Delta\varphi + d(\Delta\varphi))$  geändert hat, ist dann durch  $p(\Delta\varphi)d(\Delta\varphi)$  gegeben.

In einem idealisierten Modell eines Lasers werden die zufälligen Phasenänderungen durch die Spontanemission verursacht. Zur gesamten Phasenänderung in einem hinreichend langen Zeitintervall tragen in Summe viele unkorrelierte Einzelereignisse (spontane Emission eines Photons) bei, sodass nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung (BOSCH, 1993) für die Wahrscheinlichkeitsdichte von  $\Delta\varphi$  eine Normalverteilung

$$p(\Delta\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle \Delta\varphi^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi^2}{\langle \Delta\varphi^2 \rangle}\right) \quad (1.35)$$

mit Mittelwert 0 und Varianz  $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$  angenommen werden kann. Für die Varianz  $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$  gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \langle \Delta\varphi^2 \rangle &= \left\langle (\delta\varphi(t + \tau) - \delta\varphi(t))^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \int_t^{t+\tau} \delta\dot{\varphi}(t') dt' \right)^2 \right\rangle = \left\langle (\delta\dot{\varphi}(t) \otimes g(t))^2 \right\rangle \end{aligned} \quad (1.36)$$

mit

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-\tau, 0] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und damit} \quad S_g(\omega) = \tau^2 \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} \quad (1.37)$$

und mit Gleichung (1.9) und (1.17) folgt daraus für die Varianz der mittleren Phasenabweichung

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int P_{\delta\dot{\varphi} \otimes g}(\omega) d\omega = \frac{\tau^2}{2\pi} \int P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega) \frac{\sin^2(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} d\omega \quad (1.38)$$

Zur Berechnung des Terms

$$\langle \exp(i\Delta\varphi) \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \Delta\varphi^n \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \Delta\varphi^n \rangle \quad (1.39)$$

aus Gleichung (1.34) werden die  $n$ -ten Momente  $\langle \Delta\varphi^n \rangle$  der normalverteilten Zufallsvariablen  $\Delta\varphi$  benötigt. Aufgrund von Symmetriegründen und da  $\langle \Delta\varphi \rangle = 0$  ist, sind alle ungeraden Momente gleich Null, und die geraden Momente  $\langle \Delta\varphi^{2n} \rangle$  lassen sich mittels des Gaußschen-Momente-Theorems (MANDEL und WOLF, 1995)

$$\langle \Delta\varphi^{2n} \rangle = \frac{(2n)!}{2^n n!} \langle \Delta\varphi^2 \rangle^n \quad (1.40)$$

auf die Varianz zurückführen, die sich wiederum mittels (1.38) aus der spektralen Frequenzfluktuationsdichte  $P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega)$  berechnen lässt. Insgesamt erhält man damit die spektrale Leistungsdichte  $P_E(\omega)$  als die Fouriertransformation von

$$R_E(\tau) = A^2 \exp(i\langle \dot{\varphi} \rangle \tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Delta\varphi^2 \rangle\right) \quad (1.41)$$

Insbesondere für weißes Frequenzrauschen  $P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega) = \text{konst.}$  ist wegen (1.38)

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = P_{\delta\dot{\varphi}}(\omega) |\tau| \quad (1.42)$$

und die Fouriertransformation von (1.41) liefert für die spektrale Leistungsdichte

$$P_E(\omega) = \frac{4A^2}{P_{\delta\dot{\varphi}}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \langle \dot{\varphi} \rangle}{P_{\delta\dot{\varphi}}/2}\right)^2} \quad (1.43)$$

ein Lorentz-förmiges Profil mit einer vollen Halbwertsbreite

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi} P_{\delta\dot{\varphi}}. \quad (1.44)$$

Für kleine Phasenabweichungen  $\delta\varphi(t) \ll 1$  macht es Sinn, den Exponentialfaktor  $\exp(i\Delta\varphi)$  in (1.34) bis zur 2. Ordnung in eine Reihe zu entwickeln, und unter Verwendung der Definition (1.30) von  $\Delta\varphi$  erhält man daraus für die Autokorrelation des elektrischen Feldes

$$R_E(\tau) = A^2 \exp(i\langle\dot{\varphi}\rangle\tau) (1 - \langle\Delta\varphi^2\rangle - R_\varphi(\tau)) \quad (1.45)$$

und mittels Fouriertransformation

$$P_E(\omega) = A^2 \left( 2\pi(1 - \langle\Delta\varphi^2\rangle)\delta(\omega - \langle\dot{\varphi}\rangle) + P_{\delta\varphi}(\omega - \langle\dot{\varphi}\rangle) \right). \quad (1.46)$$

Die Form des Leistungsspektrums des elektrischen Feldes wird bei kleinen Phasenabweichungen also durch das Spektrum  $P_{\delta\varphi}$  des Phasenrauschens bestimmt.

Diese Näherung gilt jedoch nur beschränkt für näherungsweise weißes Frequenzrauschen. Wegen (1.31) führt eine bei allen Frequenzen konstante Frequenzfluktuationsdichte zu großen Phasenabweichungen bei niedrigen Frequenzen, die Voraussetzung  $\delta\varphi(t) \ll 1$  ist also für niedrige Frequenzen nicht erfüllt. Für Fourierfrequenzen größer als die Linienbreite ist das Leistungsspektrum des elektrischen Feldes jedoch proportional zum Phasenspektrum.

### 1.2.7. Allanvarianz

Die instantane Frequenz  $\dot{\varphi}(t)$  bzw. die normierte Frequenzabweichung  $y(t)$  (vgl. Gleichung (1.27)) und deren Spektren sind für die theoretische Modellierung von großem Interesse. Ähnlich wie bei einer Messung der Geschwindigkeit durch zwei Ortsmessungen im zeitlichen Abstand  $\tau$  erhält man bei Messung der Frequenz z.B. durch Zählen der Nulldurchgänge in einem Zeitintervall der Länge  $\tau$  jedoch nur den Mittelwert

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt' \quad (1.47)$$

der instantanen Frequenz während des Messintervalls.

Wiederholte Messung ergibt Realisierungen  $\bar{y}_i = \bar{y}(t_i)$  zu den Zeitpunkten  $t_1, t_2, \dots$ . Für zufällige Frequenzschwankungen stellt  $\bar{y}$  somit eine Zufallsvariable dar, zu deren Beschreibung insbesondere deren Momente dienen. Insbesondere die Varianz  $\sigma^2 = \langle\bar{y}^2\rangle$  mit erwartungstreuer Schätzfunktion (BOSCH, 1987)

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i^2 \quad (1.48)$$

stellt dann ein Maß für die mittlere Frequenzabweichung dar. Ein Problem ergibt sich jedoch, falls  $\bar{y}(t)$  z.B. aufgrund von linearer Drift stetig zunimmt. Die aus den Messwerten berechnete Varianz  $\widehat{\sigma^2}$  hängt dann stark von der Anzahl der Stichproben ab. In

dieser Hinsicht empfiehlt es sich, stattdessen die Paar- oder Allanvarianz

$$\sigma_y^2(\tau) = \left\langle \frac{1}{2} (\bar{y}(t) - \bar{y}(t - \tau))^2 \right\rangle \quad (1.49)$$

zu nehmen, zu deren Berechnung (RUTMAN, 1978)

$$\widehat{\sigma}_y^2(\tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2} (\bar{y}(t_{i+1}) - \bar{y}(t_i))^2 \quad \text{mit } t_{i+1} = t_i + \tau \quad (1.50)$$

nur die Differenz der gemittelten Frequenz von unmittelbar aufeinanderfolgenden Intervallen verwendet wird.

Die Mittelung über das Zeitintervall und Differenzbildung lässt sich (analog zur Rechnung in Abschnitt 1.2.6) als Faltung von  $y(t)$  mit

$$g(t) := \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}\tau} & \text{für } t \in [-\tau, 0] \\ \frac{1}{\sqrt{2}\tau} & \text{für } t \in [0, \tau] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.51)$$

beschreiben, sodass unter Verwendung von (1.9) und (1.17) wegen

$$\sigma_y^2(\tau) = \langle |y(t) \otimes h(t)|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int P_y(\omega) \frac{2 \sin^4(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} d\omega \quad (1.52)$$

die Allanvarianz  $\sigma_y(\tau)$  aus der spektralen Rauschleistungsdichte  $P_y(\omega)$  berechnet werden kann. Umgekehrt ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Durch Anwendung von (1.52) auf das Potenzgesetz-Modell (siehe Abschnitt 1.2.5.1 auf Seite 11) erhält man die in Tabelle 1.1 auf der nächsten Seite angegebenen Abhängigkeiten. In einer doppelt-logarithmischen Auftragung von  $\sigma_y^2(\tau)$  kann man die unterschiedlichen Rauschprozesse des Potenzgesetz-Modells an den unterschiedlichen Steigungen erkennen

### 1.2.8. Schwebungsmessung

Die Oszillationen des elektrischen Feldes von Licht sind nicht direkt messbar im Gegensatz zu Radio- oder Mikrowellen mit Frequenzen bis zu einigen GHz. Insbesondere die Messung der Allanvarianz, die ursprünglich zur Beschreibung der Stabilität von Oszillatoren im Radiofrequenzbereich entwickelt wurde, beruht darauf, dass z.B. ein Zählen der Nulldurchgänge des el. Felds möglich ist. Die anderen vorgestellten Möglichkeiten, insbesondere die Messung der spektralen Leistungsdichte  $P_E(\omega)$  erfolgt meist dadurch, dass das Spektrum mittels eines schmalbandigen, durchstimmbaren Filters abgetastet wird. Nach diesem Prinzip funktionieren die meisten Spektrumanalysatoren im Radiofrequenzbereich. Die schmalbandigsten Filter im optischen Bereich sind

1. Beschreibung der Stabilität

Bezeichnung	$P_y(\omega)$	$\sigma_y^2(\tau)$	Exponent bei $\tau$
lineare Drift $y(t) = dt$		$\frac{d^2}{2}\tau^2$	2
zufällige Drift	$h_{-2} \omega ^{-2}$	$h_{-2}\frac{4\pi^2}{3}\tau$	1
1/f-Frequenzrauschen	$h_{-1} \omega ^{-1}$	$h_{-1}\frac{2\ln 2}{\pi}$	0
weißes Frequenzrauschen	$h_0$	$h_0\frac{1}{\tau}$	-1
Flackern der Phase	$h_1 \omega $	$\approx h_1\frac{1.038 + 3\ln(\omega_c\tau)}{\pi}\frac{1}{\tau^2}$	$\approx -2$
weißes Phasenrauschen	$h_2 \omega ^2$	$\approx h_2\frac{3\omega_c}{\pi}\frac{1}{\tau^2}$	-2

Tabelle 1.1.: Zusammenhang Allan-Varianz und spektrale Frequenzfluktuationsdichte.

Für linear Frequenzdrift gibt es kein entsprechendes Potenzgesetz. Um die Konvergenz von (1.52) für weißes Phasenrauschen und für Flackern der Phase zu erreichen, ist es notwendig, eine obere Grenzfrequenz  $\omega_c$  einzuführen. Die angegebenen Gleichungen gelten dann nur für  $\tau \gg 1/\omega_c$ . Verwendet man im Potenzgesetzmodell  $P_y(\omega) = h_\alpha|\omega|^\alpha$  statt  $P_y(\omega)$  die einseitige spektrale Leistungsdichte (vgl. (1.18)), d.h. das Modell lautet dann  $^{(1S)}P_y(2\pi\nu) = k_\alpha\nu^\alpha$ , so erhält man die entsprechenden Beziehungen für  $\sigma_y^2(\tau)$  durch die Substitution  $h_\alpha = \frac{1}{2}(2\pi)^{-\alpha}k_\alpha$  in den angegebenen Ausdrücken für  $\sigma_y^2(\tau)$ .

Fabry-Perot-Interferometer mit sehr hoher Finesse (siehe Abschnitt 2.3), damit lassen sich allerdings nur Auflösungen bis zu einigen kHz erreichen.

Die Messung des Schwebungssignals zweier Laser mit fast gleicher Frequenz ermöglicht es jedoch, die für Radiofrequenzen zugänglichen Methoden auch für optische Frequenzen anzuwenden. Dazu wird das Licht zweier Laser, deren elektrisches Feld  $E_1$  und  $E_2$  durch

$$E_i(t) = \exp(i(\omega_i t + \delta\varphi_i(t))) \quad \text{mit } \omega_2 > \omega_1 \quad (1.53)$$

beschrieben werden soll, überlagert und mittels einer Photodiode detektiert. Diese misst

die Intensität

$$I(t) = |E_1(t) + E_2(t)|^2 = |E_1(t)|^2 + |E_2(t)|^2 + 2\Re\left(\overline{E_1(t)}E_2(t)\right) \quad (1.54)$$

Wesentlich ist der Interferenzterm

$$\overline{E_1(t)}E_2(t) = \exp(i(\omega_2 - \omega_1)t) \exp(i(\delta\varphi_2(t) - \delta\varphi_1(t))). \quad (1.55)$$

Das Schwebungssignal  $I(t)$  enthält also wesentliche Anteile bei der Differenzfrequenz  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$  der beiden Laser. Frequenzschwankungen der Laser relativ zueinander werden als Schwankungen der Frequenz des Schwebungssignals messbar.

Zur Beschreibung ist es einfacher, die analytische Darstellung  $\overline{E_1(t)}E_2(t)$  anstatt von  $\Re\left(\overline{E_1(t)}E_2(t)\right)$  zu nehmen, dies ist unter der Voraussetzung korrekt, dass die Differenzfrequenz größer als Breite des Spektrums des Schwebungssignals ist (vgl. Abschnitt 1.2.2).

Ist einer der beiden Laser wesentlich stabiler, so ist die Form des Spektrums des Schwebungssignals gleich dem des Leistungsspektrums des weniger stabilen Lasers. Meistens steht ein solcher Laser jedoch nicht zur Verfügung. Stattdessen misst man das Schwebungssignal zwischen zwei gleich gebauten Lasern. Die wesentliche Annahme ist dann, dass die Frequenzschwankungen beider Laser der gleichen Statistik gehorchen, aber unabhängig voneinander sind, d.h. die Phasenabweichungen sind unkorreliert

$$R_{\delta\varphi_1(t)\delta\varphi_2(t)} = \langle \delta\varphi_1(t), \delta\varphi_2(t + \tau) \rangle \equiv 0. \quad (1.56)$$

Nach der Definition der Autokorrelationsfunktion (1.11) folgt damit sofort

$$R_{\delta\varphi_2(t)-\delta\varphi_1(t)} = R_{\delta\varphi_2(t)} + R_{\delta\varphi_1(t)} \quad (1.57)$$

und deshalb auch

$$P_{\delta\varphi_2(t)-\delta\varphi_1(t)} = P_{\delta\varphi_2(t)} + P_{\delta\varphi_1(t)} \quad (1.58)$$

Für die mittlere Phasenänderungen  $\Delta\varphi_1$  und  $\Delta\varphi_2$  bedeutet das, dass diese unabhängig voneinander sind, und unter der Voraussetzung, dass die  $\Delta\varphi_i$  weiters normalverteilt sind (vgl. Abschnitt 1.2.6, Gleichung (1.35)), ist  $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1$  ebenfalls normalverteilt und für die Varianzen gilt der Zusammenhang

$$\langle (\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1)^2 \rangle = \langle \Delta\varphi_2^2 \rangle + \langle \Delta\varphi_1^2 \rangle \quad (1.59)$$

Dies erlaubt einen Rückschluss vom Spektrum des Schwebungssignals auf das Spektrum eines einzelnen Lasers, wegen (1.59) und (1.41) ist

$$R_{\overline{E_1}E_2}(\tau) = \exp(-i\omega_1\tau) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \Delta\varphi_1^2 \rangle\right) \exp(i\omega_2\tau) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \Delta\varphi_2^2 \rangle\right) = R_{\overline{E_1}} R_{E_2} \quad (1.60)$$

## 1. Beschreibung der Stabilität

---

und wegen des Faltungssatzes (Abschnitt 1.1.5) ergibt sich das Spektrum des Schwebungssignals im Wesentlichen als die Faltung der spektralen Leistungsdichte der einzelnen Laser, d.h.

$$P_{E_1 E_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \left( P_{E_1} \otimes P_{E_2} \right) \quad (1.61)$$

Insbesondere für weißes Frequenzrauschen ist das Schwebungssignal ebenfalls Lorentzförmig und die Halbwertsbreite des Leistungsspektrums des Schwebungssignals ist die Summe der Halbwertsbreiten der einzelnen Spektren.

## 2. Frequenzstabilisierung

Diodenlaser zeichnen sich vor allem durch den kompakten Aufbau und geringe Anschaffungs- und Betriebskosten gegenüber anderen Lasersystemen aus. Die Verfügbarkeit bei vielen Wellenlängen bei einer Verstimmbarkeit über mehrere Nanometer machen sie zu vielverwendeten Lichtquellen in die Spektroskopie (WIEMANN und HOLLBERG, 1991). Für den Einsatz in der hochauflösenden Spektroskopie sind allerdings zusätzliche Stabilisierungsmaßnahmen notwendig.

Im konkreten Fall erfolgt die Stabilisierung in Schritten. Zum einen durch passive optische Rückkopplung von einem Gitter, zum anderen durch eine aktive Frequenzregelung mit einem Fabry-Perot-Interferometer als Referenz. Im Folgenden werden diese Verfahren zusammen mit dem theoretischen Hintergrund vorgestellt.

### 2.1. Linienbreiten von Diodenlasern

Ein erheblicher Nachteil von unstabilisierten Diodenlasern besteht in der großen Linienbreite von typischerweise mehreren 10 MHz. Eine wesentliche Ursache dafür ist die spontane Emission. Von SCHAWLOW und TOWNES wurden 1958 ein Ausdruck für durch die Spontanemission bedingte Linienbreite von Lasern angegeben. Die für Diodenlaser modifizierte Form lautet (PETERMANN, 1988)

$$\Delta\nu_0 = \frac{h\nu}{8\pi P} n_{\text{sp}} v_g^2 \alpha_m (\alpha_m + \alpha_s) (1 + \alpha^2), \quad (2.1)$$

dabei bezeichnen  $P$  die durch eine Facette emittierte Ausgangsleistung (typ. 10 mW),  $n_{\text{sp}}$  das Verhältnis von spontaner zu stimulierter Emission ( $\approx 3$ ),  $v_g \approx c/4$  die Gruppengeschwindigkeit,  $\alpha_m = \frac{1}{2L} \log \frac{1}{R_1 R_2}$  mit der Resonatorlänge  $L$  und Reflektivitäten  $R_1$  und  $R_2$  der Endfacetten die Verluste an den Endflächen und  $\alpha_s \approx \alpha_m$  die Streuverluste im Resonator. Der Faktor  $(1 + \alpha^2) \approx 30$  tritt in der ursprünglichen Formel von SCHAWLOW und TOWNES nicht auf. Messungen der Linienbreiten von Diodenlasern durch FLEMING und MOORADIAN (1981) ergaben erste Hinweise auf einen zusätzlichen Verbreiterungsmechanismus bei Diodenlasern. Eine erste Erklärung wurde von HENRY (1982) gegeben. Bei Diodenlasern hängen Verstärkung und Brechungsindex von der Ladungsträgerdichte ab, diese ist wiederum von der Photonenzahl im Resonator abhängig. Ein spontan emittiertes Photon bewirkt nicht nur eine Änderung der Phase des

Lichtes, sondern auch eine geänderte Intensität, die sich erst nach einiger Zeit wieder auf die Gleichgewichtsintensität einstellt. Der aufgrund der erhöhten Intensität und deshalb geringeren Ladungsträgerdichte geänderte Brechungsindex bewirkt eine zusätzliche Phasenänderung.

## 2.2. Linienbreitenreduktion durch optische Rückkopplung

Wie aus dem Ausdruck (2.1) herauszulegen ist, bietet die Vergrößerung der Resonatorlänge eine Möglichkeit zur Linienbreitenreduktion. In der konkreten Anwendung geschieht dies am einfachsten durch Rückkopplung eines Teils des emittierten Lichtes, man spricht dann von einem *erweiterten Resonator*. Eine schematische Darstellung des

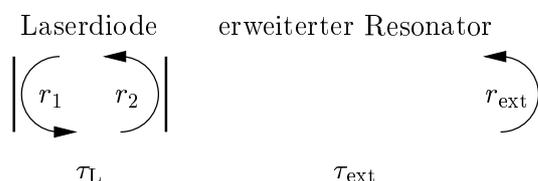


Abbildung 2.1.: Laserdiode mit externer optischer Rückkopplung

Aufbau ist in Abbildung 2.1 gezeigt. Die wesentlichen Parameter sind die Reflektivitäten  $r_1$ ,  $r_2$  der Laserdioden-Endflächen, die Stärke der Rückkopplung  $r_{\text{ext}}$  sowie die Umlaufzeiten  $\tau_L$  und  $\tau_{\text{ext}}$  des Lichts in der Laserdiode bzw. im erweiterten Resonator. Unter Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen, wie dies bei typischen Reflektivitäten von  $r^2 \approx 0.3$  gerechtfertigt ist, definiert man den Kopplungskoeffizienten

$$\kappa_{\text{ext}} = \frac{r_{\text{ext}}}{r_2} (1 - |r_{\text{ext}}|^2) \quad (2.2)$$

und einen Rückkopplungsparameter

$$C = \frac{\tau_L}{\tau_{\text{ext}}} \kappa_{\text{ext}} \sqrt{1 + \alpha^2}. \quad (2.3)$$

Analoge Überlegungen wie für Gleichung (2.1) ergeben dann eine minimale Linienbreite (PETERMANN, 1988)

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\nu_0}{(1 + C)^2}, \quad (2.4)$$

wenn mit  $\Delta\nu_0$  die Linienbreite ohne optische Rückkopplung (2.1) bezeichnet wird.

Durch den vergrößerten Resonator wird der Modenabstand des effektiven Laserresonators jedoch verringert und das relativ breite Verstärkungsprofil von Diodenlasern

genügt nicht mehr, um Emission bei nur einer Frequenz sicherzustellen. Eine Lösung dafür ist die Verwendung von frequenzselektiver Rückkopplung durch Beugung an einem Gitter. Ein möglicher Aufbau dazu ist in Abbildung 2.2 gezeigt. Die erste Beugungsord-

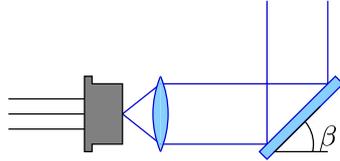


Abbildung 2.2.: Optische Rückkopplung vom Gitter in Littrow-Konfiguration

nung wird zurück in die Laserdiode reflektiert. Voraussetzung für eine gute Kopplungseffizienz ist eine exakte Kollimierung des divergenten Lichtstrahles aus der Laserdiode. Der Gitterwinkel  $\beta$ , die Wellenlänge  $\lambda$  und die Gitterkonstante  $d$  sind über

$$2d \sin \beta = \lambda \quad (2.5)$$

miteinander verknüpft. Insbesondere lässt sich durch Drehen des Gitters die Wellenlänge des emittierten Lichtes um mehrere Nanometer verstimmen.

### 2.3. Der optische Resonator als Interferometer

Ein optischer Resonator besteht im Wesentlichen aus zwei Spiegeln, die im Abstand  $d$  voneinander montiert sind. Andere Bezeichnungen für einen optischen Resonator sind *Fabry-Perot-Interferometer* oder *Etalon*.

Licht, das auf einen einzelnen Spiegel auftrifft, teilt sich in einen reflektierten und einen transmittierten Anteil auf. Im Idealfall wird kein Licht absorbiert. Für das reflektierte und transmittierte elektrische Feld gilt dann

$$E_r = rE_i \quad \text{bzw.} \quad E_t = tE_i \quad \text{mit} \quad 0 \leq r, t \leq 1 \quad (2.6)$$

wobei mit  $E_i$  das einfallende elektrische Feld bezeichnet wird. Aufgrund der Energieerhaltung gilt bei vernachlässigbarer Absorption

$$r^2 + t^2 = 1. \quad (2.7)$$

Der Anteil der reflektierten an der einfallenden Intensität ist somit durch  $R := r^2$  gegeben, wobei  $R$  als Reflektivität des Spiegels bezeichnet wird.

Im weiteren wird die Reflexion und Transmission eines optischen Resonators für eine ebene Welle behandelt, d.h. das einfallende elektrische Feld wird am Ort des ersten Spiegels durch  $E_i = E_0 e^{i\omega t}$  beschrieben. Dazu wird das am optischen Resonator reflek-

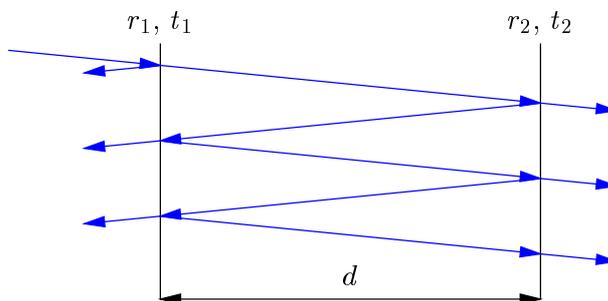


Abbildung 2.3.: Mehrstrahlinterferenz am optischen Resonator

tierte Licht berechnet (siehe Abbildung 2.3). An jedem Spiegel teilt sich das Licht in zwei Anteile auf. Das unmittelbar am ersten Spiegel reflektierte Licht interferiert mit dem Licht, das schon mindestens einen Umlauf hinter sich hat, d.h. das eine Zeitspanne  $\tau = m \frac{2nd}{c}$ ,  $m \in \mathbf{N}$  früher ausgesendet wurde. Dabei bezeichnen  $m$  die Anzahl der Umläufe im Resonator und  $n$  den Brechungsindex des Mediums zwischen den Spiegeln, die im Abstand  $d$  angebracht sind. Dadurch ergibt sich für jeden Umlauf neben den Faktoren für die Transmission bzw. Reflexion an den Spiegeln ein Faktor von  $e^{-i\delta}$  mit  $\delta = \omega\tau$ . Das reflektierte elektrische Feld ist dann durch

$$\begin{aligned} E_r &= E_i r_1 + E_i t_1 r_2 t_1 e^{-i\delta} + E_i t_1 r_2 r_1 r_2 t_1 e^{-i2\delta} + \dots \\ &= E_i \left( r_1 - t_1^2 r_2 \frac{e^{-i\delta}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\delta}} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

gegeben.

Für den Spezialfall, dass die Reflektivitäten der beiden Spiegel gleich sind ( $r_1 = r_2 = r$ ,  $t_1 = t_2 = t$ ) erhält man für das reflektierte Feld

$$E_r = E_i r \frac{1 - e^{-i\delta}}{1 - r^2 e^{-i\delta}} \quad (2.9)$$

Da die Intensität proportional zum Betragsquadrat der Feldstärke ist, ergibt sich für den reflektierten Intensitätsanteil

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{2r^2(1 - \cos \delta)}{(1 - r^2)^2 + 2r^2(1 - \cos \delta)} \quad (2.10)$$

und aufgrund der Energieerhaltung für den transmittierten Anteil

$$\frac{I_t}{I_0} = 1 - \frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}(1 - \cos \delta)}. \quad (2.11)$$

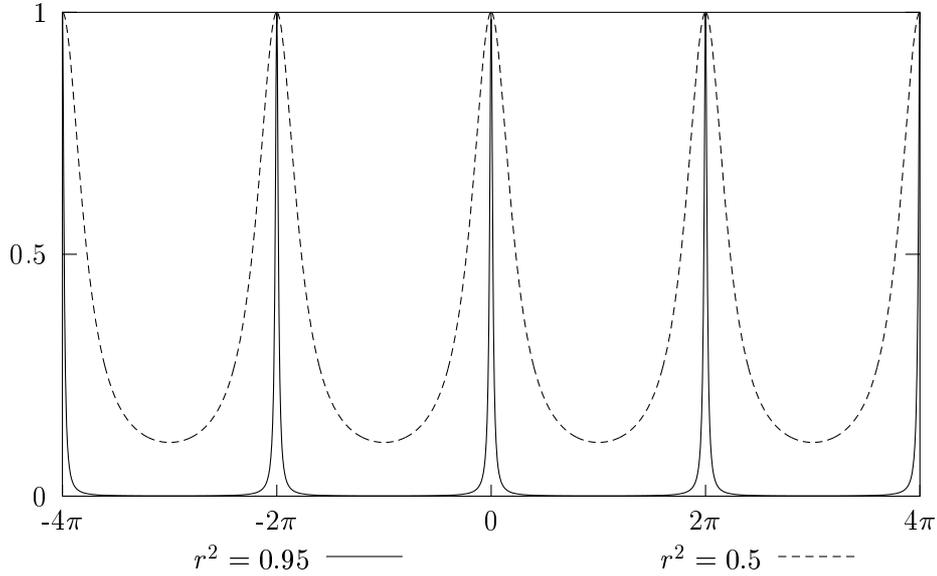


Abbildung 2.4.: Transmission durch einen optischen Resonator in Abhängigkeit von  $\delta$  für zwei Werte der Reflektivität der Spiegel

In Abbildung 2.4 ist die Transmission in Abhängigkeit von  $\delta$  für verschiedene Werte von  $r$  gezeigt. Wenn  $\delta = \omega\tau$  ein ganzes Vielfaches von  $2\pi$  ist, erhält man volle Transmission. Für die Frequenz des Lichtes mit maximaler Transmission erhält man mit den Definitionen von  $\delta$  und  $\tau$  dadurch die Resonanzbedingung

$$\omega_r = 2\pi m \frac{c}{2nd} \quad \text{bzw.} \quad \nu_r = m \frac{c}{2nd} \quad (2.12)$$

mit  $m$  eine ganze Zahl. Der Abstand

$$\Delta\omega_r = 2\pi \frac{c}{2nd} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\nu_r = \frac{c}{2nd} \quad (2.13)$$

zwischen zwei Transmissionsmaxima wird als freier Spektralbereich (FSB) bezeichnet.

Wie in Abbildung 2.4 ebenfalls ersichtlich ist, fällt für große Reflektivität der Spiegel (d.h.  $r^2$  nahe bei 1) die Transmission in der Nähe einer Resonanz schnell auf einen kleinen Wert ab. Es macht deshalb Sinn, für Werte von  $\omega$  in der Nähe einer Resonanz  $\omega_r$  den Term  $\cos \delta$  mit  $\delta = \omega\tau$  im Nenner von (2.11) in eine Taylorreihe in  $\omega$  um  $\omega_r$  zu entwickeln, d.h.

$$\cos \omega\tau \simeq 1 - \frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_r)^2$$

und damit ist die transmittierte Intensität in der Nähe einer Resonanz näherungsweise durch

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1 + \frac{r^2 \tau^2}{(1-r^2)^2} (\omega - \omega_r)^2} \quad (2.14)$$

gegeben. Zur Abkürzung führt man noch die Verstimmung

$$\Delta = \omega - \omega_r \quad (2.15)$$

des einfallenden Lichtes von einer Resonanz ein. Gleichung (2.14) beschreibt somit eine Lorentz-Kurve

$$\frac{I_t}{I_0} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{\Gamma}\right)^2} \quad (2.16)$$

mit einer halben Halbwertsbreite von

$$\Gamma = \frac{1-r^2}{r} \frac{c}{2nd}. \quad (2.17)$$

Ein weiterer wichtiger Parameter ist das Verhältnis Abstand der Transmissionsmaxima  $\Delta\omega_r$  zur vollen Halbwertsbreite  $2\Gamma$ , er wird als Finesse  $\mathcal{F}$  bezeichnet. Für die Näherung hoher Reflektivität erhält man für  $\mathcal{F}$  aus (2.13) und (2.17)

$$\mathcal{F} = \pi \frac{r}{1-r^2} = \pi \frac{\sqrt{R}}{1-R}. \quad (2.18)$$

Ausgehend von (2.9) liefert Substitution von  $\delta = \frac{\Delta}{\Gamma} \frac{1-r^2}{r}$  und  $r = \sqrt{1-t^2}$  sowie Reihenentwicklung in  $t$  um  $t = 0$  (d.h. geringe Transmission bzw. hohe Reflektivität) als Näherung für das reflektierte elektrische Feld

$$E_r \simeq E_0 \frac{\Delta(\Delta + i\Gamma)}{\Delta^2 + \Gamma^2} \quad (2.19)$$

Die Berechnung des transmittierten Intensitätsanteils daraus liefert unmittelbar wieder Gleichung (2.16).

### 2.3.1. Dynamisches Verhalten

Auf Resonanz baut sich innerhalb des optischen Resonators eine stehende Welle  $E_{\text{Res}}$  auf, ein Teil davon tritt an beiden Spiegeln aus. Die Gleichungen (2.9) und (2.19) gelten nur für den stationären Fall.

Der in Rückwärtsrichtung emittierte Teil der Stehwelle interferiert destruktiv mit dem am Spiegel reflektierten Anteil des einfallenden Strahls und löscht ihn auf Resonanz vollständig aus (bei vernachlässigbarer Absorption), d.h.  $tE_{\text{Res}} = rE_i$ , und für die

Intensitäten folgt daraus  $I_{\text{Res}} = \frac{r^2}{1-r^2} I_i$ , im Resonator befindet sich also ein resonant überhöhtes Lichtfeld. Wird das einfallende Licht ausgeschaltet, so zerfällt die Stehwelle mit einer Zeitkonstante (HOUSSIN et al., 1990)

$$\tau_s = -\frac{\tau}{\ln(r^2)} \simeq \frac{1}{\Gamma}. \quad (2.20)$$

Wird erst ab einem bestimmten Zeitpunkt resonantes Licht eingestrahlt, so wird unmittelbar nach dem Einschalten der größte Teil des Lichts reflektiert, erst in dem Maß, wie sich die Stehwelle im Resonator ausbildet, sinkt die Reflexion auf Null. In der Nähe der Resonanz werden nach Gleichung (2.11) bzw. (2.14) Frequenzschwankungen in Intensitätsschwankungen des transmittierten Lichtes umgesetzt. Dies gilt in der angegebenen Form nur für im Verhältnis zur Zeitkonstante des optischen Resonators langsame Schwankungen. Nach HOUSSIN et al. (1990) bildet ein Fabry-Perot-Resonator in Transmission näherungsweise einen Tiefpass 2. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von

$$\nu_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2\pi\tau_s} \simeq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2\pi} \Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{1}{2} \frac{\Delta\nu}{\mathcal{F}} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{I_t}{I_i} \quad (2.21)$$

Bis auf den Vorfaktor  $1/\sqrt{\alpha}$  ist die Grenzfrequenz gerade die halbe Halbwertsbreite des Resonators. Mit  $\alpha$  ist der Anteil der transmittierten Intensität an der maximal möglichen bezeichnet, ein typischer Wert ist  $\alpha = 0.5$ .

## 2.4. Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall auf einen optischen Resonator

Das im folgenden vorgestellte Verfahren zur Frequenzstabilisierung wurde ursprünglich von Pound auf Mikrowellenresonatoren angewendet. Von DREVER, HALL, KOWALSKI, HOUGH, FORD, MUNLEY und WARD (1983) wurde das Verfahren erstmals 1983 unter Verwendung eines optischen Resonators zur Frequenzstabilisierung eines Lasers vorgestellt.

Ein älteres Verfahren (BARGER et al., 1973) nützt die Frequenzabhängigkeit der Transmission durch einen optischen Resonator aus (vgl. Abbildung 2.4 auf Seite 23). Durch eine Regelung wird die Transmission auf die Hälfte des Maximalwertes stabilisiert, dieses Verfahren wird deshalb auch als *Flankenstabilisierung* bezeichnet. Für eine gute Frequenzdiskrimination müssen optische Resonatoren mit hoher Finesse verwendet werden. Bei der damit verbundenen geringen Linienbreite begrenzt das Tiefpassverhalten des Resonators (Abschnitt 2.3.1) jedoch die erzielbare Regelbandbreite (HELMCKE et al., 1982), zudem wird der Fangbereich der Regelung mit zunehmender Finesse immer kleiner. In diesen Punkten (Regelbandbreite, Fangbereich) stellt das Verfahren nach Pound-Drever-Hall eine wesentliche Verbesserung dar.

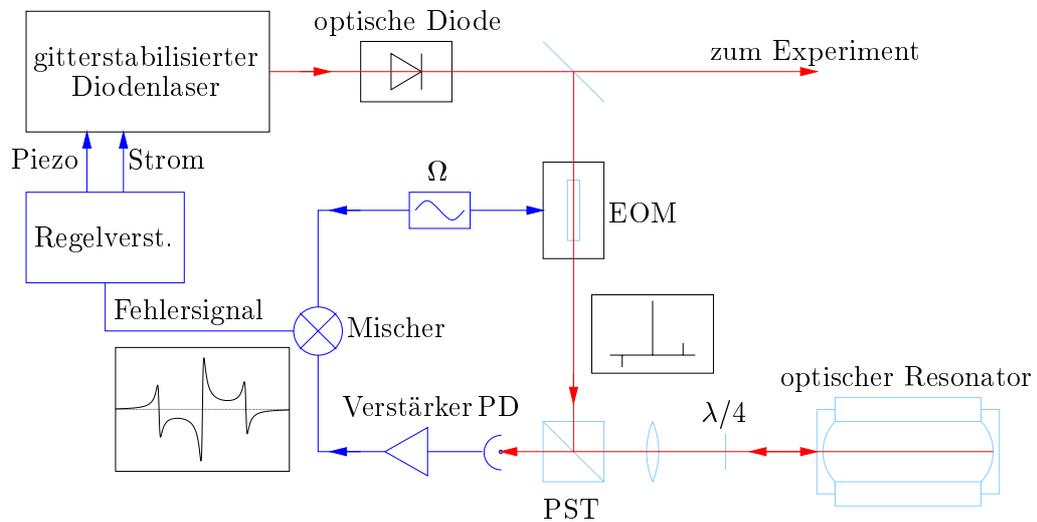


Abbildung 2.5.: Aufbau zur Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall auf einen optischen Resonator

Der Aufbau zur Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Durch einen elektrooptischen Modulator (EOM) werden dem Licht Seitenbänder aufgeprägt. Die Polarisation des am Resonator reflektierten Lichts ist nach zweimaligem Durchgang durch ein  $\lambda/2$ -Plättchen um  $90^\circ$  gedreht, und so wird am polarisierenden Strahlteiler das Licht nicht mehr in den Laser zurückreflektiert, sondern auf einer Photodiode (PD) detektiert. Durch die Reflexion am Resonator erhalten Träger und Seitenbänder des reflektierten Lichts abhängig von der Verstimmung bezüglich einer Resonanz des optischen Resonators unterschiedliche Phasenverschiebungen. Die Phasenlage des Schwebungssignals der Seitenbänder mit dem Träger ist somit ebenfalls von der Verstimmung des Lasers abhängig, sodass man nach Demodulation des Schwebungssignals mit dem Modulationssignal ein Fehlersignal der abgebildeten Form (siehe auch Abbildung 2.6 auf Seite 28) erhält. Das Fehlersignal dient als Eingang für den Regelverstärker, der durch Rückwirkung auf den Winkel des Gitters und den Strom durch die Laserdiode die Frequenz des emittierten Lichtes auf den zentralen Nulldurchgang des Fehlersignals stabilisiert.

Im folgenden soll die genaue Form des Fehlersignals berechnet werden (vgl. BJORKLUND et al., 1983; SCHENZLE et al., 1982). Der EOM besteht im Wesentlichen aus einem Kristall ( $\text{LiTaO}_3$ ), dessen Brechungsindex durch Anlegen einer Spannung verändert werden kann. Speziell wird ein periodisches Signal der Frequenz  $\Omega$  angelegt, sodass nach

Durchgang durch den EOM das phasenmodulierte Licht durch

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t + \delta \sin \Omega t)} \quad (2.22)$$

beschrieben wird, dabei wird  $\delta$  als Modulationsindex bezeichnet. Entwicklung in eine Fourierreihe (CHAMPENEY, 1973) liefert

$$E(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} J_n(\delta) e^{i(\omega + n\Omega)t}, \quad (2.23)$$

d.h. dem Licht werden Seitenbänder im Abstand  $\Omega$  vom Träger aufgeprägt. Die Amplitude des  $n$ -ten Seitenbandes wird durch den Wert der Bessel-Funktion  $J_n(\delta)$  der Ordnung  $n$  bestimmt. Die Besselfunktionen  $J_n(\delta)$  wachsen für kleines  $\delta$  wie  $\delta^n$  (BRONSTEIN et al., 1995), sodass es für geringen Modulationsindex  $\delta \ll 1$  genügt, sich nur auf den Träger und die nächstliegenden Seitenbänder mit Frequenzen  $\omega$  und  $\omega \pm \Omega$  zu beschränken. Wegen  $J_{-n}(\delta) = (-1)^n J_n(\delta)$  lässt sich das elektrische Feld somit durch

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} (-J_1(\delta) e^{-i\Omega t} + J_0(\delta) + J_1(\delta) e^{i\Omega t}) \quad (2.24)$$

beschreiben. Die Phasendifferenz zwischen linken und rechten Seitenband beträgt  $180^\circ$ , im Gegensatz zu Amplitudenmoduliertem Licht, das durch

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 (1 + m \cos(\Omega t)) e^{i\omega t} \\ &= E_0 e^{i\omega t} \left( \frac{m}{2} e^{-i\Omega t} + 1 + \frac{m}{2} e^{i\Omega t} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

beschrieben wird.

Die durch die Reflexion am Resonator bedingte Änderung von Amplitude und Phase von Träger und Seitenbänder wird in der Näherung hoher Reflektivität durch Gleichung (2.19) auf Seite 24 beschrieben. Hierbei ist zu beachten, dass die Verstimmung gegenüber der Resonanzfrequenz des optischen Resonators für das rechte Seitenband durch  $\Delta + \Omega$ , für das linke durch  $\Delta - \Omega$  gegeben ist. Das gesamte reflektierte elektrische Feld ergibt sich also mit Gleichung (2.24) und (2.19) zu

$$E_r(t) = E_0 e^{i\omega t} (-t_{-1} J_1(\delta) e^{-i\Omega t} + t_0 J_0(\delta) + t_1 J_1(\delta) e^{i\Omega t}) \quad (2.26)$$

mit

$$t_0 = \frac{\Delta(\Delta + i\Gamma)}{(\Gamma^2 + \Delta^2)} \quad \text{und} \quad t_{\pm 1} = \frac{(\Delta \pm \Omega)(\Delta \pm \Omega + i\Gamma)}{\Gamma^2 + (\Delta \pm \Omega)^2}$$

Von der Photodiode wird die Intensität proportional zu  $|E_r|^2 = \overline{E_r} E_r$  registriert. Für die anschließende phasensensitive Demodulation bei der Frequenz  $\Omega$  ist nur der Anteil des Photodiodensignals bei  $\Omega$  relevant. Man erhält dafür

$$\begin{aligned} |E_r|^2 &= E_0^2 e^{i\Omega t} J_0 J_1 (-\bar{t}_{-1} t_0 + \bar{t}_0 t_1) + \text{k.k.} \\ &= E_0^2 e^{i\Omega t} J_0 J_1 2 \frac{\Gamma \Delta \Omega (\Gamma(\Gamma^2 + \Delta^2 + \Omega^2) + i\Omega(\Gamma^2 - \Delta^2 + \Omega^2))}{(\Gamma^2 + \Delta^2)(\Gamma^2 + (\Delta + \Omega)^2)(\Gamma^2 + (\Delta - \Omega)^2)} + \text{k.k.} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die phasenempfindliche Demodulation am Mischer entspricht einer Multiplikation des Photodiodesignals mit  $\sin(\Omega t + \varphi)$ . Das sich dabei ebenfalls ergebende Mischprodukt bei einer Frequenz von  $2\Omega$  wird durch einen Tiefpass unterdrückt. Somit erhält man für den Gleichstromanteil des Fehlersignals

$$S(\Delta) = C J_0 J_1 2 \frac{\Gamma \Delta \Omega (\sin \varphi \Gamma (\Gamma^2 + \Delta^2 + \Omega^2) + \cos \varphi \Omega (\Gamma^2 - \Delta^2 + \Omega^2))}{(\Gamma^2 + \Delta^2) (\Gamma^2 + (\Delta + \Omega)^2) (\Gamma^2 + (\Delta - \Omega)^2)} \quad (2.28)$$

Die Proportionalitätskonstante  $C$  hängt von der Intensität des Lichtes und von der Effizienz von Photodiode und Mischer ab. Abbildung 2.6 zeigt ein Fehlersignal für typische Parameterwerte.

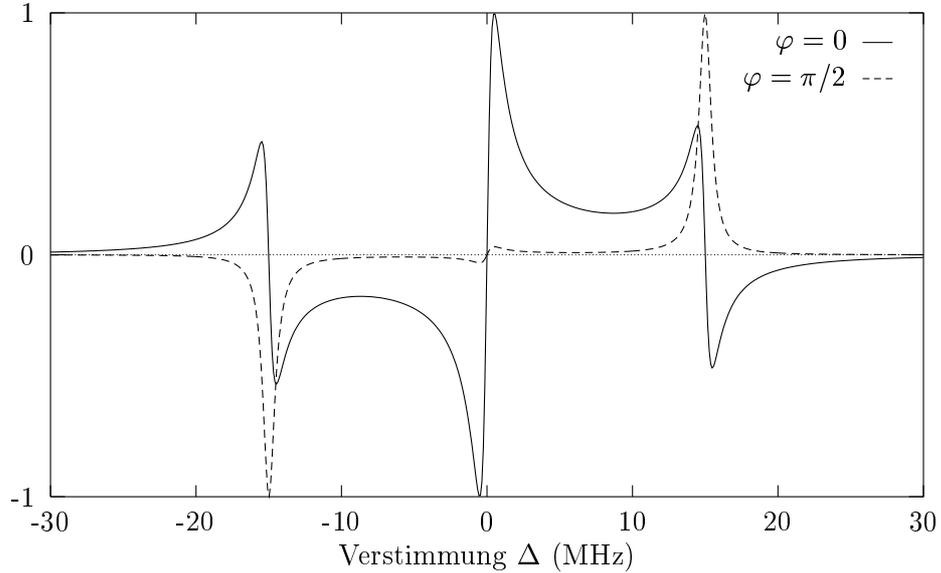


Abbildung 2.6.: Berechnetes Fehlersignal für verschiedene Phasenlagen. Die Parameterwerte sind: Halbwertsbreite  $\Gamma = 0.5$  MHz, Modulationsfrequenz  $\Omega = 15$  MHz.

Als Regelpunkt dient der zentrale Nulldurchgang des Fehlersignals. Die Steigung in diesem Punkt ist in erster Näherung wegen

$$S(\Delta) = C J_0 J_1 2 \frac{1}{\Gamma \left(1 + \frac{\Gamma^2}{\Omega^2}\right)} \Delta + \mathcal{O}(\Delta^3) \simeq C J_0 J_1 2 \frac{1}{\Gamma} \Delta \quad (2.29)$$

im Wesentlichen nur von der Linienbreite des optischen Resonators abhängig, falls die Modulationsfrequenz  $\Omega$  größer als die Linienbreite  $\Gamma$  ist. Über den sog. Fangbereich der

Verstimmung von ca.  $-\Omega$  bis  $+\Omega$  zeigt das Fehlersignal zudem das richtige Vorzeichen für die Regelung. Im Gegensatz zur Flankenstabilisierung sind bei der Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall Fangbereich und Steilheit des Fehlersignals unabhängig voneinander.

### 2.4.1. Dynamisches Verhalten

Genauso wie schon in Abschnitt 2.3.1 auf Seite 24 beschrieben, gilt Gleichung (2.28) nur für langsame Frequenzschwankungen, d.h. wenn sich das interne Lichtfeld des Resonators stets im Gleichgewicht mit dem einfallenden Licht befindet. In HOUSSIN et al. (1990) wird die Reaktion des Fehlersignals auf einen kleinen Frequenzsprung des einfallenden Lichtes berechnet. Danach bildet ein Fabry-Perot-Resonator in Reflexion einen Tiefpass 1. Ordnung mit einer Grenzfrequenz von

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau_s} \simeq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\nu}{\mathcal{F}} \quad (2.30)$$

unter den Annahmen hoher Reflektivität ( $r \simeq 1$ ) und kleiner Frequenzschwankungen  $\Delta\omega \ll \Gamma$  (vgl. Gleichungen (2.20) und (2.21)). Die Grenzfrequenz entspricht gerade der halben Halbwertsbreite des Resonators. Oberhalb dieser Grenzfrequenz integriert der Resonator über die Frequenzschwankungen, das Fehlersignal ist deshalb proportional zur Phasenabweichung. Mit einer geeigneten Regelung, die die Phasendrehung von  $-90^\circ$  und den Abfall im Amplitudengang oberhalb der Grenzfrequenz berücksichtigt, können auch kurzfristige Störungen (kürzer als die Speicherzeit, vgl. Gleichung (2.20)) ausgeregelt werden. Die Verwendung eines Hochfinesse-Resonators mit entsprechend niedriger Grenzfrequenz limitiert also nicht die Regelbandbreite.

### 2.4.2. Phasenmodulation versus Amplitudenmodulation

Essentiell an der Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall ist, dass das Schwebungssignal von dem am Resonator reflektierten *phasenmodulierten* Licht verwendet wird. Ist der Träger resonant zum Resonator, erfahren die Seitenbänder, da symmetrisch um den Träger, die gleiche Phasenverschiebung. Da bei phasenmoduliertem Licht zwischen den Seitenbändern eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  gegeben ist (siehe Gleichung (2.23)), löschen sich die Schwebungssignale der Seitenbänder mit dem Träger gerade wieder gegenseitig aus, sodass für resonantes Licht das Fehlersignal einen Nulldurchgang besitzt. Jede Störung dieser Symmetrie bewirkt einen zusätzlichen Offset. Einige Möglichkeiten dafür sind im Folgenden aufgelistet.

- Ein Anteil von Amplitudenmodulation bewirkt, dass sich die Schwebungssignale der Seitenbänder mit dem Träger nicht vollständig auslöschen.
- Ein Übersprechen des Modulationssignals auf das Photodiodensignal liefert nach Abmischen mit dem Modulationssignal einen zusätzlichen Gleichstromanteil.

- Verschiedene Teile der Wellenfront tragen unterschiedliche Phaseninformation, vor allem bei schlechter Einkopplung in den Resonator. Wird nur ein Ausschnitt der Wellenfront auf der Photodiode detektiert, kann sich dadurch ein Offset ergeben.
- Seitenbänder mit ungerader Ordnung zeigen keine Phasenverschiebung zueinander. Das Modulationssignal enthält im allgemeinen auch höhere Harmonische ( $e^{i2\Omega t}$ ,  $e^{i3\Omega t}$ , ...), sodass nach dem Abmischen des Schwebungssignals mit dem Modulationssignal auch die Seitenbänder gerader Ordnung einen Beitrag zum Gleichstromanteil des Fehlersignals liefern, der keinen Nulldurchgang aufweist.
- Der Mischer selbst liefert einen Offset.

## 2.5. Phasenstarre Kopplung

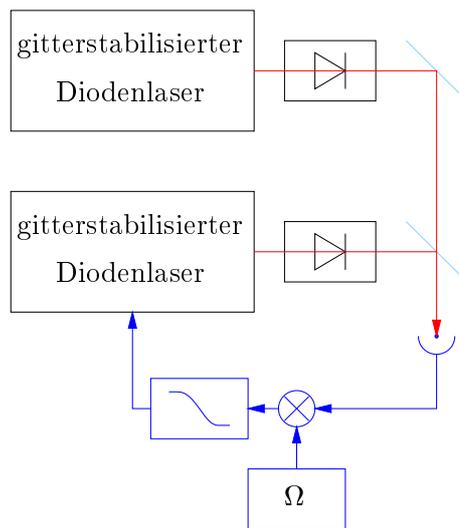


Abbildung 2.7.: Aufbau zur Phasenstarran Kopplung zweier Diodenlaser

Für manche Anwendungen ist nicht die absolute Frequenzstabilität eines Lasers von wesentlicher Bedeutung, sondern nur die Stabilität der Differenzfrequenz zweier Laser. Dies ist z.B. dann der Fall, wenn durch einen Raman-Übergang (Hyper-)Feinkomponenten desselben Zustands miteinander gekoppelt werden. Die Differenzfrequenzen liegen dann typischerweise im Radio- oder Mikrowellenbereich. Höchstmögliche Frequenzstabilität der Differenzfrequenz wird erreicht, wenn das Schwebungssignals durch eine entsprechende Regelung phasenstarr an einen stabilen Lokaloszillator im Radiofrequenzbereich gekoppelt wird. Die phasenstarre Kopplung zweier, durch optische Rückkopplung von

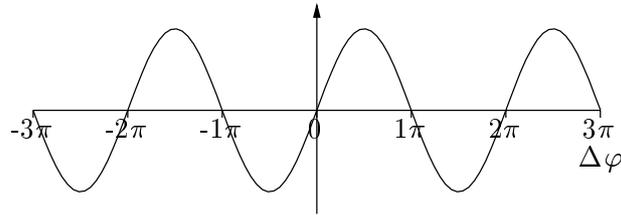


Abbildung 2.8.: Ausgang Mischer in Abhängigkeit von der relativen Phase

einem Hochfinesse-Resonator vorstabilisierter Diodenlaser wurde erstmals von TELLE und LI (1990) demonstriert. Phasenstarre Kopplung für ähnlich gebaute, gitterstabilisierte Diodenlaser, wie sie auch im Rahmen dieser Diplomarbeit aufgebaut wurden, wurde von RICCI et al. (1995) verwirklicht. Gitterstabilisierte, phasenstarr gekoppelte Diodenlaser bei 852 nm mit einer Differenzfrequenz von 9.2 GHz wurden auch für die Realisierung hochgenauer Cäsium-Atomuhren verwendet (SANTARELLI et al., 1994).

Den prinzipiellen Aufbau dazu zeigt Abbildung 2.7. Das Licht zweier Laser wird überlagert und mit einer schnellen Photodiode wird das Schwebungssignal detektiert. Ein Mischer dient als Phasendetektor zwischen Schwebungssignal und Lokalszillator, ein anschließender Tiefpass entfernt Mischprodukte bei der Summenfrequenz. Das Mischprodukt dient als Fehlersignal für die Frequenzregelung eines der beiden Laser. Die Abhängigkeit des Mischerausgangssignals von der relativen Phase der beiden Eingangssignale zeigt Abbildung 2.8. Für ein zuverlässiges Funktionieren ist es notwendig, dass die Phasenabweichungen wesentlich kleiner als Eins bleiben, ansonsten entstehen durch den beschränkten Fangbereich von  $\pm\pi/2$  Phasenabweichungen von mehreren Zyklen, die nicht mehr korrigiert werden. Dazu muss die Regelbandbreite um einiges größer sein als die relative Linienbreite der Laser.

Bei erfolgreicher aktiver Regelung bleiben die Phasenabweichung bei allen Fourierfrequenzen klein und die Voraussetzungen für Gleichung (1.46) auf Seite 14 sind erfüllt. Demzufolge ist das Leistungsspektrum des Schwebungssignals, abgesehen von einer Delta-Funktion bei der Trägerfrequenz, durch das Leistungsspektrum des Phasenrauschens bestimmt.

## 2.6. Kammgenerator

Bei dem vorgestellten, einfachen Verfahren der phasenstarken Kopplung zweier Laser ist die maximale Differenzfrequenz durch die zur Verfügung stehenden Photodetektoren auf einige GHz beschränkt. Sollen größere Abstände überbrückt werden, müssen andere Verfahren herangezogen werden. TELLE et al. (1990) stellen ein Verfahren vor, bei dem durch die Erzeugung von Summenfrequenzen und Frequenzverdopplung optische

Frequenzintervalle exakt halbiert werden können. Nach wiederholter Teilung eines Intervalls können Differenzfrequenzen im optischen Bereich mit Radiofrequenzen verglichen werden. Auf diese Weise können die Frequenzen verschiedener atomarer Übergänge, die auch als zukünftige Frequenznormale dienen sollen, mit sehr großer Genauigkeit miteinander verglichen werden und optische Frequenzen absolut, d.h. in Vergleich mit den Zeitnormale im Radiofrequenzbereich, vermessen werden.

Eine andere Möglichkeit, größere Frequenzintervalle zu überbrücken, ist die Verwendung eines Kammgenerators (KUROGI et al., 1995). Ein Kammgenerator ist im Wesentlichen ein elektro-optischer Modulator (vgl. Abschnitt 2.4) mit großem Modulationsindex, sodass dem Licht sehr viele Seitenbänder aufgeprägt werden, die sich über einen weiten Bereich (einige THz) erstrecken können. Resonantes Überhöhen des Lichtes durch Verspiegeln der Endflächen und Einbau des Kristalls in einen Mikrowellenresonator vergrößern den Modulationsindex. Weiters müssen die Phasengeschwindigkeiten von Licht und Mikrowelle übereinstimmen und die Mikrowellenfrequenz ein ganzes Vielfaches des freien Spektralbereichs sein. Für die phasenstarre Kopplung wird das Schwebungssignal eines zweiten Lasers mit einem der Seitenbänder verwendet. Die Frequenzstabilität ist dann im Wesentlichen durch die Genauigkeit der Modulationsfrequenz gegeben.

Experimente am Max-Planck-Institut für Quantoptik in Garching (HUBER et al., 1998; UDEM, 1997; UDEM et al., 1997), die mittels eines Kammgenerators phasenstarr gekoppelte, gitterstabilisierte Diodenlaser um 850 nm verwenden, ermöglichten u.a. die bisher genaueste Messung der Rydberg-Konstante mit einer Genauigkeit von  $10^{-12}$ .

## 3. Experimenteller Aufbau

Im Folgenden werden die experimentellen Aufbauten zur Frequenzstabilisierung von Diodenlasern vorgestellt. Durch optische Rückkopplung von einem Gitter wird die Linienbreite der Diodenlaser stark verringert. Eine weitere Frequenzstabilisierung erfolgt mit dem Verfahren nach Pound-Drever-Hall. Als Referenz dient ein optischer Resonator mit hoher Finesse.

### 3.1. Aufbau gitterstabilisierter Diodenlaser

#### 3.1.1. Laserdioden

Zum Einsatz kommen Laserdioden des Typs SDL-5401-G1 (866 nm) und SDL-5411-G1 (850 nm und 854 nm) der Firma SDL. Freilaufend ist die maximale Ausgangsleistung mit 50 mW bzw. 100 mW spezifiziert.

#### 3.1.2. Aufbau

In Abbildung 3.1 ist der verwendete Aufbau eines gitterstabilisierten Diodenlasers in Littrow-Anordnung gezeigt. Die erste Beugungsordnung des Gitters wird zurück in die Laserdiode reflektiert. Durch Drehen des Gitters um die vertikale Achse lässt sich die Wellenlänge des emittierten Lichtes um mehr als 10 nm verstimmen. Die Drehung erfolgt mithilfe einer Feingewindeschraube (zur Grobeinstellung) oder mittels eines Piezos (Ausdehnung  $5 \mu\text{m}/150\text{V}$ ), der zwischen Feingewindeschraube und Gitter eingeklemmt ist. Die Halterungen für Laserdiode und Gitter sind auf einer Grundplatte aufgeschraubt. Durch ein Festkörpergelenk in der Grundplatte ist es zudem möglich, das Gitter um die horizontale Achse zu kippen. Dies dient dazu, den Rückreflex in die Laserdiode zu optimieren.

Die Laserdiode ist so in der Halterung angebracht, dass durch das stark elliptische Strahlprofil möglichst viele Linien des Gitters ausgeleuchtet werden, um eine gute Frequenzselektivität durch das Gitter zu erreichen. Bei einer Strichzahl von 1200/mm des Gitters und einer Breite des Strahls von ca. 5 mm werden ca. 10000 Linien ausgeleuchtet. Die Polarisation des Lichtes ist dann parallel zu den Gitterlinien, sodass laut Gitterspezifikation ca. 50% reflektiert werden. Davon wird nicht alles in die Laserdiode zurückreflektiert. Verluste ergeben sich durch den Kollimator und durch ungenügende

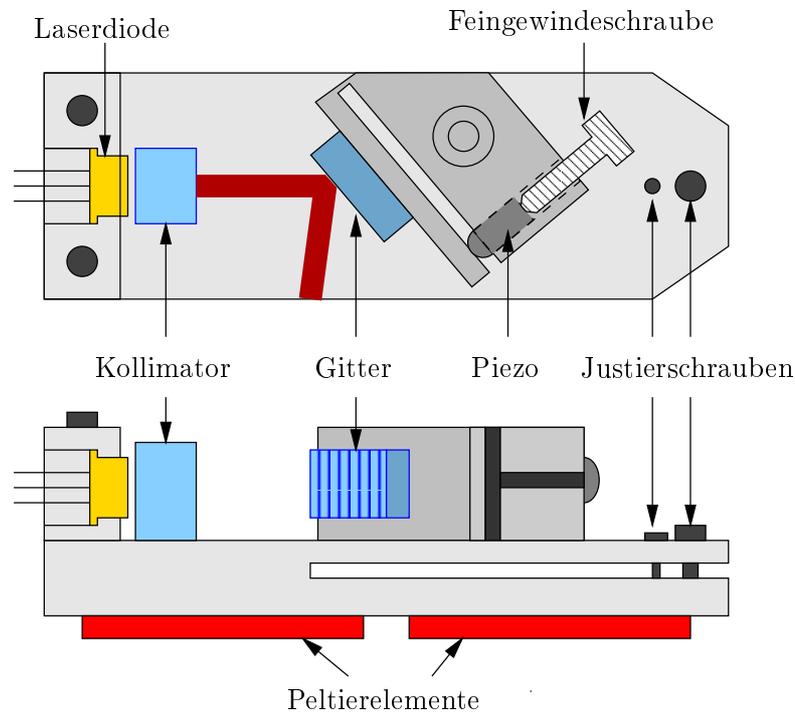


Abbildung 3.1.: Aufbau der gitterstabilisierten Diodenlaser (Maßstab 1:1).

Fokussierung auf den aktiven Bereich der Laserdiode. Die Justage der Kollimatoroptik muss deshalb sehr sorgfältig erfolgen. Zuerst wird ohne das Gitter der Kollimator so ausgerichtet, dass der Strahl möglichst parallel ist und durch die Mitte des Kollimators durchtritt. Dann wird das Gitter montiert und der Winkel grob so eingestellt, dass das Licht in die Laserdiode zurückreflektiert wird. Die Justierschraube zum Kippen des Gitters um die horizontale Achse soll leicht angezogen sein. Dann wird die Position des Kollimators so lange variiert, bis der Schwellstrom möglichst klein ist. Bei optimaler Rückkopplung sinkt der Schwellstrom von ca. 24 mA auf ca. 16 mA. Als Nächstes wird der Kollimator angeklebt. Da der verwendete Klebstoff (Superkleber) beim Aushärten schrumpft, werden Glasstäbchen als Füllmaterial verwendet, sodass nur sehr wenig Klebstoff verwendet werden muss. Nach dem Aushärten wird nochmals die Rückkopplung vom Gitter mithilfe der Justageschrauben optimiert.

Durch Drehen des Gitters lässt sich der Diodenlaser um maximal ca. 3–4 GHz kontinuierlich verstimmeln, bevor er auf die nächste longitudinale Mode des Laserdiodenresonators im Abstand von ca. 50 GHz springt. Damit der Laser genau bei der gewünschten Wellenlänge emittiert, ist es daher nötig, auch Strom und Temperatur anzupassen. Die Stromverstimmbarkeit beträgt ca.  $-200 \text{ MHz/mA}$ , die Temperaturverstimmbarkeit ca.

–24 GHz/°C.

Zur Temperaturregelung dienen zwei Peltierelemente, die an der Unterseite der Grundplatte angebracht sind. Als Fühler wird ein Pt100 (Widerstandsdraht aus Platin) verwendet. Die Temperaturregelung ist im Wesentlichen die gleiche, wie sie für den optischen Resonator verwendet wird. Eine Temperaturstabilität von wenigen Millikelvin wird dadurch erreicht, die Temperatur selbst liegt bei ca. 30 °C.

### 3.2. Optischer Aufbau

Der optische Aufbau ist in Abbildung 3.2 gezeigt.

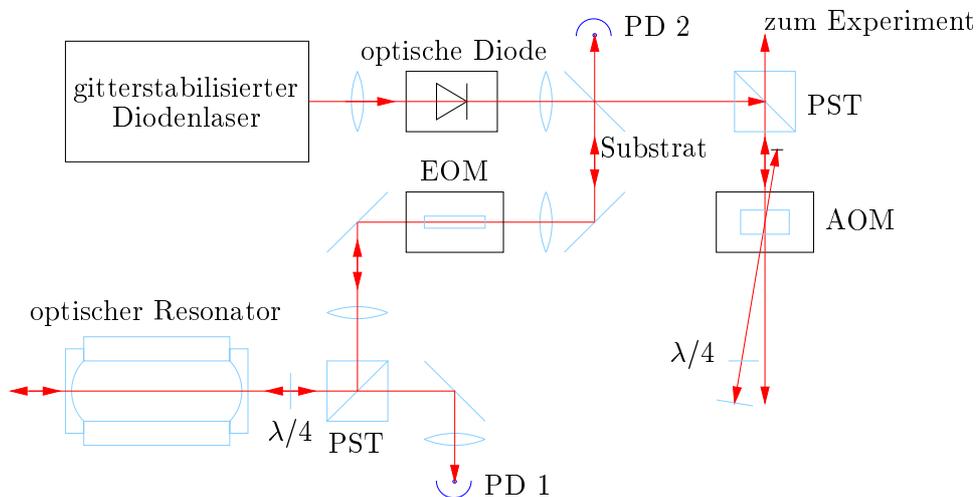


Abbildung 3.2.: Optischer Aufbau zur Frequenzstabilisierung für die Diodenlaser bei 850 nm und 854 nm. Diese sind auf den gleichen Resonator stabilisiert. Da die Aufbauten völlig symmetrisch bezüglich dem Resonator sind, wurde nur ein Teil eingezeichnet.

Mittels zweier Linsen wird das Licht durch die optische Diode fokussiert und anschließend wieder kollimiert. Die optische Diode schützt den Diodenlaser vor unerwünschter optischer Rückkopplung, vor allem vom Resonator. An einem Glassubstrat werden ca. 5% der Lichtleistung von ca. 10 mW für die Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall ausgekoppelt (siehe Abschnitt 2.4 auf Seite 25). Der transmittierte Anteil geht in doppeltem Durchgang durch einen akusto-optischen Modulator (AOM). Dieser dient dazu, den Laser ein- bzw. auszuschalten. Der direkt durchgehende Strahl 0. Ordnung wird zur Wellenlängenmessung, zur Spektroskopie an der Hohlkathode oder für Schwebungsmessungen verwendet. Der zweimal in erster Ordnung gebeugte Strahl

dient zur Spektroskopie an einzelnen Ionen in der Falle. Aufgrund der geringen Beugungseffizienz von ca. 20% stehen nach doppeltem Durchgang ca. 400  $\mu\text{W}$  für das Experiment zur Verfügung.

Zur Wellenlängenmessung dient ein Michelson-Interferometer, von dem ein Arm in der Länge veränderlich ist. Als Referenz dient ein Helium-Neon-Laser mit hinreichend genau bekannter Wellenlänge. Die Wellenlänge des zu messenden Lichtes kann dadurch auf ca.  $\pm 0.001\text{ nm}$  bzw.  $\pm 400\text{ MHz}$  genau bestimmt werden.

Der zur Regelung verwendete Strahl wird durch einen elektro-optischen Modulator (ELSNER, 1988) durchgekoppelt. Dieser besteht im Wesentlichen aus einem Kristall aus  $\text{LiTaO}_3$  ( $25 \times 0.5 \times 0.65\text{ mm}$  Größe). Die Deckflächen sind vergoldet, der Kristall wird mittels eines Silberleitklebers in ein Indiumbett geklebt und von der anderen Seite mittels Drähten und Silberleitkleber kontaktiert. Das Indiumbett ist elektrisch leitfähig und sehr weich. Dadurch werden mechanische Spannungen ausgeglichen, die beim Aushärten des Klebers entstehen können, der dazu erhitzt werden muss, um eine optimale Leitfähigkeit zu erreichen. Ein an den Kristall angelegtes elektrisches Feld bewirkt eine Änderung des Brechungsindex für Licht, dessen Polarisation parallel zum elektrischen Feld ist. Durch den hohen Brechungsindex von 2.2 werden an der Ein- und Austrittsfläche jeweils ca. 15% des Lichtes reflektiert und fallen zum größten Teil auf die Photodiode PD 2 (siehe Abbildung 3.2 auf der vorherigen Seite), auf der die Transmission des jeweils anderen Lasers durch den Resonator detektiert wird. Der sich dadurch ergebende Offset lässt sich vermeiden, wenn in den EOM leicht schräg eingekoppelt wird, sodass der Rückreflex nicht mehr mit dem einfallenden Strahl zusammenfällt. Das Licht wird dann im Kristall einmal an den Seitenflächen reflektiert. Die Durchkopplungseffizienz ist dann zwar geringer als bei direktem Durchgang, jedoch ist Strahlprofil nicht mehr so stark elliptisch, sodass dafür in den Resonator besser eingekoppelt werden kann.

Mithilfe einer weiteren Linse wird die Modenanpassung an den optischen Resonator vorgenommen. Die Brennweite und der Abstand sind so gewählt, dass der Fokus am Ort des ebenen Spiegels des Resonators zu liegen kommt.

Falls nur einer der beiden Laser bei 850 nm und 854 nm in Verwendung ist, so wird das durch den Resonator transmittierte Licht gleich dahinter durch eine Photodiode detektiert. Ansonsten wird das Licht von beiden Seiten in den Resonator eingekoppelt. Die Orientierungen der  $\lambda/2$ -Platten sind so gewählt, dass reflektiertes und transmittiertes Licht gekreuzte Polarisationen aufweisen und am polarisierenden Strahlteiler (PST) getrennt werden. Das reflektierte Licht wird auf Photodiode PD 1 detektiert und dient als Eingangssignal für die Regelung nach Pound-Drever-Hall. Das transmittierte Licht des anderen Lasers fällt nach Durchgang durch den EOM und durch das Substrat zum größten Teil auf Photodiode PD 2. Am Substrat wird ein geringer Anteil (ca. 5%) des transmittierten Lichtes in Richtung Laser zurückreflektiert und in der optischen Diode absorbiert. Ungefähr 15% des auf den Resonator einfallenden Lichtes wird auf Resonanz transmittiert.

### 3.2.1. Optischer Resonator

Für die Diodenlaser bei 854 nm und 850 nm wurde zur Stabilisierung ein optischer Resonator der gleichen Bauweise verwendet, wie er schon in BECHTER (1998); GLATZEL (1996) beschrieben ist.

Auf ein 20 cm langes Quarzrohr (Außendurchmesser 40 mm, Innenbohrung 10 mm) sind ein planer und ein konvexer (Krümmungsradius 330 mm) Spiegel aufgeklebt. Zwischen dem gekrümmten Spiegel und dem Quarzrohr ist ein 12 mm langer Röhrenpiezo angebracht, um durch Anlegen einer Spannung ( $\pm 150$  V) die Länge des Resonators zu verändern. Im stabilisierten Zustand kann dadurch die Frequenz der Laser durchgestimmt werden. Das Quarzrohr befindet sich in einem druckdichten, temperaturstabilisierten Aluminiumgehäuse.

Die Spiegel besitzen laut Spezifikation eine Reflektivität von  $R = 0.997$ , sodass nach Gleichung (2.18) eine Finesse von 1000 zu erwarten ist. Der freie Spektralbereich berechnet sich nach Gleichung (2.13) zu 707 MHz. Messungen (siehe Abschnitt 3.4 und 4.5.1.1) ergaben Werte von  $\mathcal{F} = 660$  bzw.  $\Delta\nu = 700.306$  MHz.

In BECHTER (1998) beschriebene Messungen ergaben für einen gleich gebauten Resonator Driftraten von bis zu 1 MHz/min. Als Ursache dafür wird die Relaxation des Röhrenpiezos nach großen Spannungsänderungen angenommen. Aus diesem Grund wurde eine verbesserter Aufbau entwickelt (siehe Abschnitt 3.5), bei dem auf den Röhrenpiezo verzichtet wird. Damit ist es aber nicht mehr möglich, den Laser durch Veränderung der Resonatorlänge zu verstimmen.

Eine alternative Möglichkeit ist die Verstimmung der Laserfrequenz durch einen breitbandigen AOM. Selbst im doppeltem Durchgang sind jedoch nur Verstimmungen bis 300 MHz möglich, sodass ein ganzer freier Spektralbereich von 700 MHz für einen Resonator von 20 cm Länge nicht abgedeckt wird. Im ungünstigen Fall kann es sein, dass die Laser nicht auf die gewünschte Frequenz gebracht werden können, wenn der Resonator zu stark gedriftet ist. Der Resonator darf also auch langfristig (Tage, Wochen) um höchstens wenige zehn MHz driften.

## 3.3. Elektronischer Aufbau

### 3.3.1. Fehlersignalerzeugung

#### 3.3.1.1. Diodenlaser bei 866 nm und 854 nm

Die elektronischen Aufbauten zur Fehlersignalerzeugung für die Diodenlaser bei 866 nm und 854 nm folgen dem gleichen Bauplan. Das Blockschaltbild für die Modulations- und Fehlersignalerzeugung ist in Abbildung 3.3 auf der nächsten Seite zu sehen.

Als Signalquelle dient ein Schwingquarz. Je nach Laser werden Frequenzen von 14.7 MHz, 15 MHz und 16 MHz verwendet. Die Frequenzauswahl ist dadurch bedingt, dass der ebenfalls im Aufbau verwendete Phasenschieber nur für den Frequenzbereich

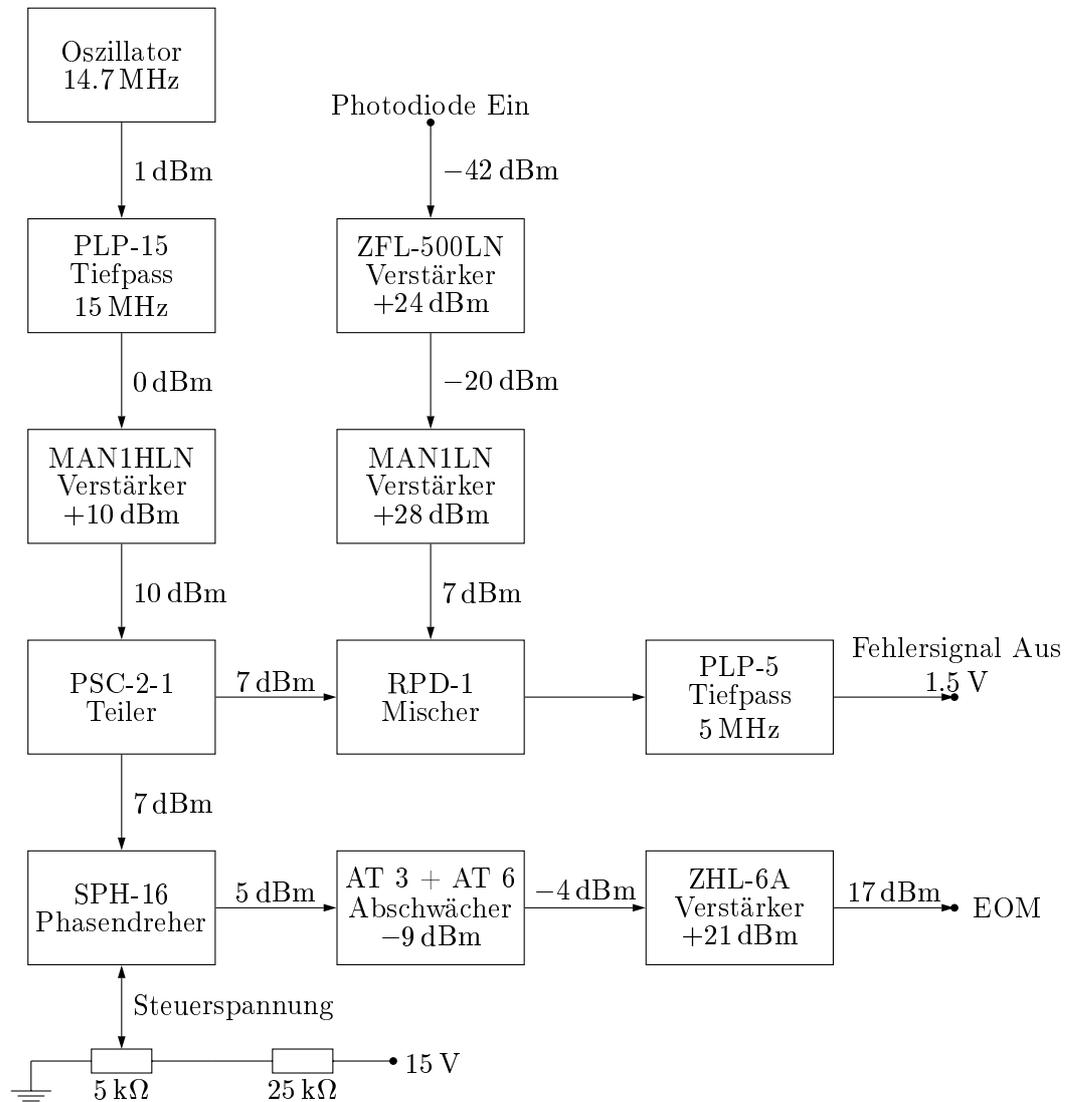


Abbildung 3.3.: RF-Teil der Fehlersignalerzeugung für die Diodenlaser bei 854 nm und 866 nm. Alle Bauteile sind von Minicircuits. Als Oszillator dient ein Quarz zusammen mit dem Treiberbaustein M12061 von Motorola. Die Verstärker ZFL-500LN und ZHL-6A sowie die Abschwächer werden als externe Bauteile verwendet.

von 14–16 MHz erhältlich ist. Da zur Speicherung der Ionen in der linearen Falle starke Radiofelder (einige Watt) bei 18 MHz verwendet werden, die nur ungenügend abgeschirmt werden können, sind auf dem Fehlersignal auch Mischprodukte bei der Differenzfrequenz von Modulations- und Fallenfrequenz enthalten (d.h. bei ca. 2 MHz), die durch den Tiefpass am Fehlersignalausgang nicht weggefiltert werden. Eine Modulationsfrequenz um 40 MHz wäre aus diesem Grund vorzuziehen.

Das Modulationssignal wird aufgeteilt, ein Teil geht an den Mischer, der andere wird zur Ansteuerung des EOM verwendet. Im Zweig zum EOM sind noch ein Phasenschieber, mehrere Abschwächer und ein Verstärker enthalten. Durch Veränderung der Steuerspannung am Phasenschieber lässt sich insbesondere das richtige Vorzeichen des Fehlersignals auswählen. Durch Variation der Länge des Kabels zum EOM kann ebenfalls die Phasenlage eingestellt werden.

Das Photodiodensignal weist einen Pegel von nur  $-42$  dBm auf und muss dementsprechend stark verstärkt werden. Dies geschieht durch zwei Verstärker, von denen der erste gleich nach der Photodiode angebracht ist.

#### 3.3.1.2. Diodenlaser bei 850 nm

Wie schon in Abschnitt 2.4.2 auf Seite 29 erwähnt, führt ein Übersprechen des Modulationssignals auf das Photodiodensignal zu einem unerwünschten Offset im Fehlersignal. Da bei dem Aufbau für die Diodenlaser bei 855 nm und 866 nm Modulationssignalerzeugung, Demodulation und Nachverstärkung des Photodiodensignals auf der gleichen Platine untergebracht sind, ist dies kaum zu vermeiden. Auch ein hoher Anteil von höheren Harmonischen in Modulations- und Demodulationssignal führt zu einem unerwünschten Gleichstromanteil. Aus diesem Grund wurde beim elektronischen Aufbau zur Fehlersignalerzeugung bei dem Diodenlaser bei 850 nm einige Verbesserungen vorgenommen (siehe Abbildung 3.4). Modulationssignalerzeugung und Demodulation sind in getrennten Gehäusen untergebracht. Tiefpässe an den Ausgängen der Signalerzeugung verringern den Anteil von höheren Harmonischen erheblich, der aufgrund von Nichtlinearitäten des Phasenschiebers ansonsten enthalten wäre.

Das Photodiodensignal wird von nur einem, besonders rauscharmen Verstärker um 55 dBm verstärkt, der direkt nach der Photodiode angebracht ist. Da die Photodiode unter ungünstigen Umständen Oszillationen bei ca. 600 MHz zeigte, die den Verstärker in die Sättigung trieben, wurde nach der Photodiode noch ein Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von 100 MHz eingefügt. Photodiode und Verstärker sind durch direkten Kontakt mit dem optischen Tisch geerdet, dadurch koppelt hochfrequente Störstrahlung nur in geringerem Ausmaß ein.

Der Mischer RPD 1 zusammen mit dem Tiefpass (PLP 5, Grenzfrequenz 5 MHz) ist in einem eigenen Gehäuse direkt nach dem Verstärker angebracht. Die Ein- und Ausgänge des Mixers besitzen getrennte Masseleitungen und wurden nicht miteinander verbunden, um Brummschleifen zu verhindern.

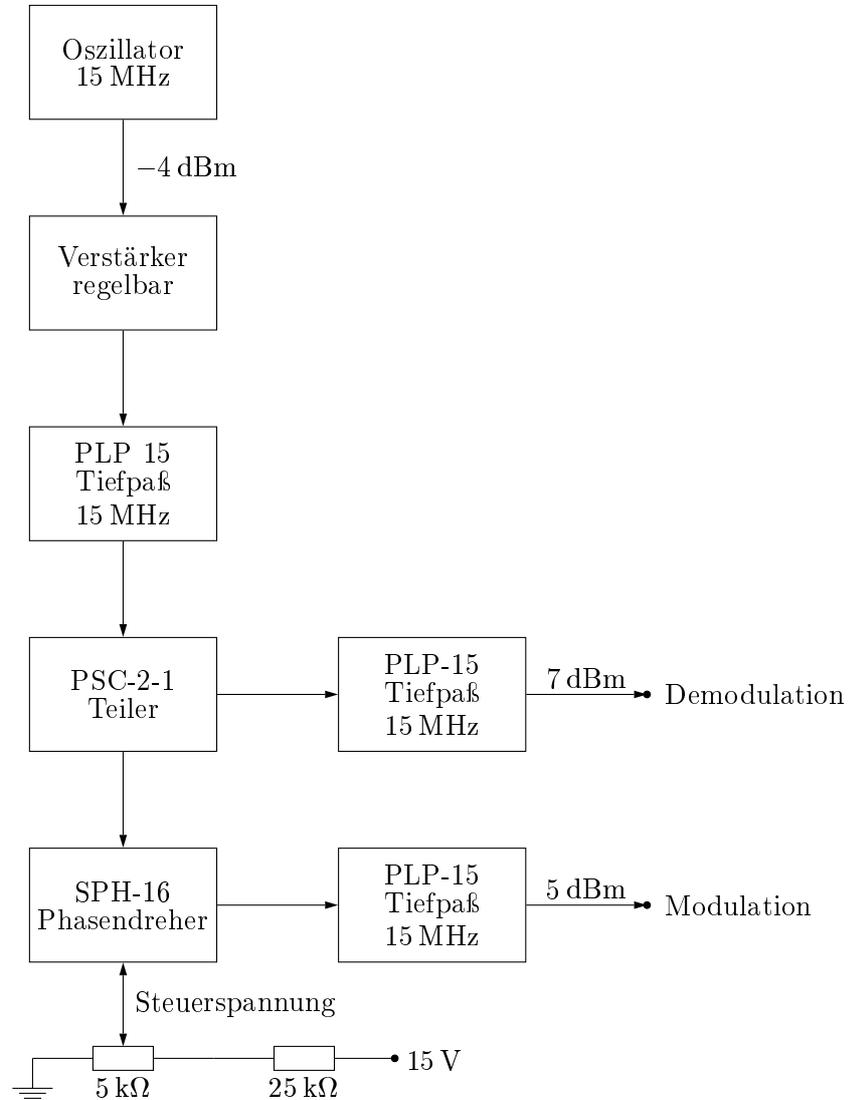


Abbildung 3.4.: Modulations- und Demodulationssignalerzeugung für den Diodenlaser bei 850 nm. Vergleiche auch Abbildung 3.3 auf Seite 38. Der regelbare Verstärker (OPV, beschaltet als nichtinvertierender Verstärker) wird so eingestellt, dass am Demodulationssignalausgang 7 dBm anliegen.

### 3.3.2. Photodiode

Das Photodiodensignal weist nur einen geringen Pegel von ca.  $-42$  dBm von auf. Es daher notwendig, für die Photodiode einen möglichst rauscharmen Aufbau zu wählen. Mithilfe eines Transimpedanzverstärkers (siehe Abbildung 3.5) wird der Photostrom in ein Spannungssignal gewandelt. Beim Aufbau wurde auf möglichst kurze Signalwege geachtet.

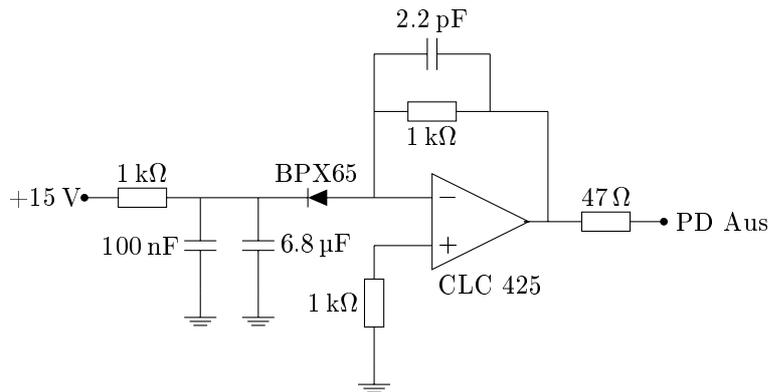


Abbildung 3.5.: Photodiodenschaltung. Der Aufbau wurde auf möglichst kompakt gehalten. Nicht eingezeichnet sind die Bauteile zur Spannungsversorgung ( $\pm 5$  V) des Operationsverstärker.

### 3.3.3. Regelverstärker

Die Frequenz der Diodenlaser lässt sich durch Variation des Gitterwinkels und durch Änderung des Diodenstromes beeinflussen. Der Piezozweig (siehe Abbildungen A.1 und A.3 auf Seite 90) dient vor allem dazu, langsame Schwankungen (kleiner 10 kHz) auszugleichen. Er ist als PI-Regler mit zusätzlichem Tiefpass (Grenzfrequenz 11.3 kHz) ausgelegt. Der Integralteil lässt sich durch Überbrücken des Kondensators im Rückkoppelzweig ausschalten. Ein Widerstand parallel zum Kondensator begrenzt die Verstärkung für Frequenzen unterhalb von 1 Hz.

Der Zweig zur Regelung des Laserdiodenstromes (siehe Abbildungen A.2 und A.4 auf Seite 91) ist darauf ausgelegt, auch hochfrequente Störungen auszugleichen. Er ist als PID-Regler ausgeführt mit einer Integrationsfrequenz von 29 kHz, das Differenzglied lässt die Verstärkung ab 470 kHz wieder ansteigen. Durch den durch das Differenzglied bewirkten Phasenschub von  $+90^\circ$  oberhalb der Grenzfrequenz soll die Frequenz erhöht werden, ab derer der gesamte Phasenschub im Regelkreis  $-180^\circ$  oder mehr beträgt und dadurch Störungen nicht mehr ausgeglet, sondern verstärkt werden. Insbesondere wird

dadurch auch das Tiefpassverhalten des optischen Resonators (siehe Abschnitt 2.4.1 auf Seite 29) berücksichtigt.

### 3.4. Fehlersignal

Abbildung 3.6 zeigt ein gemessenes Fehlersignal. daran wurde der theoretische Verlauf (siehe Gleichung (2.28)) angepasst, wodurch bei bekannter Modulationsfrequenz  $\Omega = 15$  MHz die Linienbreite  $2\Gamma/2\pi$  des optischen Resonators und damit die Finesse ermittelt werden kann. Es ergibt sich ein Wert von  $2\Gamma/2\pi = 1.06$  MHz und mit einem freien Spektralbereich von 700 MHz erhält man für die Finesse  $\mathcal{F} = 660$ .

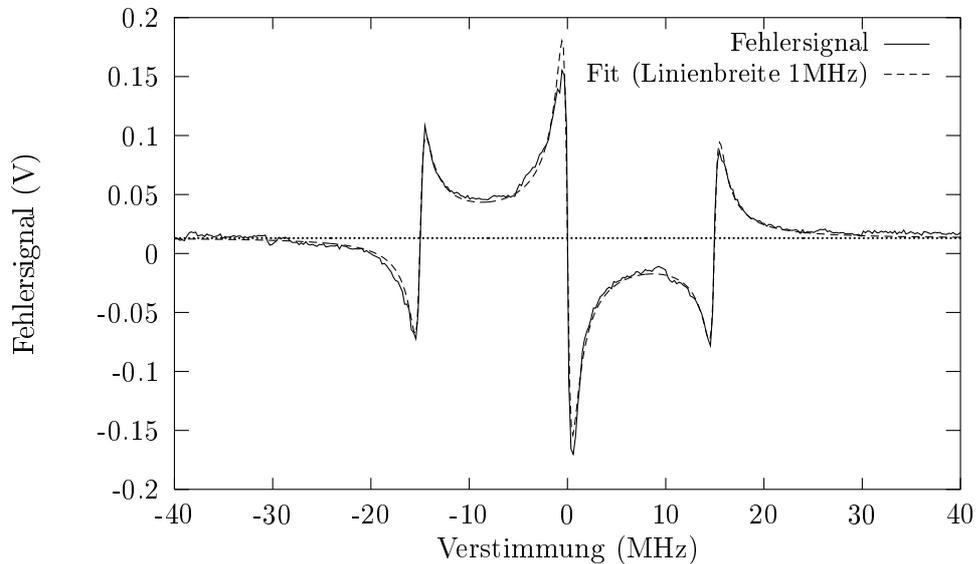


Abbildung 3.6.: Gemessenes Fehlersignal, gemeinsam mit Fit.

## 3.5. Der driftstabile optische Resonator

### 3.5.1. Resonatordrift

Die Langzeitstabilität der Diodenlasersysteme ist durch die Driftrate des optischen Resonators gegeben. Damit Driftraten kleiner als 1 MHz/h erzielt werden, ist es notwendig, den optischen Resonator sorgfältig gegen externe Temperatur- und Druckschwankungen zu isolieren.

Aus der Resonanzbedingung (4.2) auf Seite 56 erhält man für die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz von der Länge  $d$  und vom Brechungsindex  $n$  die Beziehung

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta d}{d} - \frac{\Delta n}{n}. \quad (3.1)$$

Wie aus obiger Gleichung ersichtlich ist, können zwei Gründe für Änderungen der Resonanzfrequenz unterschieden werden. Zum einen eine Änderung der Länge des Resonators, zum andern eine Änderung des Brechungsindex.

### 3.5.1.1. Temperaturbedingte Längenänderung des Resonators

Der Abstandshalter aus Quarz zeichnet sich durch einen besonders niedrigen Temperaturexpansionskoeffizienten von  $\alpha = 5 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}$ , d.h.

$$\frac{\Delta d}{d} = \alpha \Delta T. \quad (3.2)$$

Bei einer Wellenlänge von 854 nm lässt sich nach Gleichung (3.1) eine Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz von  $-180 \text{ kHz/mK}$  erwarten.

### 3.5.1.2. Einfluss der Luft

Die Dichte der Luft und damit der Brechungsindex ist von Druck und Temperatur abhängig. Die Abhängigkeit des Brechungsindex der Luft vom Druck ist durch

$$\Delta n = (n - 1) \frac{\Delta p}{p} \quad (3.3)$$

gegeben. Bei Normaldruck  $p \approx 1000 \text{ mbar}$  beträgt der Brechungsindex der Luft  $n = 1.00028$ . Mit Gleichung (3.1) ergibt sich für Normaldruck und einer Wellenlänge von 854 nm eine Druckabhängigkeit der Resonanzfrequenz von ca.  $-100 \text{ MHz/mbar}$ . Es ist also notwendig, das Gehäuse sehr gut gegen externe Druckschwankungen abzudichten.

Innerhalb eines druckdichten Gehäuses bleibt bei Temperaturhöhung die mittlere Dichte konstant, jedoch kommt es bei einer inhomogenen Temperaturverteilung ebenfalls zu einer inhomogenen Dichteverteilung. Im speziellen Fall des verwendeten optischen Resonators erwärmt sich die Luft in Kontakt mit dem Gehäuse schneller als die Luft innerhalb des Quarzrohres, sodass es effektiv zu einer Druckerhöhung kommt, da die erwärmte Luft die kühlere Luft im Quarzrohr komprimiert. Aus  $pT = \text{const.}$  folgt

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta T}{T} \quad (3.4)$$

und mit Gleichungen (3.1) und (3.3) ergibt sich aufgrund einer inhomogenen Temperaturverteilung der Luft in der beschriebenen Art als Obergrenze für die Änderung der Resonanzfrequenz ein Wert von  $-330 \text{ kHz/mK}$ .

### 3.5.2. Aufbau

Ein Querschnitt durch den gesamten Aufbau des driftstabilen optischen Resonators ist in Abbildung 3.7 zu sehen.

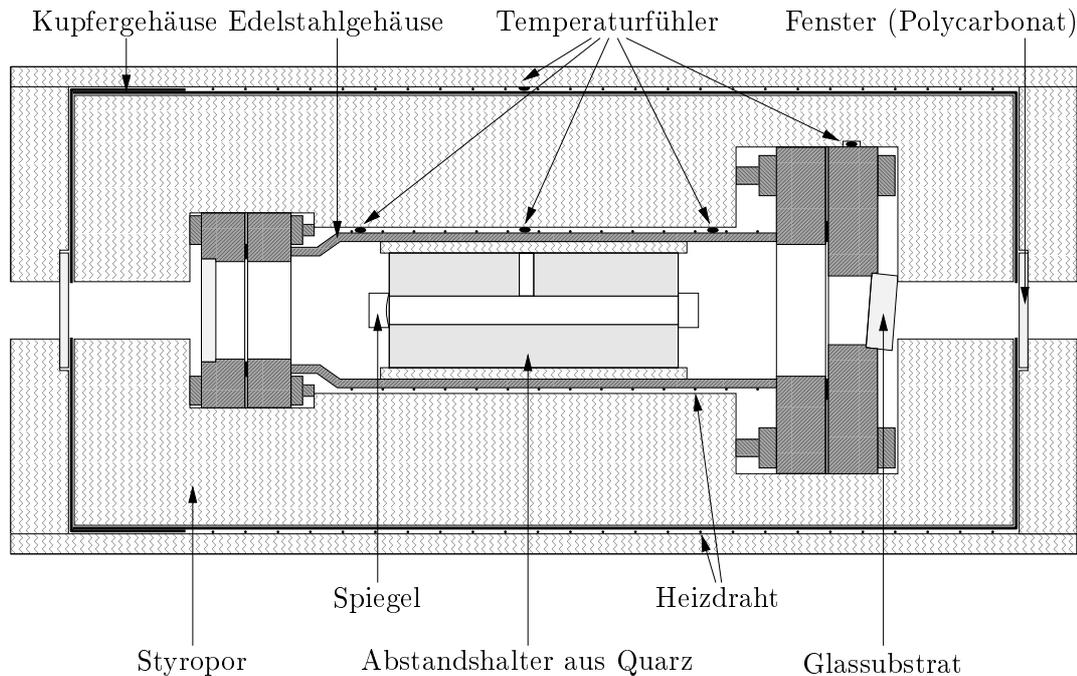


Abbildung 3.7.: Querschnitt durch den driftstabilen optischen Resonator, Maßstab 2:5

Die Spiegel werden mit langsam aushärtendem Epoxykleber an dem Abstandshalter aus Quarz (Länge 100 mm, Durchmesser 40 mm, Innenbohrung 10 mm) befestigt. Da der Temperatureausdehnungskoeffizient des Klebers erheblich höher als der von Quarz ist, ist darauf zu achten, dass kein Klebstoff zwischen Spiegel und Quarzrohr gelangt. Da die Endflächen der verwendeten Quarzrohre nicht perfekt planparallel sind, ist es notwendig, sich vor dem Ankleben der Spiegel zu überzeugen, dass ein Einkoppeln in den Resonator möglich ist. Dazu werden die Spiegel vorläufig mit Klebeband befestigt. Das Quarzrohr besitzt eine zusätzliche Bohrung, sodass bei einem eventuellen Evakuieren des Edelstahlgehäuses ein Druckausgleich möglich ist.

Eine dünne Schicht Styropor dient zur Isolierung und als Halterung im Innern des Edelstahlgehäuses. Das Gehäuse ist mit Kupferingdichtungen versehen, sodass eine sehr gute Druckdichtheit gegeben ist. Für den Deckel, der dem planparallelen Spiegel zugewandt ist, wurde ein durchbohrter Blindflansch mit eingeklebtem Glassubstrat als Fenster verwendet. Das Glassubstrat ist leicht schräg eingesetzt, um unerwünschte Reflexe

zu vermeiden. Der Epoxy-Klebstoff ist auch für die Verwendung im Vakuum geeignet.

Der zylindrische Teil des Edestahlgehäuses ist mit Heizdraht ( $0.4\text{ mm}$ ,  $4\ \Omega/\text{m}$ ) umwickelt. Es wurden vier parallel geschaltete Wicklungen verwendet, um auf einen erwünschten Gesamtwiderstand von ca.  $10\ \Omega$  zu kommen. Als Temperaturfühler wurden vier NTC ( $4.7\text{ k}\Omega$ ) verwendet, die so verschaltet wurden, dass sich insgesamt wieder ein Gesamtwiderstand ergibt, der dem eines einzelnen entspricht. Bei der Verwendung von nur einem Temperaturfühler stellte sich heraus, dass die Temperaturverteilung nicht homogen war, sodass eine Änderung der Umgebungstemperatur zu einer Änderung der über das ganze Gehäuse gemittelten Temperatur führte, obwohl durch die Regelung die Temperatur am Ort des Fühlers konstant gehalten wurde. Ursache für die inhomogene Temperaturverteilung ist die vergleichsweise geringe Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl und dass zudem die großen Endstücke, die thermisch nur schlecht mit dem restlichen Teil des Edelstahlgehäuses verbunden sind, nicht beheizt werden können.

Aus diesem Grund befindet sich das Edelstahlgehäuse in einem weiteren, zylinderförmigen Gehäuse aus Kupfer (Durchmesser  $150\text{ mm}$ , Länge  $320\text{ mm}$ , Wandstärke  $1\text{ mm}$ ). Eine Seitenfläche ist angelötet, die andere wird durch einen gut anliegenden Deckel verschlossen. Der Zwischenraum ist mit Styropor ausgefüllt. Die Kupferhülle ist ebenfalls temperaturstabilisiert. Dazu ist sie mit Heizdraht umwickelt, in der Mitte befindet sich ein Temperaturfühler, ebenfalls ein NTC mit  $4.7\text{ k}\Omega$  Widerstand. Die Bohrungen in den Deckflächen sind mit Fenstern aus Polycarbonat verschlossen. Außen befindet sich nochmals eine Isolierung aus aluminiumbeschichtetem Styropor.

### 3.6. Sättigungsspektroskopie an Cäsium

Mittels Sättigungsspektroskopie lassen sich Auflösungen erzielen, die nicht durch die Dopplerverbreiterung von einigen  $100\text{ MHz}$  bei Raumtemperatur beschränkt ist. Damit lässt sich die Hyperfeinstruktur des  $S_{1/2}-P_{3/2}$ -Übergangs bei  $852\text{ nm}$  von Cäsium (siehe Abbildung 3.9) auflösen.

Den Aufbau zeigt Abbildung 3.8. Der Pumpstrahl sättigt eine Geschwindigkeitsklasse der Atome, für die eine der Komponenten resonant ist. Ist die Frequenz so eingestellt, dass dies für eine entlang des Strahls ruhende Geschwindigkeitsklasse der Fall ist, ändert sich dadurch die Absorption für den gegenläufigen Probestrahl, der mit derselben (ruhenden) Geschwindigkeitsklasse resonant ist. Das dopplerverbreiterte, Gauß-förmige Absorptionsprofil zeigt deshalb verringerte Absorption. Der Doppleruntergrund wird durch einen zweiten Referenzstrahl, der nicht mit dem Pumpstrahl überlappt, ermittelt und von dem Absorptionssignal des Probestrahls subtrahiert. Zusätzlich zu den nach den Auswahlregeln erlaubten Übergängen lassen sich im Sättigungssignal auch noch Kreuzresonanzen beobachten, die entstehen, wenn Pump- und Probestrahl über zwei verschiedene Übergänge mit derselben, nicht ruhenden Geschwindigkeitsklasse resonant sind. Ein Spektrum des Übergangs ausgehend von  $F = 3$  zeigt Abbildung 4.1 auf Sei-

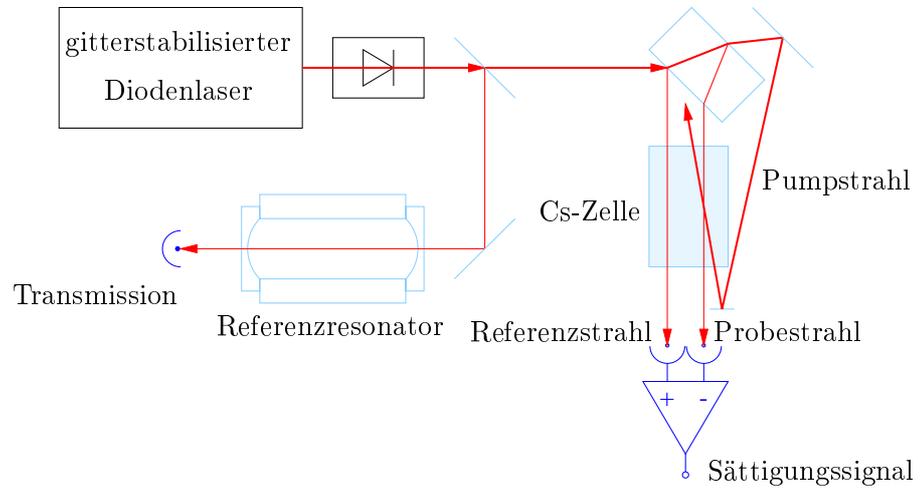


Abbildung 3.8.: Aufbau Sättigungsspektroskopie

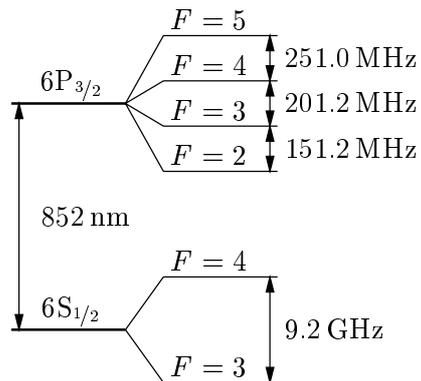


Abbildung 3.9.: Termschema Cäsium. Die Daten stammen aus SCHMIDT et al. (1994)

Übergang bei 852.123 nm, $F = 3 \rightarrow$	2	2,3	3	2,4	3,4	4
Frequenz (MHz)	0	76	151	176.4	252	353
Übergang bei 852.132 nm, $F = 4 \rightarrow$	3	3,4	4	3,5	4,5	5
Frequenz (MHz)	0	101	201	227	327	453

Tabelle 3.1.: Frequenzen der beobachtbaren Resonanzen

te 49. Gleichzeitig mit dem Sättigungssignal wurde auch die Transmission durch einen optischen Resonator aufgenommen, um dessen Drift zu messen.

Eine Frequenzstabilisierung des Lasers auf eine der Resonanzen kann durch eine einfache Flankenstabilisierung erfolgen. Vorteil ist die gute Langzeitstabilität von zumindest 1 MHz, die dadurch erzielt werden kann.



## 4. Messungen zur Stabilität

### 4.1. Messung der Resonatordrift des driftstabilen Resonators

Als Referenz zur Messung der Resonatordrift wurde das Signal aus der Sättigungsspektroskopie an Cäsium (Abschnitt 3.6) verwendet. Der Diodenlaser bei 852 nm wurde durchgestimmt und mit einem Speicheroszilloskop gleichzeitig das Sättigungssignal und die Transmission durch den driftstabilen Resonator aufgenommen. In regelmäßigen Abständen wurden die Daten vom Steuerrechner ausgelesen und abgespeichert. Ein Beispiel ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Gleichzeitig wurde die von der Regelung gemessene Temperatur des inneren und des äußeren Gehäuses aufgezeichnet.

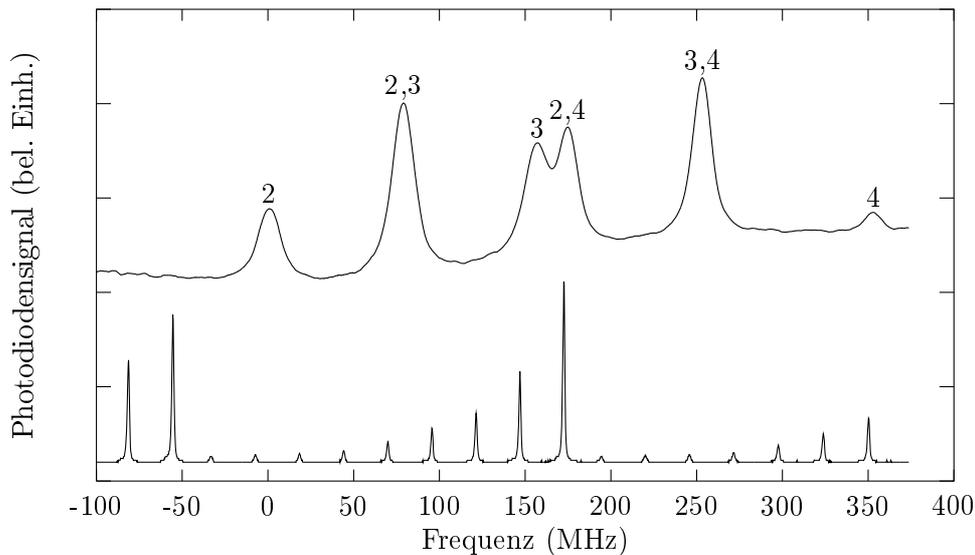


Abbildung 4.1.: Signal der Sättigungsspektroskopie an Cäsium, gemeinsam mit Transmission durch optischen Resonator. Gezeigt ist der Übergang  $S_{1/2}-P_{3/2}$ , ausgehend von  $F = 3$  (vgl. Abschnitt 3.6). Die Bezeichnung der Resonanzen folgt dem gleichen Schema, wie es in Tabelle 3.1 auf Seite 46 verwendet wird.

Das Auswertungsprogramm berechnete die Drift der Resonanzfrequenz, indem es an eine der Hyperfeinkomponenten eine Lorentzkurve anpasste, dadurch die Mitte der Linie bestimmte und diese mit der Lage der Transmissionsmaxima des Resonators verglich. Zur Skalierung der Frequenzachse wurde der Abstand von 25.4 MHz zwischen den Transversalmoden des Resonators herangezogen. Dieser wiederum wurde aus den bekannten Abständen der Hyperfeinkomponenten bestimmt.

Die volle Halbwertsbreite einer Komponente der Hyperfeinstruktur liegt typischerweise bei 20 MHz, die Mitte der Linie kann auf ca. 100 kHz genau bestimmt werden. Verstärkte Fehler bei der Bestimmung der Linienmitte bzw. des Abstands zu einem Transmissionsmaximum ergeben sich vor allem bei ungenügender Subtraktion des Doppleruntergrundes, durch die ungleichmäßige Verstimmung des Lasers und durch Intensitätsschwankungen des Lasers.

Das Ergebnis einer solchen Driftmessung ist in Abbildung 4.2 auf der nächsten Seite zu sehen. Innerhalb von 4 Stunden beträgt die Drift ca. 300 kHz. Die Temperaturabweichungen des inneren Gehäuses sind kleiner als 0.5 mK, die der äußeren Kupferhülle kleiner als 15 mK.

Zwei Einzelmessungen im Abstand von drei Tagen ergaben keine messbare Drift während dieses Zeitraums, die Abweichung in der Resonanzfrequenz ist kleiner als die geschätzte Messunsicherheit von ca. 1 MHz.

## 4.2. Messung der Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz

Neben dem genauen Wert der Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz, der in Abschnitt 3.5.1 abgeschätzt wurde, ist es interessant, wie schnell der Resonator auf Temperaturänderungen reagiert. Dazu wurde die Solltemperatur der Regelung erhöht und wie bei der Driftmessung in regelmäßigen Abständen die Resonanzfrequenz gemessen. Eine solche Messung ist in Abbildung 4.3 auf Seite 52 gezeigt. Man erkennt deutlich den (schwach) gedämpften Einschwingvorgang der Temperaturregelung. Wie aus den Messdaten ersichtlich ist, reagiert der Resonator in weniger als einer Minute auf die Temperaturänderungen. Dies kann nur durch eine inhomogene Erwärmung der Luft erklärt werden, nicht durch die thermische Ausdehnung des Quarzrohres.

Abbildung 4.4 auf Seite 53 zeigt den Verlauf der Resonanzfrequenz für eine längere Zeitspanne. Der erste Abschnitt ist der gleiche wie in Abbildung 4.3 auf Seite 52. Anschließend daran wurde nochmals die Temperatur erhöht. Aus diesem und dem nachfolgenden Abschnitt ist eine langsame Drift erkennbar. Dies ist auf das Reagieren des Quarzrohres auf die Temperaturerhöhung zu erklären, das erst mit einer gewissen Verzögerung einsetzt. Die Messreihe für Abbildung 4.2 wurde 19 Stunden später gestartet. Im gleichen Maßstab wie in Abbildung 4.4 gemessen, ist dort die Resonanzfrequenz praktisch konstant und wurde als Endwert für die temperaturbedingte Drift angenommen.

Als Resultate erhält man nun für die Temperaturabhängigkeit der Resonanzfre-

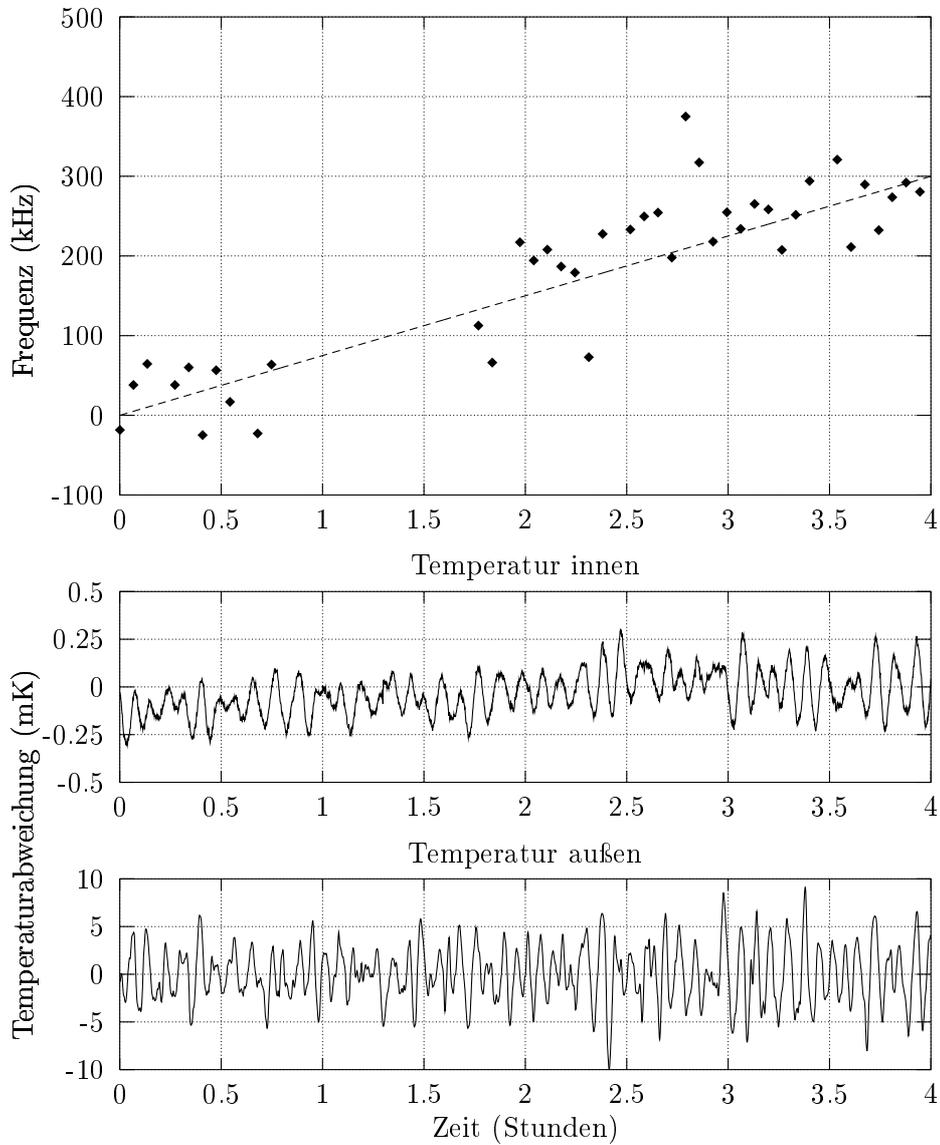


Abbildung 4.2.: Driftmessung der Resonanzfrequenz während vier Stunden, dargestellt sind die Resonanzfrequenz des Resonators und die Temperatur des inneren und äußeren Gehäuses. Die Streuung der Messwerte für die Resonanzfrequenz ist durch den Messfehler von ca. 100 kHz bedingt.

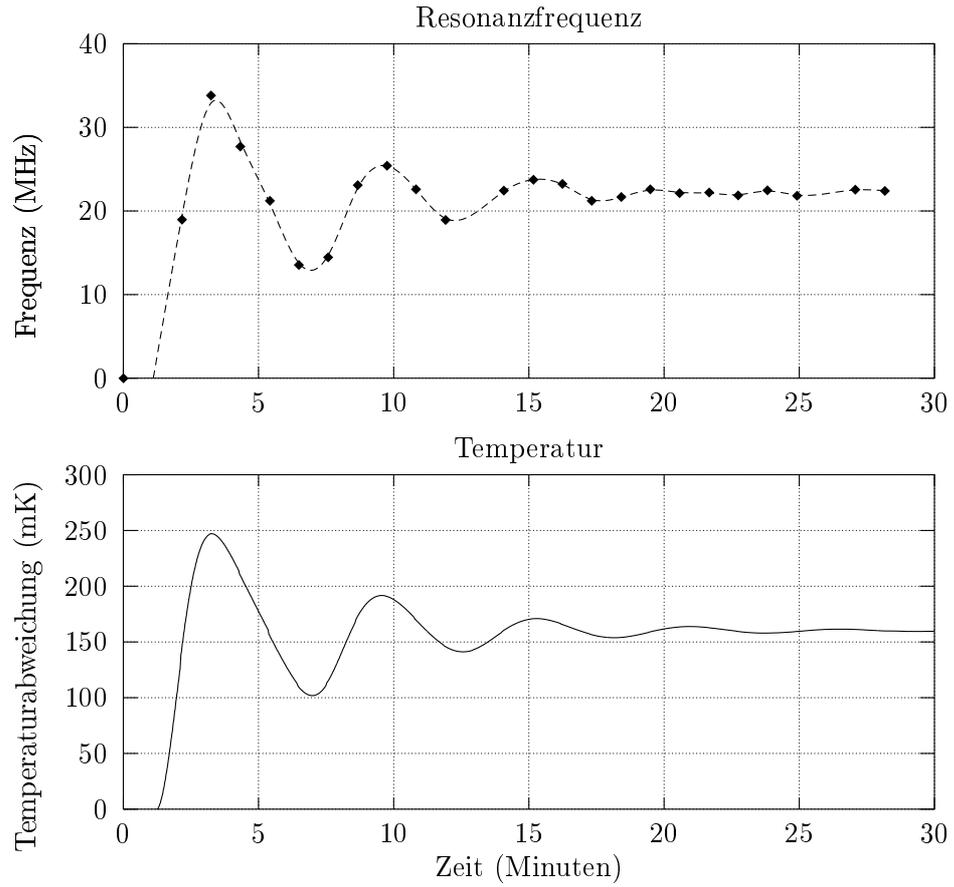


Abbildung 4.3.: Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz. Das Vorzeichen der Frequenzachse wurde so gewählt, dass eine Erhöhung der Temperatur zu einer Erhöhung der Frequenz führt.

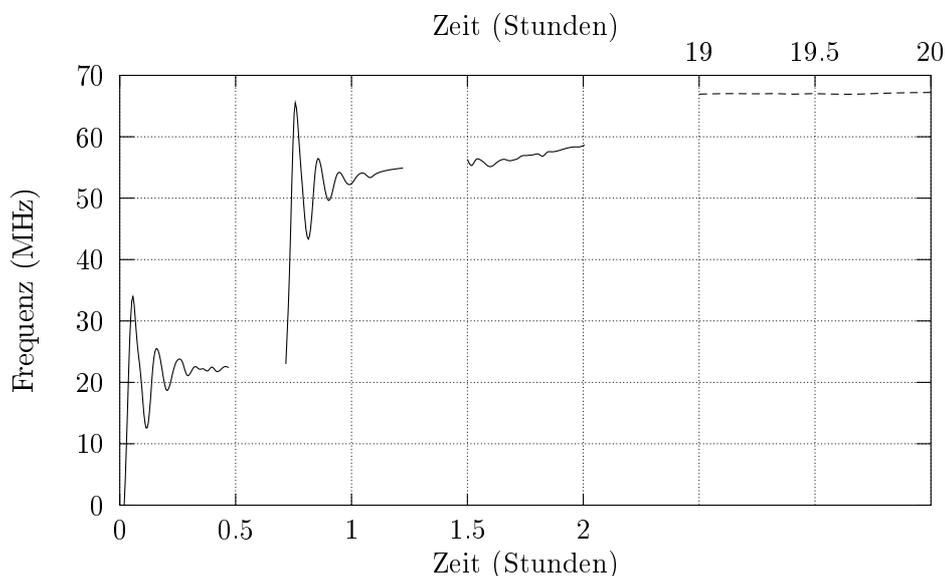


Abbildung 4.4.: Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenz. Die Temperatur wurde in zwei Schritten um insgesamt 0.38 K erhöht. Im Gegensatz zum ersten Abschnitt zeigt der zweite Abschnitt zusätzlich zu dem Einschwingvorgang eine leichte Drift, die sich im dritten Abschnitt fortsetzt. Bei der 19 Stunden später aufgenommenen Messreihe bleibt die Resonanzfrequenz praktisch konstant.

quenz für kurze Zeiten einen Wert von  $-140$  kHz/mK, für lange Zeiten einen Wert von  $-180$  kHz/mK, in guter Übereinstimmung mit dem aus dem Temperaturexpansionskoeffizienten von Quarz berechneten Wert (vgl. Abschnitt 3.5.1). Aus den Daten zu Abbildung 4.4 lässt sich weiters eine Zeitkonstante für den Temperaturengleich des Quarzrohres von ca. 2 Stunden abschätzen.

Zusammenfassend lässt sich schließen, dass der Resonator langfristig (Tage) genügend stabil ist, um eine Verstimmung der Laserfrequenz nur mithilfe eines AOM zu erlauben. Mittelfristig (Stunden) wurde eine Drift von ca. 75 kHz/h gemessen. Für kürzere Zeiten (Minuten) ist die Drift durch die Schwankungen der Temperatur gegeben. Typische Werte für Temperaturänderungen von 0.5 mK innerhalb von 3 Minuten bedeuten eine Drift von ca. 20 kHz/min. Im Vergleich mit der natürlichen Linienbreite von ca. 10 MHz für die verwendeten Dipolübergänge von  $\text{Ca}^+$  sind diese Werte völlig ausreichend, um während der Dauer eines Experimentes sicherzustellen, dass die Laser nicht von der Linie wegdriften.

Verbesserungen vor allem im kurzfristigen Bereich ließen sich erreichen, würde das

innere Gehäuse evakuiert werden. Der Resonator würde dann den kurzfristigen Temperaturschwankungen nicht mehr folgen. Driftraten von 1 kHz/min könnten erwartet werden.

### 4.3. Frequenzgang Gitterpiezo

Für das Design des Regelkreises ist es von Vorteil, die Frequenzgänge aller beteiligter Komponenten zu kennen, um eine möglichst hohe Regelbandbreite und genügend hohe Verstärkung zu erreichen. Die mechanische Drehung des Gitterwinkels durch den Piezo weist die geringste Bandbreite auf, dabei ist es für eine gute Frequenzstabilität der Diodenlaser besonders wichtig, die Länge des durch das Gitter gebildeten erweiterten Resonators konstant zu halten.

Eine Änderung des Gitterwinkels bewirkt eine Frequenzänderung des emittierten Lichts. Zur Detektion dieser Frequenzschwankungen diente das Absorptionssignal von Cäsium bei 852 nm. Die dopplerverbreiterte Linie mit einer Breite von ca. 1 GHz bzw. die dopplerefreien Übergänge der Sättigungsspektroskopie mit ca. 20 MHz bieten geeignete Flankensteigungen.

Die Messung des Frequenzganges des Gitterpiezos erfolgte mithilfe des Netzwerkanalysators. Dessen Ausgangssignal (50 mV) wurde direkt an den Gitterpiezo angelegt, das Absorptions- bzw. Sättigungssignal diente als Eingangssignal. Das Ergebnis einer solchen Messung ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Sie wurde an dem Diodenlaser um 852 nm gewonnen und ist im Wesentlichen auch auf die gleich gebauten anderen Diodenlaser übertragbar.

Etwas oberhalb von 5 kHz ist eine deutliche Resonanz zu sehen. Die Phase ändert sich dabei um  $-180^\circ$ . Zwischen 10 kHz und 20 kHz sind viele weitere, schwächere Resonanzen zu erkennen, darüber reagiert der Gitterpiezo kaum mehr. Im Bereich bis ca. 8 kHz erinnert der Frequenzgang an den eines harmonischen Oszillators, jedoch sind unterhalb von 5 kHz im Amplitudengang zusätzliche Strukturen zu erkennen, die an dispersive Signale erinnern und sich im Phasengang als Einbuchtungen bemerkbar machen.

Ein einfaches Modell (siehe Abbildung 4.6 auf der nächsten Seite) soll helfen, diese Strukturen besser zu verstehen. Das Gitter selbst wurde als gedämpfter harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz  $\omega_1$  und Dämpfungskonstante  $d_1$  modelliert. Mittels Federkräfte sind weitere harmonische Oszillatoren angekoppelt. Die Einwirkung des Gitterpiezos wird durch eine zwischen den Massen angreifende Kraft dargestellt. Aus dem sich ergebenden linearen Differentialgleichungssystem lässt sich die Bewegung des Gitters bei einer harmonischen, antreibenden Kraft berechnen.

Abbildung 4.7 auf Seite 56 zeigt das Ergebnis der Simulation gemeinsam mit den gemessenen Daten nach Anpassung der Parameterwerte durch eine Fitroutine. Der Phasengang zeigt mit zunehmender Frequenz einen zusätzlichen Phasenschub, der durch das

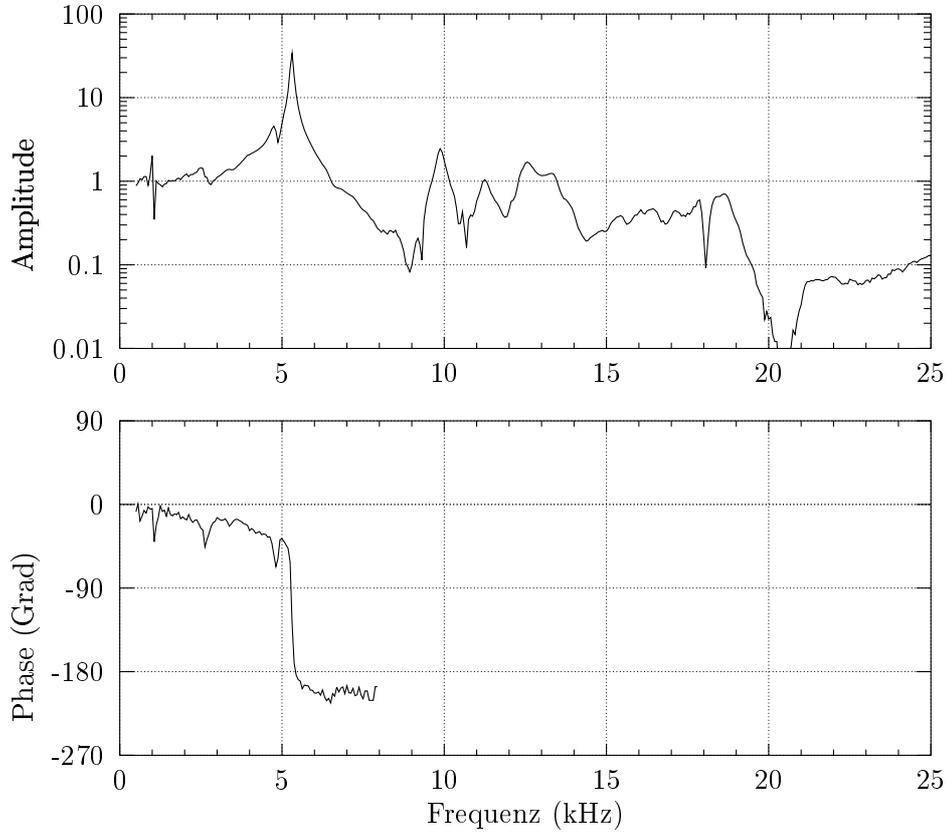


Abbildung 4.5.: Frequenzgang Piezo

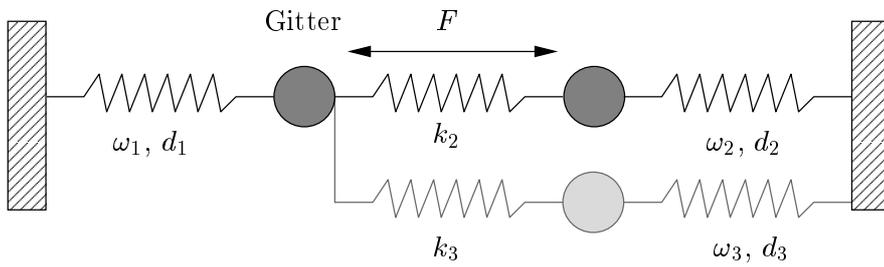


Abbildung 4.6.: Modell für die mechanischen Eigenschaften des Gitterpiezos

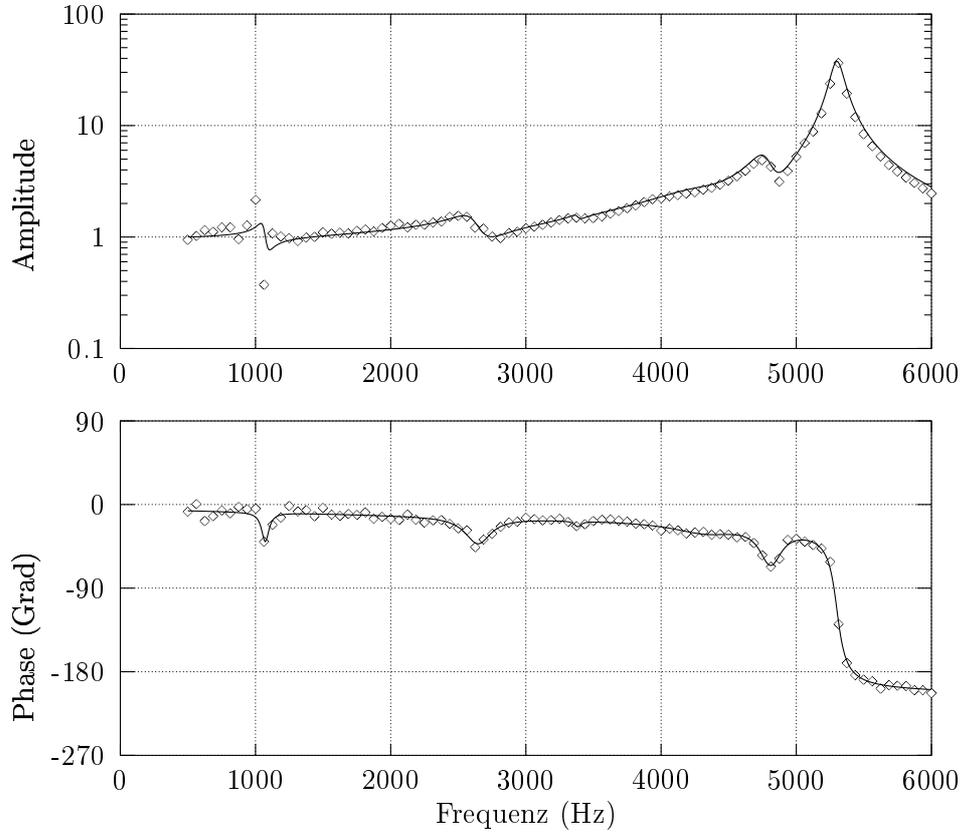


Abbildung 4.7.: Gemessener und simulierter Frequenzgang Gitterpiezo

einfache lineare Modell nicht beschrieben wird. Die bei großer Auslenkung besonders deutliche Hysterese des Gitterpiezo kann für diesen Effekt verantwortlich gemacht werden. In der Rechnung wurde dies durch einen nachträglich hinzugefügten, linear mit der Frequenz wachsenden Phasenschub berücksichtigt. Ansonsten wird die Messung durch das Modell sehr gut beschrieben.

Durch Anpassen des simulierten Frequenzganges an die Messdaten lassen sich auch quantitative Informationen über die Güte der beteiligten mechanischen Resonanzen erhalten. Einem gedämpften harmonischen Oszillator (GERTHSEN und VOGEL, 1997)

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.1)$$

mit Resonanzfrequenz

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - d^2} \simeq \omega_0 \text{ für geringe Dämpfung } d \ll \omega_0 \quad (4.2)$$

wird als Maß für die Dämpfung die Güte

$$Q = \frac{\omega}{2d} \simeq \frac{\omega_0}{2d} \quad (4.3)$$

zugeordnet, die für geringe Dämpfung zudem ungefähr mit der Resonanzüberhöhung

$$G_{\max} = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \simeq Q \quad (4.4)$$

übereinstimmt.

Die Ergebnisse für die in Abbildung 4.7 eingezeichnete Kurve sind in Tabelle 4.1 eingetragen. Nur die aus den vorliegenden Daten einigermaßen verlässlich ermittelbaren Werte wurden in diese Tabelle aufgenommen.

Frequenz	Güte
5400 Hz	54
2600 Hz	12
4800 Hz	27

Tabelle 4.1.: Frequenzen und Güten einiger der beteiligten mechanischen Resonanzen (vgl. Abbildung 4.7)

Für die Regelung am bedeutendsten ist die Resonanz bei 5400 Hz. Durch die starke Resonanzüberhöhung um den Faktor 54 muss die Verstärkung des Reglers niedrig gehalten werden, damit es nicht zu Instabilitäten und Oszillationen bei dieser Frequenz kommt. Oberhalb dieser Frequenz werden Störungen nicht ausgeglichen, sondern verstärkt.

#### 4.4. Akustische Störungen

Die an das Gitter ankoppelnde Resonanzen bei 1100 Hz, 2600 Hz, 3400 Hz und 4800 Hz (siehe Abschnitt 4.3 auf Seite 54) sind zwar für die Regelung unwesentlich, jedoch koppeln akustische Störungen bei diesen Frequenzen gut an das Gitter an und bewirken somit Frequenzschwankungen bei diesen Frequenzen.

Um dies zu überprüfen, wurden weitere Messungen an den Diodenlasern bei 850 nm und 854 nm durchgeführt. Die Frequenzstabilisierung der Laser wurde in Betrieb genommen, jedoch wurde durch absichtliche Vergrößerung des Offsets des Fehlersignals erreicht, dass die Frequenzregelung der Laser nicht auf die Mitte der Resonanz des optischen Resonators erfolgte, sodass sich Frequenzschwankungen erheblich stärker in Änderungen der Transmission durch den Resonator bemerkbar machten. Über einen

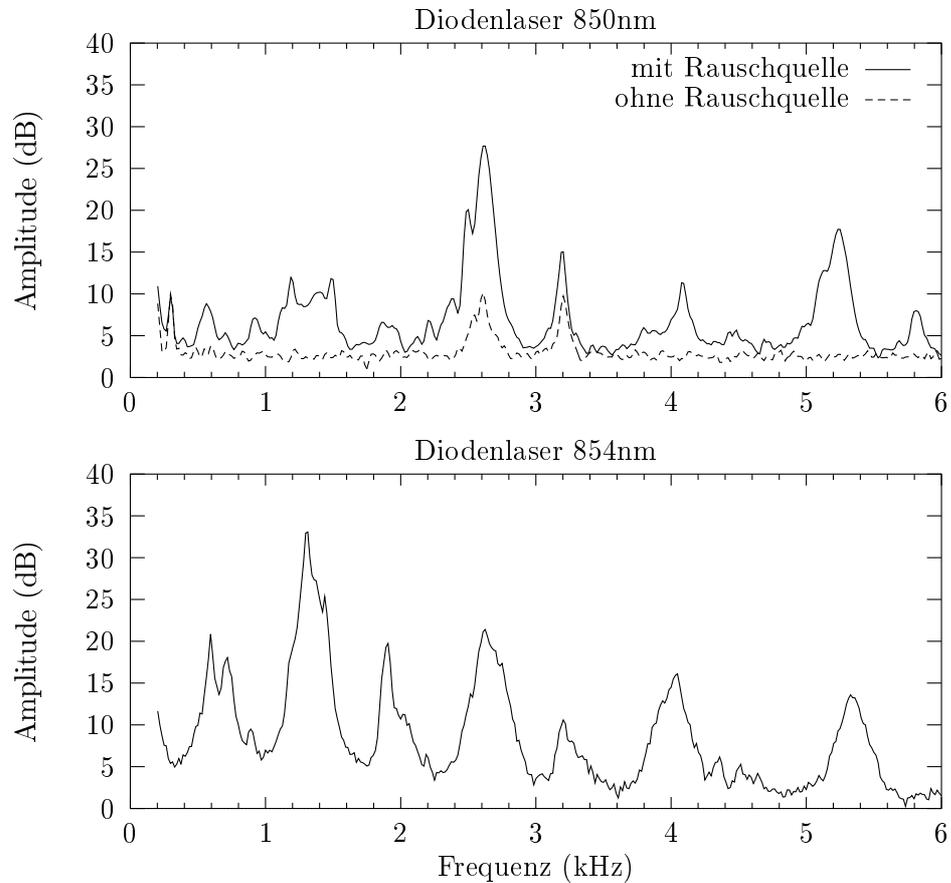


Abbildung 4.8.: Einkopplung Akustik

Lautsprecher wurde der ohnehin vorhandene Lärmpegel zusätzlich verstärkt. In Abbildung 4.8 ist das Frequenzspektrum der Transmission durch den Resonator dargestellt. Da das anregende Frequenzspektrum sehr ungleichmäßig war und zudem die Regelung aktiv war, sind die Größen der Resonanzen nur als sehr ungefähre Anhaltspunkte für die Stärke der Ankopplung zu nehmen.

Beim Diodenlaser mit 850 nm sind Resonanzen bei 1180 Hz, 1500 Hz, 2600 Hz, 3200 Hz, 4100 Hz und 5200 Hz zu erkennen. Auch ohne zusätzliche Rauschquelle sind bei 2600 Hz und 3200 Hz Störungen messbar. Die Messung am Diodenlaser bei 854 nm ergibt im Wesentlichen das gleiche Bild. Alle Resonanzen des Lasers bei 850 nm sind, manchmal etwas verschoben, ebenfalls zu finden. Es erscheint jedoch, als wäre bis auf die Resonanz bei 5300 Hz alle anderen bei Vielfachen von 650 Hz zu finden. Möglicherweise sind dies die Resonanzen der Luft in dem Gehäuse der Diodenlaser.

## 4.5. Messungen zur kurzfristigen Stabilität

Zur Messung der kurzfristigen Stabilität stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Einerseits wurde das Licht eines Lasers in einen weiteren optischen Resonator eingekoppelt. Nach Abschnitt 3.2.1 (insbesondere Gleichung (2.16)) werden in der Nähe einer Resonanz Frequenzschwankungen in Intensitätsschwankungen des transmittierten Lichts umgesetzt. Intensitätsschwankungen des einfallenden Lichts, sich ändernde Einkopplung oder Hintergrundlicht führen jedoch ebenfalls zu Intensitätsschwankungen im detektierten transmittierten Licht.

Eine andere Möglichkeit bietet die Untersuchung des Fehlersignals der Pound-Drever-Hall-Regelung, das (in der Nähe des Nulldurchgangs) proportional zur Frequenzabweichung des Lasers ist. Hiermit können jedoch nur Frequenzschwankungen des Lasers bezüglich des Referenzresonators erfasst werden. Insbesondere die durch den Resonator verursachte Drift kann auf diese Weise nicht erfasst werden.

Nachdem mehrere identische Lasersysteme zur Verfügung stehen, bietet die Untersuchung des Schwebungssignals zweier Laser eine besonders gute Möglichkeit zur Stabilitätsmessung, die gegen Störungen weitgehend unempfindlich ist.

### 4.5.1. Schwebungsmessungen

Hierzu wurde der Laser bei 850 nm durch Änderung des Gitterwinkels mithilfe der Mikrometerschraube und Anpassung der Temperatur auf eine Wellenlänge von 854 nm gebracht und mit dem Laser bei 854 nm an einem 50:50-Strahlteiler überlagert. Mit einer Photodiode gleicher Bauart, wie sie auch für die Frequenzstabilisierung verwendet wird, (vgl. Abschnitt 3.3.2), kann das Schwebungssignal mit einer Frequenz bis zu ca. 1 GHz detektiert werden. Mithilfe eines Spektrumanalysators (bis 4 GHz) oder eines Netzwerkanalysators (berechnet Spektrum mittels FFT des Eingangssignals) kann dann das Spektrum des Schwebungssignals direkt betrachtet werden oder mittels eines digitalen Speicheroszilloskops das Schwebungssignal selbst für weitere Untersuchungen aufgezeichnet werden.

Um das Schwebungssignal zu finden, müssen die Laser zuerst mithilfe des Wellenlängenmessgerätes (Genauigkeit ca.  $\pm 0.001$  nm) auf die gleiche Wellenlänge gebracht werden. Ein Frequenzunterschied von 1 GHz entspricht bei 850 nm nur einer Wellenlängendifferenz von 0.0024 nm. Dann werden die Frequenzstabilisierungen in Betrieb genommen und durch schrittweises Versetzen der Frequenz eines Lasers um eine Mode des Resonators können dann die Laser meist schnell auf die gleiche Frequenz gebracht werden.

Da die beiden Diodenlaser auf denselben optischen Resonator stabilisiert sind, werden Frequenzschwankungen, die durch den Resonator verursacht werden, auf diese Weise nicht erfasst.

Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen Spektren des Schwebungssignals ohne aktive

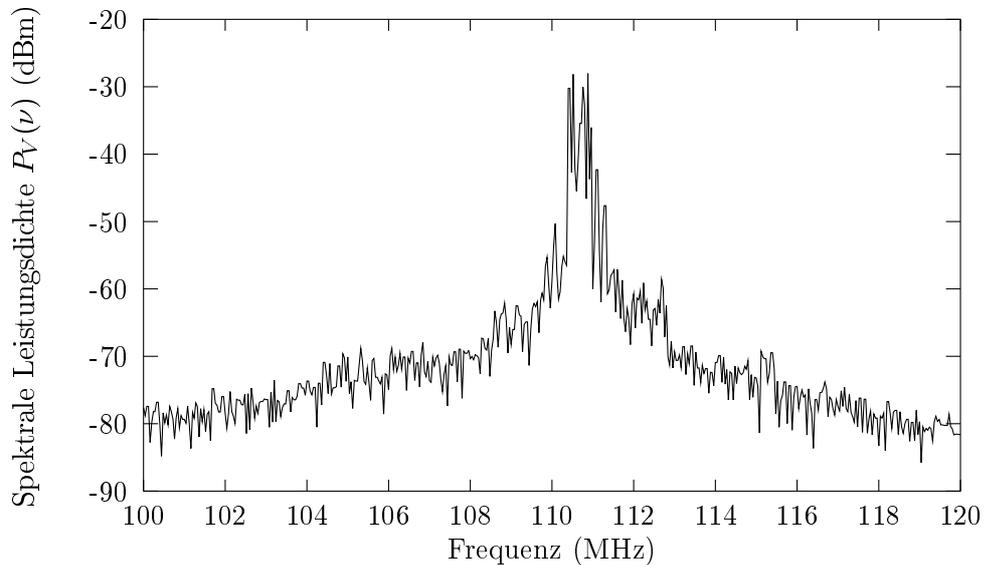


Abbildung 4.9.: Spektrum Schwebungssignal zweier nur gitterstabilisierter Diodenlaser bei 854 nm, gemessen mit Spektrumanalysator (10 ms/div, 100 kHz Bandbreite).

Frequenzstabilisierung der Laser. Starkes  $1/f$ -Frequenzrauschen lässt die Schwebungsfrequenz innerhalb kurzer Zeit (einige ms) um mehrere MHz schwanken. Die beobachtete Linienbreite hängt bei dominierendem  $1/f$ -Frequenzrauschen stark von der Messzeit ab. Selbst bei minimaler Zeitdauer (10 ms/div) für die Erfassung eines Spektrums durch den Spektrumanalysator lässt sich damit nicht auf die minimale Linienbreite schließen. Aus diesem Grund wurde das Schwebungssignal mithilfe eines digitalen Speicheroszilloskops aufgezeichnet und daraus das Spektrum berechnet. Dadurch lassen sich in wesentlich kürzerer Zeit (ca. 0.1 ms) Spektren mit genügend hoher Auflösung erfassen. Jedoch insbesondere eine starke Frequenzmodulation bei ca. 20 kHz durch die Hochspannungsversorgung des Gitterpiezos lässt die Frequenz des Schwebungssignals selbst innerhalb dieser kurzen Zeitspanne um ca. 2 MHz schwanken. Diese Frequenzschwankungen wurden vor der Berechnung des Spektrums von Abbildung 4.10 auf der nächsten Seite herausgerechnet. Für kurze Messzeiten wird das Spektrum durch eine Lorentz-Kurve mit einer vollen Halbwertsbreite von 300 kHz gut beschrieben. Linienbreiten von mehreren MHz (vgl. GLATZEL, 1996) schon für Messzeiten länger als 1 ms sind jedoch wesentlich zutreffender.

Die Abbildungen 4.11, 4.12 und 4.13 zeigen Spektren bei 700 MHz bzw. 94 kHz, bei denen die Laser auf zwei benachbarte Moden bzw. dieselbe Mode des Resonators

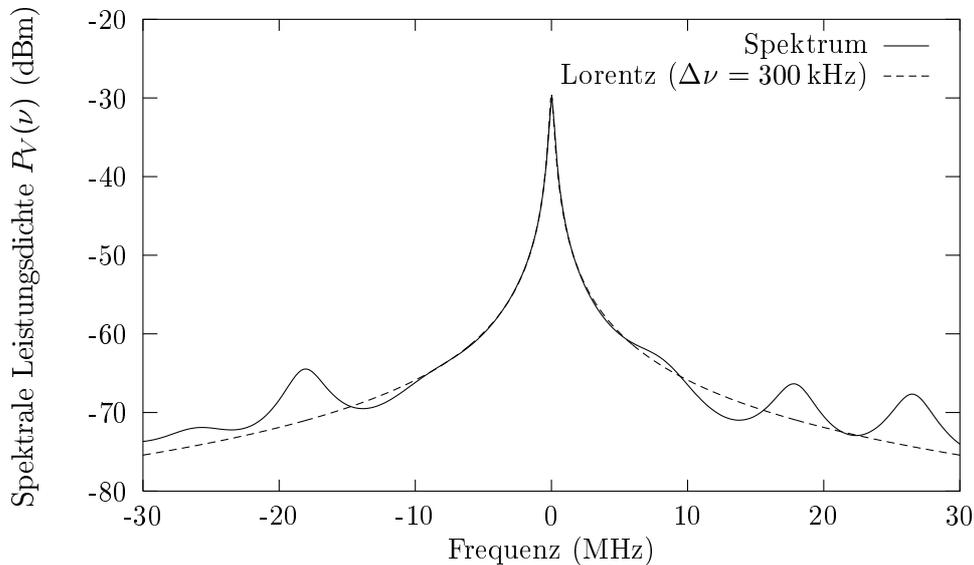


Abbildung 4.10.: Spektrum Schwebungssignal zweier nur gitterstabilisierter Diodenlaser bei 73 MHz, aufgezeichnet mit Speicheroszilloskop (250000 Datenpunkte in 0.125 ms). Vor Berechnung des Spektrums wurde eine starke Frequenzmodulation bei 20 kHz, die durch die Hochspannungsversorgung des Gitterpiezos verursacht wurde, herausgerechnet. Das Spektrum wird für kurze Messzeiten gut durch eine Lorentz-Kurve mit einer Halbwertsbreite von 300 kHz beschrieben.

stabilisiert wurden. Auch wenn beide Laser auf die gleiche Mode des Resonators stabilisiert werden, liegt die Frequenz des Schwebungssignals typischerweise bei ca. 50 kHz, da aufgrund von Offsets die Regelung nicht genau auf die Linienmitte des Resonators erfolgt. Offsets entstehen nicht nur bei der Generierung des Fehlersignals (siehe Abschnitt 2.4.2), sondern auch im Regelzweig für den Gitterpiezo. Dadurch dass die Regelung Frequenzabweichungen nicht vollständig ausgleicht, sondern nur um den Faktor der Regelverstärkung vermindert, erfolgt ebenfalls eine Verschiebung der Schwebungsfrequenz, falls der Regelausgang des Gitterpiezos nicht gerade Null ist. Die Gitterpiezos selbst besitzen einen Widerstand von ca. 100 kΩ, sodass die angelegte Offsetspannung von bis zu 150 V eine Rückwirkung auf den Regelverstärker zeigt.

Abbildung 4.11 auf der nächsten Seite zeigt das Leistungsspektrum über einen Frequenzbereich von 2.5 MHz. Ebenfalls eingezeichnet ist eine Lorentz-Kurve mit einer vollen Halbwertsbreite von 6 kHz. Wegen Gleichung (1.46) und (1.58) ist das Leistungsspektrum des Schwebungssignal für Frequenzen größer als die Linienbreite proportional

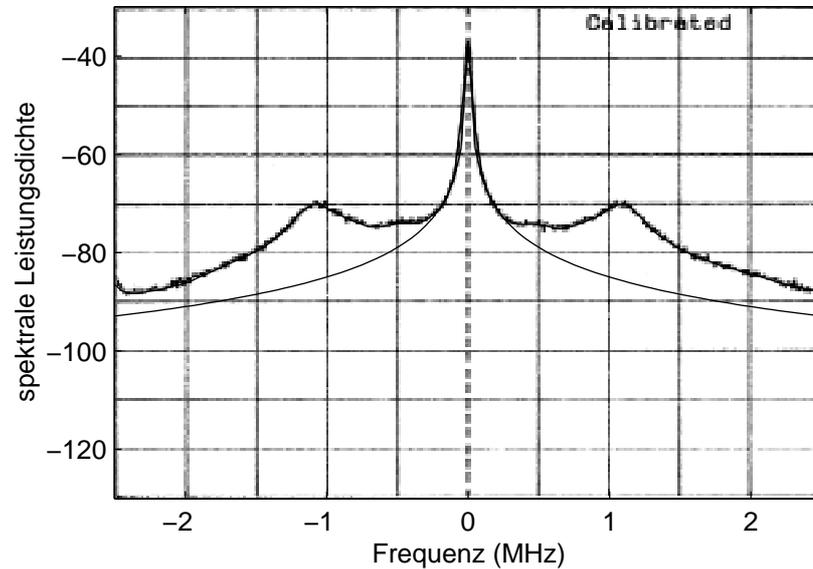


Abbildung 4.11.: Spektrum Schwebungssignal bei 700 MHz, gemessen mit Spektrumanalysator (30 kHz Bandbreite).

zum Spektrum der relativen Phasenabweichungen. Das Spektrum zeigt zusätzlich zu der zentralen, Lorentz-förmigen Linie eine breites Plateau mit weitgehend weißem Phasenrauschen. Knapp oberhalb von 1 MHz sind die durch den Stromzweig der Regelung erzeugten Seitenbänder zu erkennen. Daraus lässt sich eine Regelbandbreite von 1 MHz für den schnellen Zweig der Frequenzstabilisierung ablesen. Das Plateau inklusive der Seitenbänder liegt ca. 35 dBm unter dem Träger (mit Bandbreite  $B = 30$  kHz gemessen) und ist ca.  $\Delta\nu_P = 3$  MHz breit. Der Energieanteil außerhalb des Trägers ist deshalb  $10^{-3.5} \Delta\nu_P / B \approx 3.1\%$ .

Die Abbildungen 4.12 und 4.13 zeigen den zentralen Bereiche des Spektrums des Schwebungssignals. Die Linienform ist nicht exakt Lorentz-förmig, wie es bei weißem Frequenzrauschen zu erwarten wäre. Oberhalb von 5 kHz weicht das gemessene Spektrum von den eingezeichneten Lorentz-Kurven ab. Ursache dafür ist der Frequenzgang des Gitterpiezos (vgl. Abschnitt 4.3), da oberhalb dieser Frequenz Störungen nicht mehr ausgeglichen, sondern stattdessen aufgeprägt werden. Bei ca. 20 kHz erkennt man Seitenbänder, die durch die Hochspannungsversorgungen für die Gitterpiezos verursacht werden und trotz Filter und aktiver Regelung nicht völlig ausgeglichen werden können. Die Stärke dieser Seitenbänder hängt u.a. auch von den Einstellungen der Frequenzregelungen ab.

Die Zuordnung einer Linienbreite zu diesem nicht Lorentz-förmigen Spektrum ist

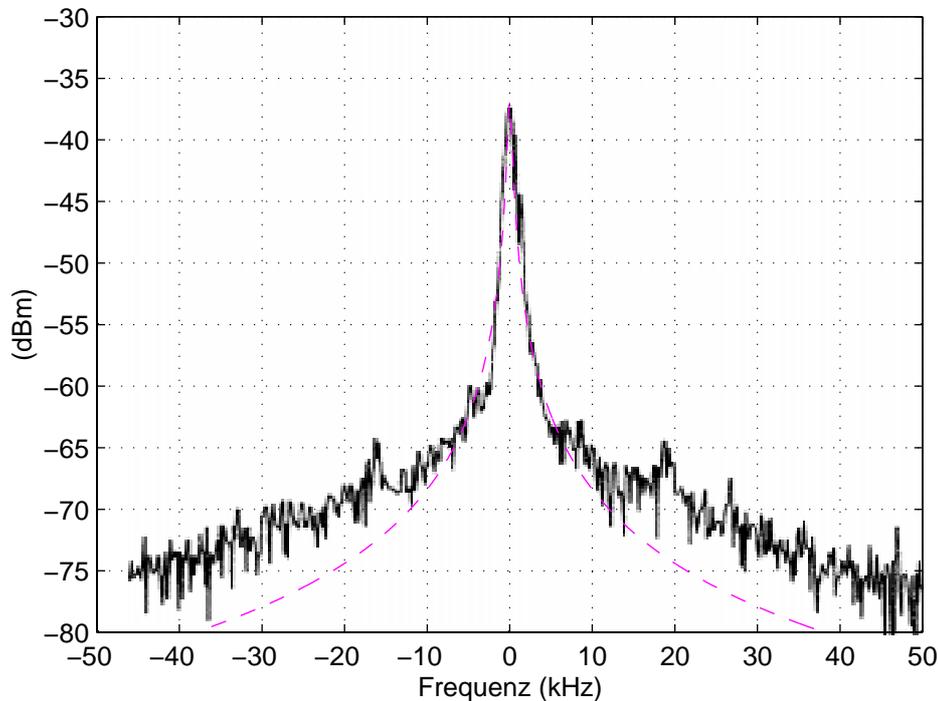


Abbildung 4.12.: Spektrum Schwebungssignal bei 700MHz, gemessen mit Spektrumanalysator (500 ms/div, 1 kHz Bandbreite). Ebenfalls eingezeichnet ist eine Lorentz-Kurve mit einer vollen Halbwertsbreite von 540 Hz

nicht eindeutig. Die Angabe der vollen Halbwertsbreite berücksichtigt nicht die Abweichungen von der Idealform außerhalb des zentralen Bereichs. Zum Abschätzen des Einflusses der Seitenbänder oberhalb von 5 kHz wurde an das Spektrum von Abbildung 4.13 auf der nächsten Seite (vgl. auch Bildunterschrift dazu) eine Lorentz-Kurve angepasst, wobei darauf geachtet wurde, dass die Lorentz-Kurve ein Signal mit gleicher Leistung wie das Schwebungssignal repräsentiert. Damit erhält man für die Linienbreite des Schwebungssignals einen Wert von 630 Hz. Im zentralen Bereich bis ca. 5 kHz, der ca. 10 Linienbreiten umfaßt, wird das Spektrum jedoch sehr gut durch eine Lorentz-Kurve mit einer vollen Halbwertsbreite von 540 Hz beschrieben. Unter der Voraussetzung von gleichem, weißen Frequenzrauschen der beiden Laser ist die Linienbreite eines Lasers gerade die Hälfte der Linienbreite des Schwebungssignals (vgl. Abschnitt 1.2.8). Für Messzeiten bis zu einer Sekunde erhält man somit für die Linienbreite eines Lasers (bzgl. Referenzresonator) einen Wert von minimal 315 Hz. Durch den Resonator verursachte Frequenzschwankungen werden dabei nicht erfasst.

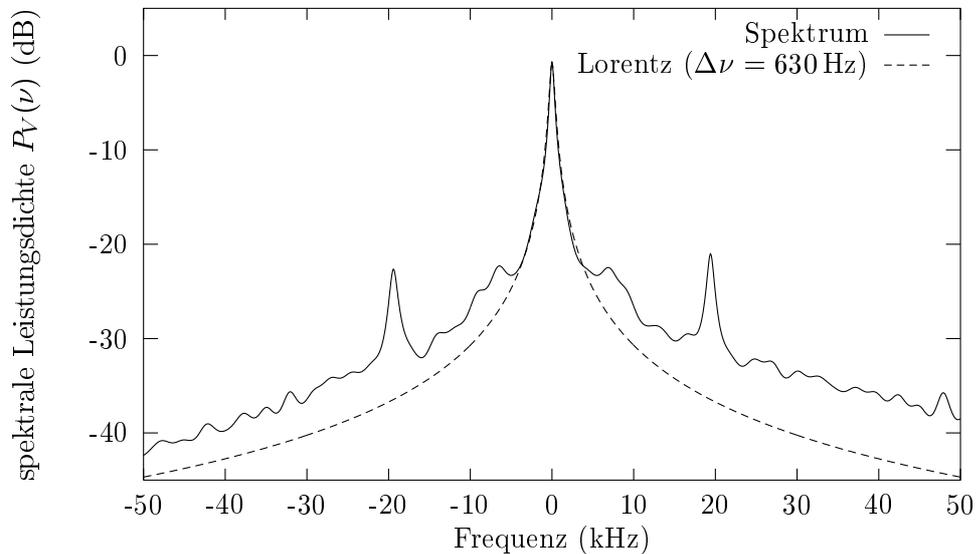


Abbildung 4.13.: Spektrum des Schwebungssignals bei 94kHz, berechnet aus dem mit Speicheroszilloskop aufgenommenen Signal. Ebenfalls eingezeichnet wurde eine Lorentz-Kurve mit einer vollen Halbwertsbreite von 630 Hz. Zur Anpassung der Lorentz-Kurve wurden nur die Mittenfrequenz und die Halbwertsbreite variiert, die Normierung wurde so gewählt, dass das gemessene Spektrum und die Lorentz-Kurve ein Signal mit gleicher mittlerer Leistung repräsentieren. Wird als weiterer Parameter auch die maximale Höhe der Lorentz-Kurve variiert, so erhält man eine Halbwertsbreite von 540 Hz.

#### 4.5.1.1. Messung des freien Spektralbereichs des Resonators

Die Messung der Schwebungsfrequenz der Laser, wenn beide auf benachbarte Moden des Resonators stabilisiert sind, ermöglicht eine genaue Ermittlung des freien Spektralbereichs des Resonators. Wie aber im vorhergehende Abschnitt gezeigt wurde, erfolgt die Stabilisierung nicht genau auf die Linienmitte. Eine Verbesserung der Genauigkeit wird dadurch erreicht, dass die Schwebungsfrequenz für verschiedene Abstände gemessen wird. Ein konstanter Offset geht dann nicht in die Berechnung des freien Spektralbereichs ein. Der Offset hängt zudem deutlich von der am Piezoausgang anliegenden Spannung ab. Wird dafür gesorgt, dass dieser immer nahe bei Null liegt, wird die Reproduzierbarkeit stark erhöht. Liegt die Unsicherheit einer Einzelmessung der Schwebungsfrequenz auf diese Weise bei ca. 10 kHz, so lässt sich aus einer Messreihe mit Abständen bis zu fünf Moden der freie Spektralbereich mit einem Fehler von ca. 3 kHz

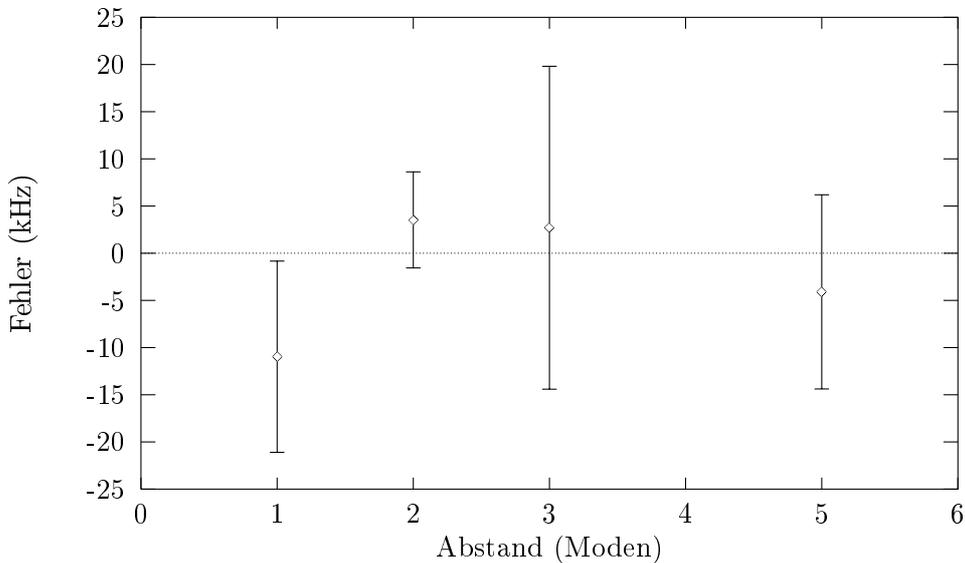


Abbildung 4.14.: Verbleibender Fehler bei der Bestimmung des freien Spektralbereichs des Resonators aus Einzelmessungen der Schwebungsfrequenz, wenn die Laser auf verschieden weit entfernte Moden stabilisiert werden.

zu 700.306 MHz bestimmen. Die Auftragung des unerklärten Fehlers (Abbildung 4.14) zeigt, dass dieser im Rahmen des Einzelfehlers liegt.

#### 4.5.2. Transmission durch optischen Resonator

Hierzu wurde das Licht des Diodenlasers bei 850 nm in einen weiteren optischen Resonator (freier Spektralbereich 1.4 GHz, Linienbreite ca. 2 MHz, wenn von einer gleichen Finesse wie bei dem vermessenen Resonator ausgegangen wird) eingekoppelt. Die Frequenz des Lasers wurde so eingestellt, dass die Transmission bei ungefähr der Hälfte des Maximums lag. Das von einer schnellen Photodiode detektierte Transmissionssignal wurde mit einem digitalen Speicheroszilloskop aufgezeichnet. Durch diese Messungen können, im Gegensatz zur Schwebungsmessung, auch Frequenzschwankungen erfasst werden, die durch den Resonator verursacht werden.

Das Transmissionssignal enthält wesentliche Frequenzanteile bis zu einigen MHz. Bei der Aufzeichnung durch ein Digitaloszilloskop mit niedrigeren Abtastraten ist das Nyquist-Kriterium (Abtastrate muss mindestens doppelt so groß wie die höchste vorkommende Frequenz sein) nicht erfüllt, deshalb wurde beim digitalen Speicheroszilloskop der „High Resolution“-Modus zur Datenaufnahme verwendet, bei dem für jeden abgespeicherten Datenpunkt der Mittelwert über mehrere Abtastwerte gebildet wird.

Aus den aufgezeichneten Daten wurden dann die Leistungsspektren berechnet, wie sie in den Abbildungen 4.9 bis 4.17 dargestellt sind.

Ohne aktive Regelung dominiert  $1/f$ -Frequenzrauschen (vgl. Abbildung 4.15 auf der nächsten Seite), im Gegensatz zu weißem Frequenzrauschen mit aktiver Regelung.

Wie besonders aus Abbildung 4.16 auf Seite 68 zu erkennen ist, sind dem weißen Frequenzrauschen zusätzliche Störungen bei scharf definierten Frequenzen überlagert. Die Störungen bei 50, 100, 150 und 250 Hz werden z.T. durch Brummschleifen im Aufbau zur Frequenzstabilisierung verursacht. Am Ausgang des Hochspannungsverstärkers, der zur Ansteuerung des Piezos des Resonators dient, ist ein schaltbarer Tiefpass (Grenzfrequenz ca. 1 Hz) angebracht. Messungen mit ausgeschaltetem Tiefpass ergaben stark erhöhtes Frequenzrauschen unterhalb von ca. 5 kHz, insbesondere bei den Vielfachen der Netzfrequenz. Unklar ist, zu welchem Anteil der Hochspannungsverstärker bei eingeschaltetem Tiefpass noch für Störungen bei diesen Frequenzen verantwortlich ist.

Vor allem bei 700 Hz, 2.6 kHz und 3.4 kHz koppeln akustische Störungen ein (vgl. Abschnitt 4.4). Bei vermindertem Hintergrundlärm erkennt man unterhalb von 5 kHz eine deutliche Verringerung der Frequenzschwankungen, da dort mithilfe des Gitterpiezos Störungen ausgeregelt werden können (vgl. Abschnitt 4.3).

Direkte Beobachtung des Transmissionssignals über längere Zeiträume (bis zu einer Minute) zeigt typische Driftraten von ca. 1 MHz/min, wie sie auch mittels anderer Methoden (vgl. BECHTER (1998)) gemessen wurden. Der verwendete Resonator reagiert empfindlich auf äußere Störungen wie z.B. Luftdruckschwankungen, die u.a. beim Öffnen und Schließen der Labortür entstehen. Frequenzabweichungen von einigen MHz innerhalb weniger Sekunden sind möglich. Meist kehrt die Resonanzfrequenz nach Abklingen der Störung ungefähr wieder auf den ursprünglichen Wert zurück. Typisch sind auch Frequenzsprünge, wie sie möglicherweise von der Relaxation mechanischer Spannungen im Piezo verursacht werden. Die Erfahrung zeigte auch, dass die Drift vermindert ist, falls für längere Zeit die Spannung am Gitterpiezo nicht verändert wurde.

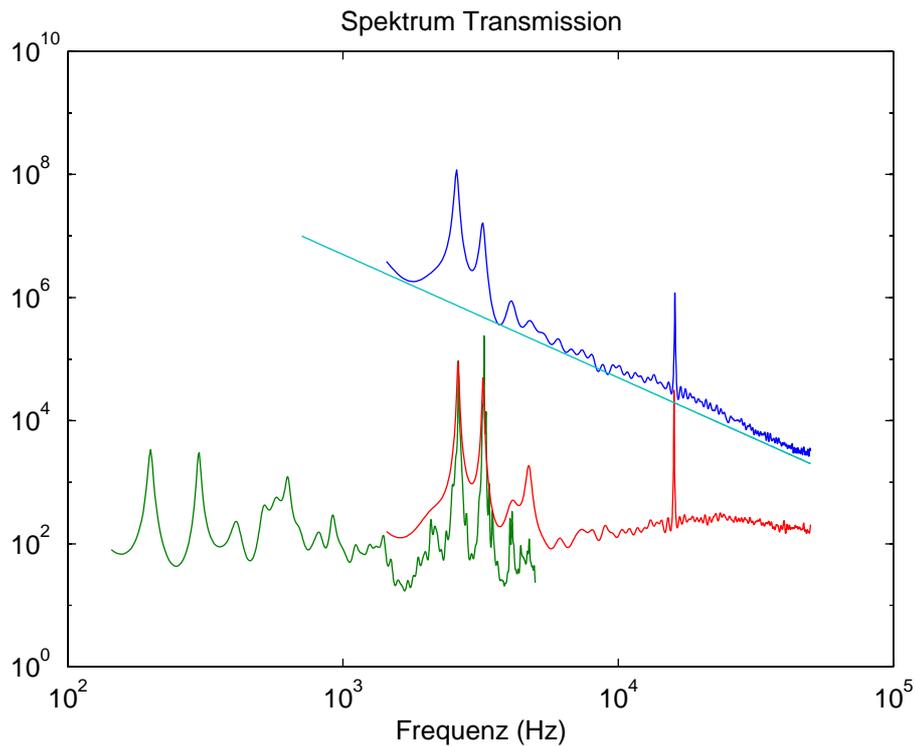


Abbildung 4.15.: Spektrum der Transmission durch einen weiteren optischen Resonator, mit und ohne (obere Kurve) aktiver Regelung. Ohne aktive Regelung ist  $1/f$ -Frequenzrauschen dominierend, das erst ab mindestens 100 kHz auf das Niveau des im Wesentlichen weißen Frequenzrauschens mit aktiver Regelung absinkt.

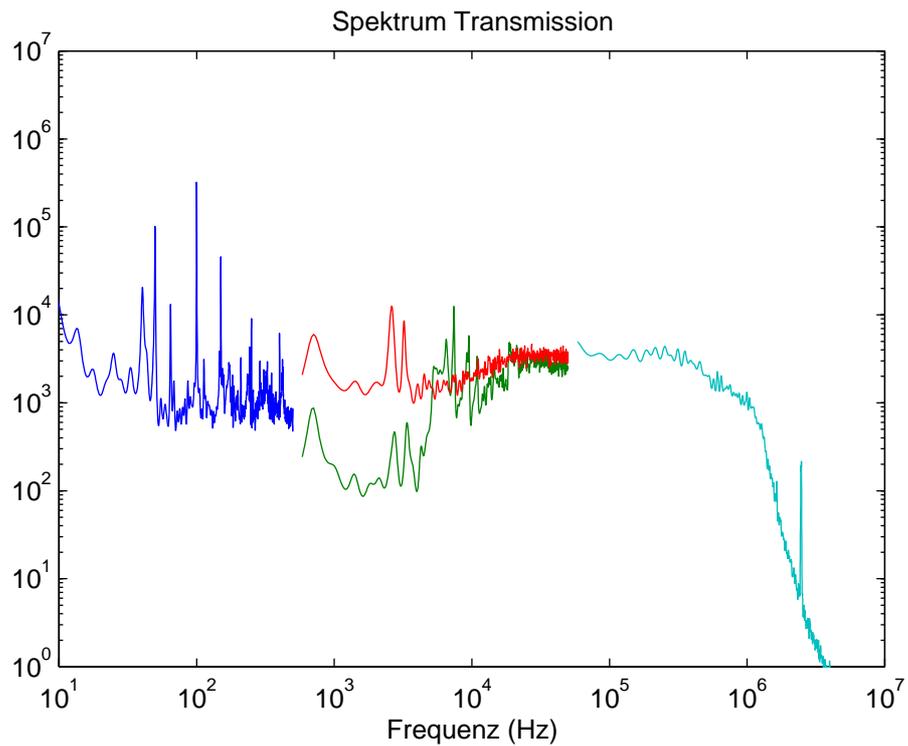


Abbildung 4.16.: Das Spektrum der Transmission durch einen weiteren optischen Resonator zeigt im Wesentlichen weißes Frequenzrauschen. Bei Vielfachen von 50 Hz sowie bei Frequenzen, bei denen akustische Störungen gut einkoppeln, ist ein verstärktes Frequenzrauschen erkennbar. Die Absenkung zwischen 500 Hz und 5 kHz bei einer der Kurven ergibt sich bei stark verminderter Geräuschkulisse (siehe auch Abbildung 4.17 auf der nächsten Seite). Ab ca. 1 MHz ist das Tiefpassverhalten des optischen Resonators deutlich ersichtlich.

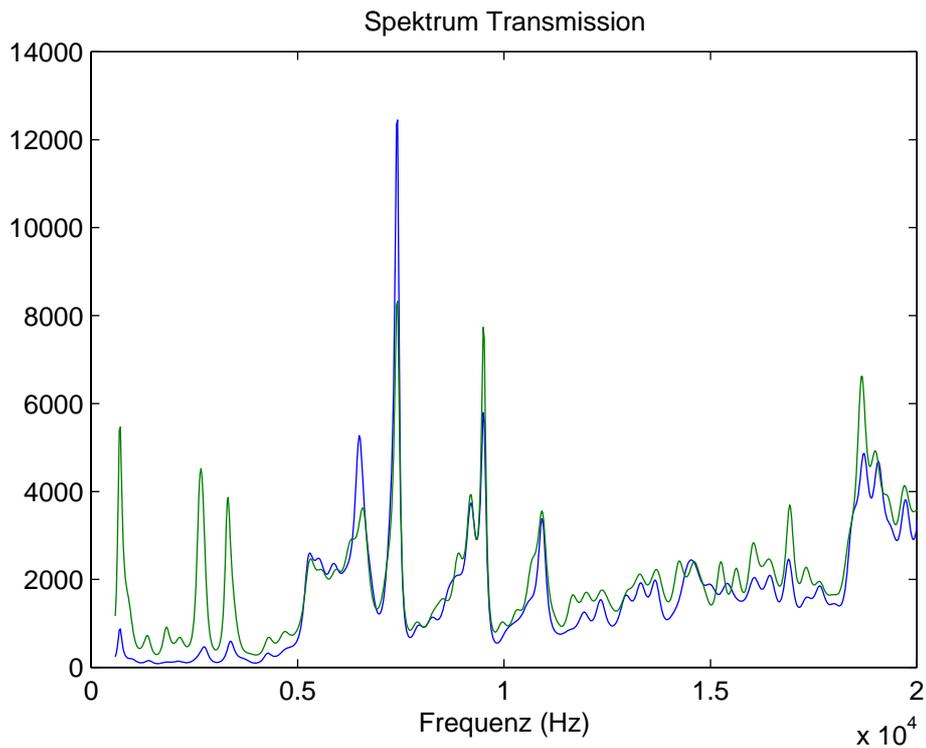


Abbildung 4.17.: Spektrum des Transmissionssignals. Gezeigt ist ein Ausschnitt aus Abbildung 4.16 auf der vorherigen Seite mit linearem Maßstab. Alle Lärmquellen in der Umgebung wurden bei einer der Messungen ausgeschaltet. Dadurch verringert sich unterhalb von 5 kHz das Frequenzrauschen wesentlich, insbesondere die Resonanzen bei 700Hz, 2600Hz und 3400Hz werden kaum mehr angeregt. Oberhalb von 5 kHz sind nur minimale Unterschiede zwischen den Kurven zu erkennen. Aufgrund des Frequenzganges des Gitterpiezos werden die Störungen erst durch die Regelung aufgeprägt.

### 4.5.3. Allanvarianz

Aus den gleichen Daten, die bei der Aufzeichnung der Transmission durch einen weiteren optischen Resonator (Abschnitt 4.5.2) gewonnen wurde, lässt sich die Allanvarianz (vgl. Abschnitt 1.2.7) berechnen. Das Resultat ist in Abbildung 4.18 gezeigt.

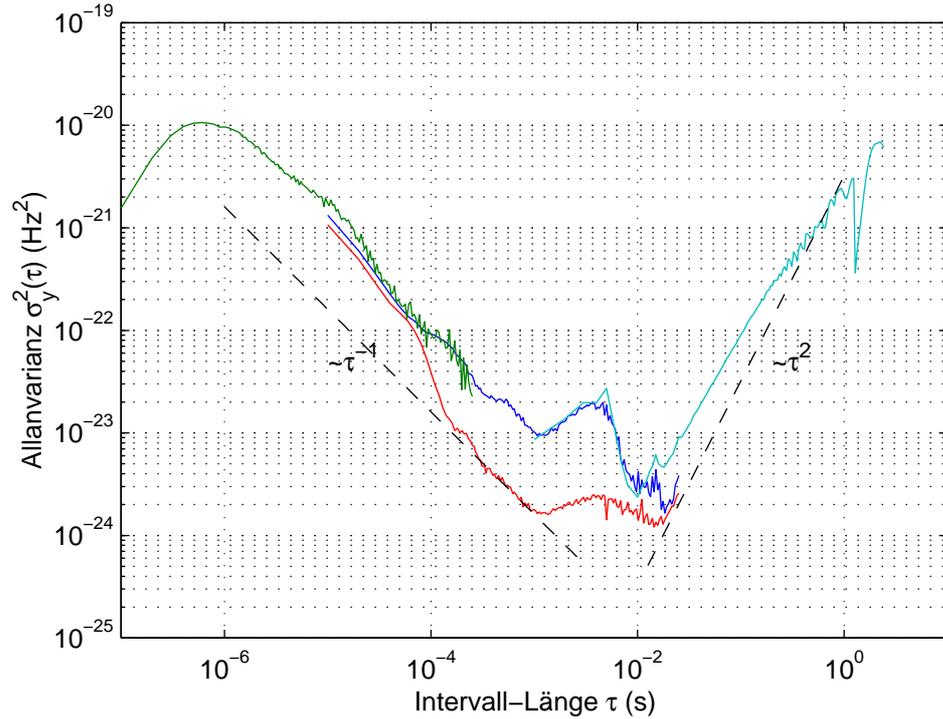


Abbildung 4.18.: Allan-Varianz. Die Bedeutung der eingezeichneten Geraden wird im Text erklärt. Die Abweichungen der Kurven voneinander ergeben sich durch das unterschiedliche Maß an Hintergrundlärm während der Messung (vgl. Abbildung 4.16).

Nach Abschnitt 2.3, Gleichung (2.14) ist die Transmission in der Nähe einer Resonanz durch eine Lorentz-Kurve

$$I(\nu) = I_{\max} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{\Delta\nu/2}\right)^2} \quad (4.5)$$

mit einer vollen Halbwertsbreite  $\Delta\nu$  beschrieben. Auf halber Höhe der Transmission

setzen sich Frequenzschwankungen  $\delta\nu$  demzufolge mittels

$$\delta I = \frac{dI}{d\nu} \bigg|_{\nu=\Delta\nu/2} \delta\nu = \frac{I_{\max}}{\Delta\nu} \delta\nu \quad (4.6)$$

in Intensitätsschwankungen  $\delta I$  um. Die Allanvarianz der normierten Frequenzabweichung  $y(t)$  (1.27) erhält man somit aus der Allanvarianz der Intensitätsschwankungen mittels

$$\sigma_y^2(\tau) = \left( \frac{\Delta\nu}{\nu_0 I_{\max}} \right)^2 \sigma_{\delta I}^2(\tau) \quad (4.7)$$

Die Skalierung der y-Achse hängt also von der Finesse des verwendeten optischen Resonators ab.

Im Bereich von ca. 1  $\mu$ s bis 1 ms fällt die Allanvarianz im Wesentlichen mit  $1/\tau$  ab. Dies ist charakteristisch für weißes Frequenzrauschen. Aus dem Modell  $\sigma_y^2(\tau) = h_0/\tau$  lässt sich daraus die Linienbreite (vgl. Tabelle 1.1 und Gl. (1.44)) zu  $\Delta\nu = 2\pi\nu_0^2 h_0$  berechnen. Für die eingezeichnete Kurve bedeutet dies eine Linienbreite von 1260 Hz.

Für Mittelungszeiten länger als 10 ms steigt die Allanvarianz hingegen wie  $\tau^2$  an. Dies ist ein Hinweis auf eine lineare Drift. Für die eingezeichnete Kurve bedeutet dies einen Wert von 1.7 MHz/min, der mit dem typischen Wert für die Drift des Resonators von 1 MHz/min durchaus verträglich ist.

Im Bereich zwischen 1 und 10 ms ist eine Erhöhung der Allanvarianz erkennbar, die durch Frequenzschwankungen bei Vielfachen der Netzfrequenz von 50 Hz verursacht werden.

## 4.6. Phasenstarre Kopplung

Der Aufbau zur phasenstarken Kopplung entspricht im Wesentlichen genau dem in Abbildung 2.7 auf Seite 30 gezeigten. Das mit einer schnellen Photodiode aufgenommene Schwebungssignal (vgl. Abschnitt 3.3.2 und 4.5.1) wurde direkt, ohne zusätzlichen Verstärker, an den Mischer gegeben. Die Frequenz des Lokaloszillators betrug etwa 30 MHz. Das tiefpassgefilterte (Grenzfrequenz 5 MHz) Ausgangssignal diente als Eingang für den gleichen Regelverstärker (Abschnitt 3.3.3), wie er für die Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall verwendet wurde. Das Photodiodensignal als auch das Fehlersignal wurden zudem auf einem Oszilloskop bzw. Spektrumanalysator beobachtet. Unabhängig davon, ob der zweite Diodenlaser auf den optischen Resonator frequenzstabilisiert wurde oder nur gitterstabilisiert war, blieben die relativen Phasenabweichungen genügend klein, sodass die Wahrscheinlichkeit für nicht mehr korrigierbare Phasenfehler sehr gering war. Nachdem die Regelung in Betrieb genommen wurde, ließ sich die Lokaloszillatordfrequenz auch sprunghaft mit Schritten von 1 MHz verstimmen, ohne dass die Regelung versagte.

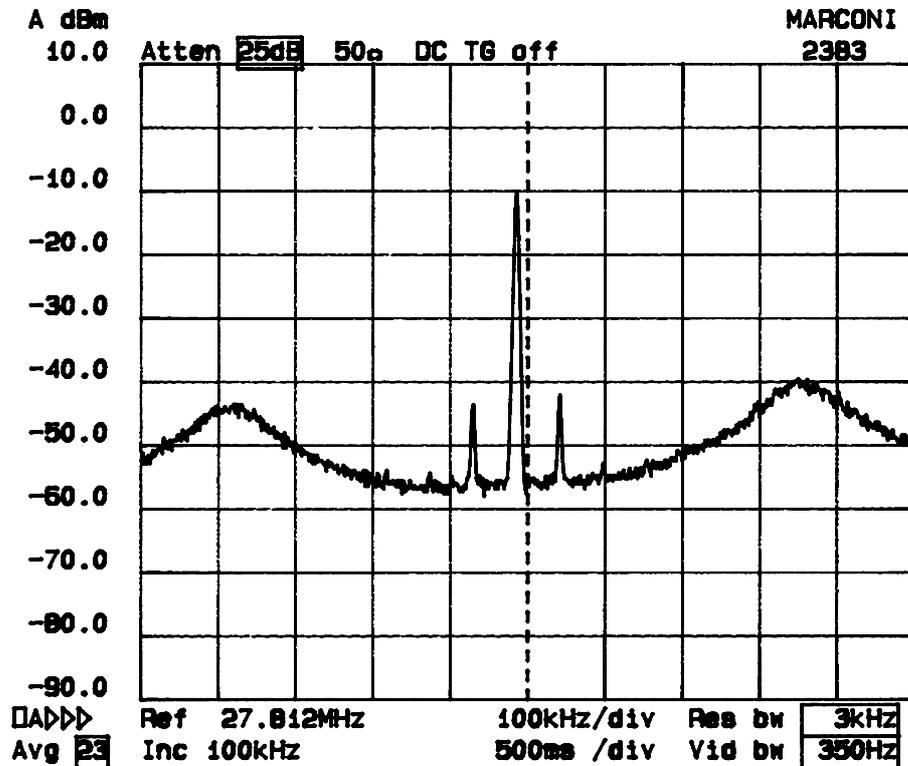


Abbildung 4.19.: Spektrum des Schwebungssignals bei phasenstarrer Kopplung. Die Seitenbänder bei ca. 65 kHz wurden durch Erdungsprobleme bei der Beobachtung des Fehlersignals durch ein Oszilloskop verursacht.

Ein Spektrum des Schwebungssignals bei aktiver Regelung zeigt Abbildung 4.19. Die Linienbreite des Schwebungssignals ist nur durch die Auflösung des Spektrumanalysators begrenzt. Die an der Lage der breiten, durch die Regelung verursachten Seitenbänder ablesbare Regelbandbreite von ca. 350 kHz ist kleiner als die bei dem Pound-Drever-Hall-Verfahren erreichte Regelbandbreite von 1 MHz. Der Unterschied lässt sich durch den in einigen Punkten mangelhaften Testaufbau, fehlende Impedanzanpassungen und die Verwendung einer langsameren Photodiode erklären. Bis zum einem Abstand von ca. 100 kHz liegt der durch das Phasenrauschen verursachte Untergrund 45 dBm unterhalb des Trägers in einer Bandbreite von 3 kHz. Dieser Wert stimmt mit dem, bei Schwebungsmessungen zweier auf einen optischen Resonator stabilisierten Diodenlaser ebenfalls gemessenen Wert (siehe Abschnitt 4.5.1) gut überein. Optimierungen in den Reglereinstellungen, insbesondere die Verwendung einer schnelleren Photodiode, lassen deshalb eine mindestens ebenso gute Konzentration der Leistung im Träger von ca. 97% erwarten.

## 5. Spektroskopische Messungen an gefangenen $\text{Ca}^+$ -Ionen

In diesem Kapitel werden einige spektroskopische Messungen an gefangenen  $\text{Ca}^+$ -Ionen vorgestellt, die mithilfe der im Rahmen dieser Diplomarbeit aufgebauten und frequenzstabilisierten Diodenlaser in der Arbeitsgruppe von Prof. Blatt erfolgten. Eine vollständige Beschreibung der Experimente ist in der Doktorarbeit von NÄGERL (1998) zu finden. Gleichzeitig wird die für das Verständnis notwendige Theorie kurz zusammengefasst.

### 5.1. Termschema von $^{40}\text{Ca}^+$

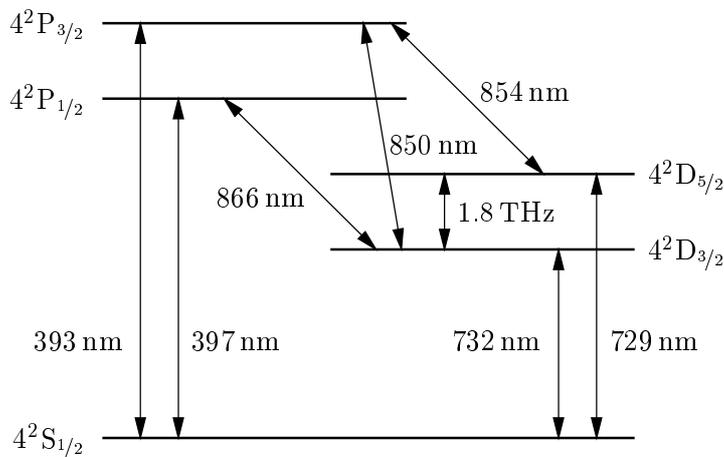


Abbildung 5.1.: Termschema von  $\text{Ca}^+$

Die elektronische Konfiguration von  $\text{Ca}^+$  im Grundzustand entspricht der von Argon mit einem zusätzlichen Elektron in der 4s-Schale. Das Termschema ist ähnlich dem von Wasserstoff. Ein wichtiger Unterschied ist, dass die beiden ersten D-Niveaus bei  $\text{Ca}^+$  unterhalb der ersten P-Niveaus liegen. Das verwendete Isotop  $^{40}\text{Ca}^+$  besitzt keinen Kernspin und somit keine Hyperfeinstruktur. Abbildung 5.1 zeigt die niedrigst-

gelegenen Niveaus mit den relevanten Übergängen. Die detaillierten Wellenlängen und Lebensdauern dazu sind in Tabelle 5.1 enthalten (JAMES, 1998).

Übergang	Wellenlänge (Luft)	nat. Lebensdauer
$S_{1/2}-P_{1/2}$	396.847 nm	7.7 ns
$S_{1/2}-P_{3/2}$	393.366 nm	7.4 ns
$P_{1/2}-D_{3/2}$	866.214 nm	94.3 ns
$P_{3/2}-D_{3/2}$	849.802 nm	901 ns
$P_{3/2}-D_{5/2}$	854.209 nm	101 ns
$S_{1/2}-D_{5/2}$	729.147 nm	1.045 s
$S_{1/2}-D_{3/2}$	732.389 nm	1.080 s

Tabelle 5.1.: Genaue Wellenlängen und Lebensdauer der Übergänge aus Abbildung 5.1

Vom  $S_{1/2}$ -Grundzustand sind zwei Dipolübergänge in die P-Niveaus möglich. In dem verwirklichten Experiment wird die Fluoreszenz des Übergangs  $S_{1/2}-P_{1/2}$  bei 397 nm detektiert und dient als Nachweis für die Ionen. Dieser Übergang dient weiters zum Dopp-lerkühlen (siehe Abschnitt 5.3.1). Ein kleiner Teil des Spontanzerfalls (Verzweigungs-verhältnis 15:1) vom  $P_{1/2}$ -Niveau geht anstatt in den Grundzustand in das  $D_{3/2}$ -Niveau. Dieses Niveau ist metastabil, da der weitere Zerfall in den Grundzustand aufgrund der Auswahlregeln für die Dipolstrahlung verboten ist und besitzt eine lange natürliche Lebensdauer von ca. 1 s. Zum Entleeren dieses Niveaus dient der Laser bei 866 nm.

Das weitere metastabile  $D_{5/2}$ -Niveau hingegen koppelt nicht an das  $P_{1/2}$ -Niveau an. Werden die Laser bei 397 nm und 866 nm eingestrahlt, so zeigt ein Fehlen der Fluoreszenz an, dass sich das Ion im  $D_{5/2}$ -Zustand befindet. Wird zusätzlich noch schwaches Licht auf dem Quadrupolübergang  $S_{1/2}-D_{5/2}$  eingestrahlt, so zeigt die Intensität des Fluoreszenzlichtes eine abwechselnde Folge von Dunkel- und Hellperioden. Die Absorption eines Photons auf dem schwachen  $S_{1/2}-D_{5/2}$ -Übergang bewirkt das Fehlen vieler Photonen bei 397 nm. Ein Sprung in der Intensität bedeutet also einen „Quantensprung“ des Ions zwischen dem  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$ -Zustand, d.h. Absorption bzw. Emission eines Photons, wie es ursprünglich schon im Atommodell von Bohr vorgesehen ist. Dies ist ein typisches Einzelteilchenphänomen, das bei einer Mittelung über ein Ensemble nicht beobachtet werden kann. Mithilfe dieser Technik lässt sich der schwache Übergang  $S_{1/2}-D_{5/2}$  untersuchen. Aufgrund der langen natürlichen Lebensdauer des  $D_{5/2}$ -Zustands ist dieser Übergang sehr schmalbandig, jedoch werden an einem einzelnen Ion zu wenig Photonen gestreut, um direkt nachgewiesen werden zu können. Für hochauflösende Spektroskopie auf diesem Übergang wird Laserlicht bei 729 nm für eine gewisse Zeitspanne eingestrahlt und anschließend Licht bei 397 nm und 866 nm. Wird dann kein Fluoreszenzlicht detektiert, so erfolgte ein Übergang in den  $D_{5/2}$ -Zustand. Durch mehrmalige Wiederholung dieses Vorgangs erhält man dann die Anregungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von

Frequenz und Intensität des eingestrahnten Lichts. Zusätzliches Einstrahlen von Licht bei 854 nm zwischen den einzelnen Wiederholungen stellt sicher, dass der  $D_{5/2}$ -Zustand entleert wird.

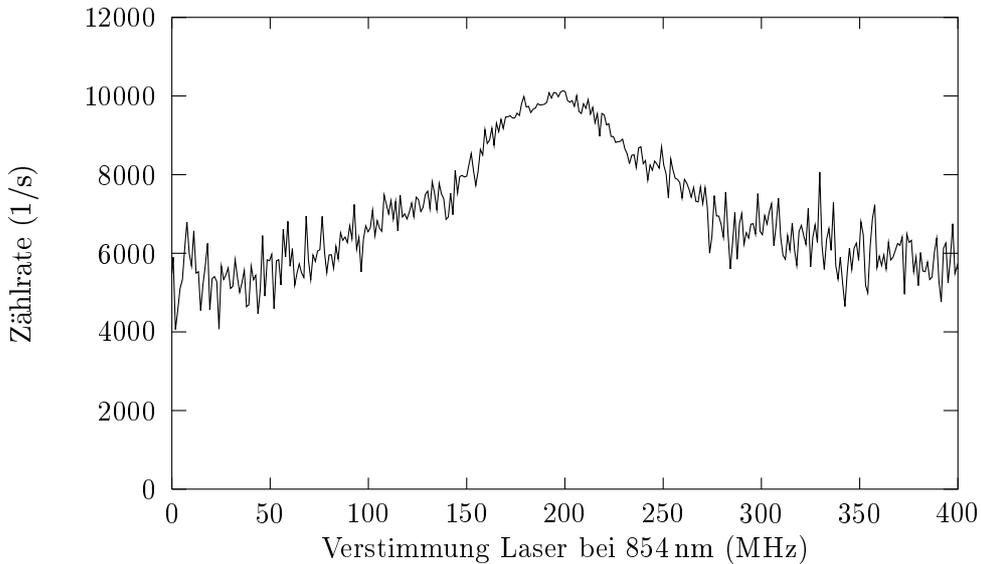


Abbildung 5.2.: Fluoreszenz in Abhängigkeit der Verstimmung des Lasers bei 854 nm, wenn alle Laser eingestrahlt werden. Die Leistung bei 854 nm beträgt weniger als  $1 \mu\text{W}$

Abbildung 5.2 zeigt die Fluoreszenz in Abhängigkeit der Verstimmung des Lasers bei 854 nm, wenn alle Laser gleichzeitig, insbesondere der Laser bei 729 nm eingestrahlt werden. Abseits der Resonanz sinkt die Fluoreszenzrate auf ungefähr die Hälfte, da der Laser bei 729 nm den  $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$ -Übergang sättigt. Auf Resonanz entleert der Laser bei 854 nm den  $D_{5/2}$ -Zustand selbst bei geringer Intensität jedoch so schnell, sodass die Fluoreszenz auf den maximalen Wert ansteigt. Das verstärkte Rauschen abseits der Resonanz wird durch die schnelle Abfolge der induzierten Quantensprünge zwischen dem  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$ -Zustand verursacht.

## 5.2. Lineare Paulfalle

Der schematische Aufbau einer linearen Paulfalle ist in Abbildung 5.3 gezeigt. Genauere Darstellungen der Funktionsweise finden sich im Buch von GOSH (1995).

Das Fangen der Ionen erfolgt mit statischen und dynamischen elektrischen Feldern.

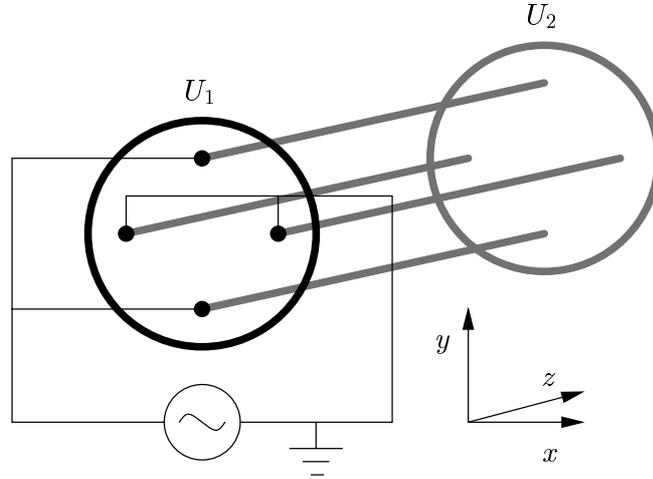


Abbildung 5.3.: Lineare Paulfalle

Abgesehen von den ringförmigen Elektroden an den Enden entspricht der Aufbau dem Quadrupol-Massenfilter, das 1953 von Paul entwickelt wurde.

An zwei gegenüberliegende stabförmige Elektroden wird eine Wechselspannung  $U(t) = U + V \cos \omega t$  angelegt, die beiden anderen werden geerdet. Das elektrische Potential nahe des Zentrums ist in der  $xy$ -Ebene dann durch

$$\phi(x, y, t) = \frac{x^2 - y^2}{2r_0} U(t) \quad (5.1)$$

gegeben, wobei mit  $r_0$  der Abstand vom Zentrum zu einer der Elektroden bezeichnet wird. Die Bewegungsgleichung für ein einfach geladenes Ion in der  $xy$ -Ebene

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (a - 2q \cos(\Omega t)) \frac{\Omega^2}{4} x &= 0 \\ \ddot{y} - (a - 2q \cos(\Omega t)) \frac{\Omega^2}{4} y &= 0 \end{aligned} \quad \text{mit} \quad a = \frac{4eU}{m\Omega^2 r_0^2}, \quad q = \frac{2eV}{m\Omega^2 r_0^2} \quad (5.2)$$

besitzen die Form einer Mathieu-Differentialgleichung. Für bestimmte Bereiche von Werten für  $U$ ,  $V$  und  $\Omega$  existieren stabile Lösungen für die Bewegung eines Ions (d.h. die Bahn bleibt beschränkt), insbesondere für  $|a| \ll 1$  und  $|q| \ll 1$ .

Abbildung 5.4 zeigt die berechnete Bahn eines Ions in der  $xy$ -Ebene. Die Bewegung kann in zwei Anteile zerlegt werden. Zum eine führt das Ion, falls es sich außerhalb des Zentrums befindet, eine erzwungene Bewegung synchron zum oszillierenden elektrischen Feld aus. Die Amplitude dieser sogenannten Mikrobewegung hängt vom Abstand zum

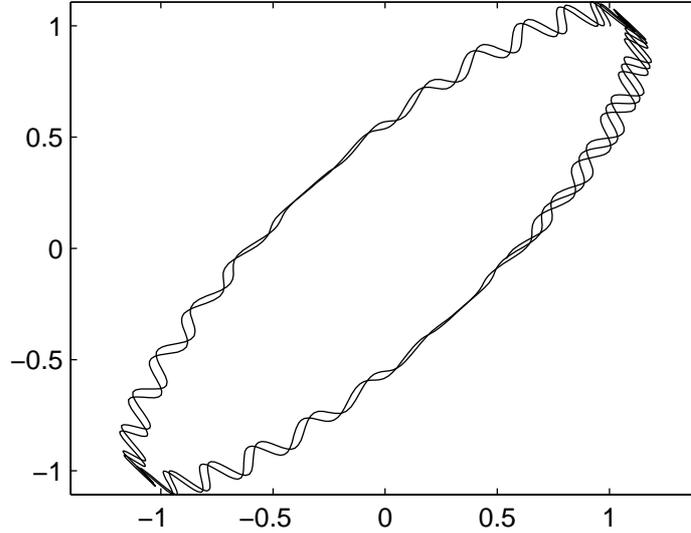


Abbildung 5.4.: Numerisch berechnete Bahn eines Ions für  $a = 0$ ,  $q = 0.1$

Zentrum ab. Der Rest, die Säkular- oder Makrobewegung, ist eine periodische Bewegung in einem näherungsweise harmonischen (Pseudo-)Potential mit einer Frequenz von

$$\omega = \frac{\Omega}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + a}. \quad (5.3)$$

Durch ein zusätzliches Anlegen von gleichen Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  an die Ringelektroden lässt sich die Bewegung des Ions auch in  $z$ -Richtung einschränken.

Zusätzliche statische elektrische Felder bewirken, dass die Ionen etwas außerhalb der Fallenmitte verschoben werden und selbst bei geringer Säkularbewegung Mikrobewegung ausführen und dadurch zusätzliche kinetische Energie besitzen. Solche störenden Felder müssen durch weitere Elektroden kompensiert werden. Da bei der linearen Paulfalle für die Speicherung entlang der  $z$ -Achse ein statisches Feld verwendet wird, können mehrere Ionen in einer Kette entlang der Achse gespeichert werden, ohne dass deren Bewegung durch die Mikrobewegung beeinflusst wird. Bei einer konventionellen Paulfalle ist dies nur für ein einziges Ion möglich, da nur genau im Fallenzentrum die Mikrobewegung vernachlässigt werden kann.

Abgesehen von der Mikrobewegung wird also die Bewegung des Ions als die eines dreidimensionalen harmonischer Oszillators mit Frequenzen  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  und  $\omega_z$  beschrieben. Dies gilt auch in einer quantenmechanischen Beschreibung. Die Bewegung ist quantisiert mit Energiewerten  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ , wobei  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Schwingungsquantenzahl bezeichnet. Werden mehrere Ionen in der linearen Falle gespeichert, so wechselwirken

diese über die Coulomb-Abstoßung stark miteinander. Falls die Ionen nur mehr geringe kinetische Energie besitzen, so ordnen sie sich in Form einer Kette entlang der Fallachse an. Die kollektive Bewegung (insbesondere entlang der z-Achse) wird dann durch Normalmoden beschrieben.

In dem aufgebauten Experiment wird eine Antriebsfrequenz für die Falle von 18 MHz verwendet. Die Säkularfrequenz in radialer Richtung beträgt ca. 1.4 MHz, in axialer Richtung zwischen 100 und 200 kHz. Der Abstand zwischen zwei Ionen liegt dann bei ungefähr 20  $\mu\text{m}$ .

### 5.3. Laserkühlen von gefangenen Ionen

Durch gezielten Einsatz von Lichtkräften kann die Bewegung der Ionen in der Falle verringert werden. Die Dopplerverbreiterung als dominanter Verbreiterungsmechanismus wird dadurch fast völlig eliminiert. Dies ist eine der Voraussetzungen, um hochauflösende Spektroskopie zu betreiben. Das Konzept von Cirac und Zoller zur Realisierung von Quantenlogikgattern sieht die Verknüpfung des inneren Zustandes mehrerer Ionen über die kollektive Bewegung vor. Insbesondere wird die Präparation eines reinen Bewegungszustands gefordert. Dies ist durch Kühlung der Ionen bis in den Bewegungsgrundzustand möglich. Die Verwirklichung dieses Zieles stellt einen Schwerpunkt der experimentellen Arbeiten in der Arbeitsgruppe dar. Zur Anwendung sollen zwei Verfahren kommen. Dopplerkühlen wird schon routinemäßig angewandt, die Realisierung des Seitenbandkühlverfahrens ist in Vorbereitung.

#### 5.3.1. Dopplerkühlen

Das Verfahren zur Dopplerkühlung wurde von HÄNSCH und SCHAWLOW (1975) für freie Atome, von WINELAND und DEHMELT (1975) für gefangene Ionen vorgeschlagen. Dazu wird Laserlicht eingestrahlt, das gegenüber der atomaren Resonanz etwas rotverschoben ist. Ionen, die sich entgegen dem Laserstrahl bewegen, absorbieren wegen des Dopplereffekts bevorzugt ein Photon. Dadurch wird der Impuls  $\hbar k$  des Photons auf das Ion übertragen und dieses dadurch abgebremst. Die anschließende Spontanemission erfolgt jedoch in eine beliebige Richtung, sodass bei vielfacher Wiederholung im Mittel durch die Spontanemission kein Impuls auf das Ion übertragen wird. Wird Licht von allen Seiten eingestrahlt, so wird die Bewegung in allen Richtungen gedämpft. Diese Überlegungen gelten ursprünglich nur für freie Teilchen. Für gefangene Teilchen muss die Bewegung im Fallenpotential mit berücksichtigt werden. Unter der Voraussetzung, dass die Lebensdauer des angeregten Zustands viel kleiner als die Schwingungsperiode der Säkularbewegung ist, d.h. während der Absorption bzw. Emission eines Photons bleiben Ort und Geschwindigkeit des Ions beinahe konstant, kann das Ion wie ein freies Teilchen behandelt werden. Jedoch genügen schon Laserstrahlen aus zwei Richtungen, um ein gefangenes Ion in allen Richtungen zu kühlen.

Die minimal erreichbare kinetische Energie hängt von der Geschwindigkeitsselektivität der Absorption eines Photons aufgrund des Absorptionsprofils des atomaren Übergangs und damit von der Linienbreite des Übergangs ab. Genauere Betrachtungen liefern eine minimale Energie von

$$E_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2}. \quad (5.4)$$

Im speziellen Fall von  $\text{Ca}^+$  wird der Übergang bei 397 nm verwendet. Resonantes Licht bei 866 nm verhindert optisches Pumpen in den metastabilen  $D_{3/2}$ -Zustand. Mit einer Linienbreite von ca. 20 MHz kann also eine minimale mittlere Schwingungsquantenzahl in z-Richtung von ungefähr  $\langle n_z \rangle = 100$  erwartet werden.

### 5.3.1.1. Dunkelresonanzen

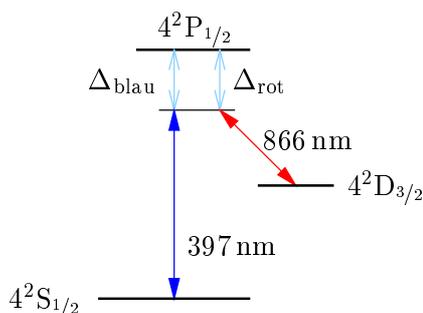


Abbildung 5.5.: Termschema zur Entstehung von Dunkelresonanzen bei  $\text{Ca}^+$

Mit den beiden Lasern, die zur Dopplerkühlung verwendet werden, lassen sich Raman- oder Dunkelresonanzen beobachten. Wenn die Verstimmungen der Laser gegenüber der atomaren Resonanz gleich groß sind (siehe Abbildung 5.5), entsteht eine kohärente Überlagerung der beiden tiefstgelegenen Zustände, die nicht mit dem Licht wechselwirkt. Die Besetzung im obersten Zustand verschwindet und damit ist auch keine Fluoreszenz beobachtbar. Eine genaue Beschreibung erfordert das Lösen der Schrödingergleichung, dies erfolgt am besten mithilfe des Dichtematrixformalismus und entsprechenden Näherungen (BOLLE (1998); OBERST (1999)). Bei  $\text{Ca}^+$  muss zur genauen Beschreibung auch die Zeeman-Unterstruktur beachtet werden, sodass man insgesamt die optischen Bloch-Gleichungen für ein 8-Niveau-System lösen muss. Die Anzahl der beobachtbaren Dunkelresonanzen hängt dann von der Orientierung der Polarisation der Laser relativ zum Magnetfeld an. Die relevanten Parameter sind die Verstimmungen und Intensitäten der beiden Laser, die relative Laserlinienbreite, das Magnetfeld und der Winkel zwischen Magnetfeld und Polarisationsrichtung der Laser.

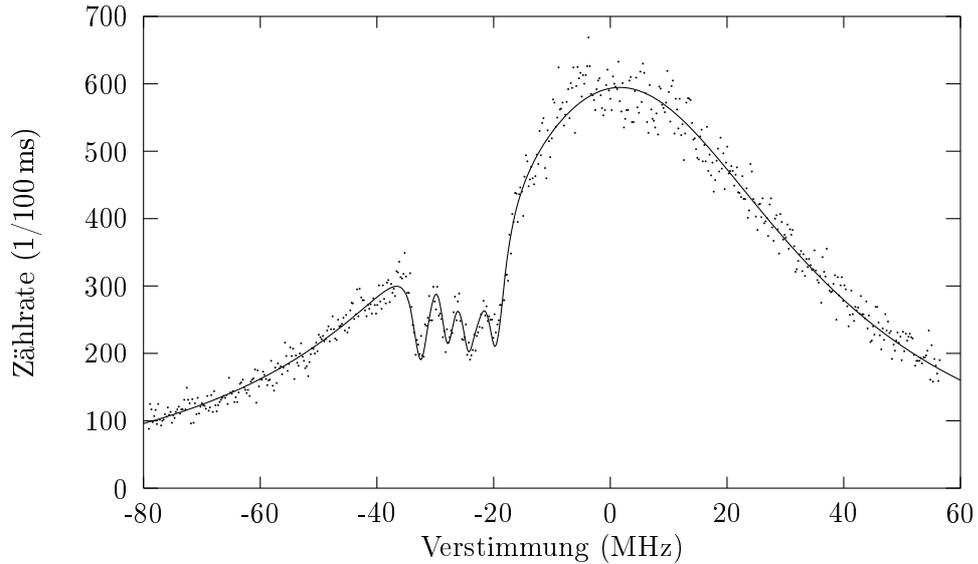


Abbildung 5.6.: Fluoreszenz in Abhängigkeit von der Verstimmung der Lasers bei 866 nm. Der Winkel zwischen Magnetfeld und Polarisationsrichtung wurde so gewählt, dass vier der maximal acht Dunkelresonanzen sichtbar sind. Die Parameter zu der eingezeichneten Kurve sind: Verstimmung des Lasers bei 397 nm  $\Delta_{397} = -26.1(8)$  MHz, Sättigungsparameter  $S_{866} = 0.62(3)$ ,  $S_{397} = 4.8(3)$ , kombinierte Laserlinienbreite  $\Delta\nu_L = 240(290)$  kHz, Magnetfeld in Frequenzeinheiten  $u = \mu_B B/h = 2.9(6)$  MHz, Winkel zwischen Magnetfeld und Polarisationsrichtung  $\alpha = 97(9)^\circ$ . Die Daten wurden von Christian Roos an einer konventionellen Paulfalle gewonnen, die Berechnung und Anpassung der theoretischen Kurve erfolgte von Hilmar Oberst (OBERST, 1999).

Abbildung 5.6 zeigt ein Spektrum bei Verstimmung des Lasers bei 866 nm gemeinsam mit einer daran angepassten berechneten Kurve. Details zur Berechnung der theoretischen Kurve sind in der Diplomarbeit von OBERST (1999) beschrieben. Insbesondere lässt sich aus dieser Kurve die kombinierte Laserlinienbreite ablesen. Der Wert von 240 kHz lässt sich aus den Messdaten zu Abbildung 5.6 nur mit einer großen Unsicherheit bestimmen, stimmt jedoch mit der Linienbreite des Lasers bei 397 nm von ungefähr 200 kHz durchaus überein. Die Linienbreite des Laser bei 866 nm von ungefähr 10 kHz ist dem gegenüber zu vernachlässigen.

Abhängig von den Intensitäten der Laser und deren relative Linienbreite können die Dunkelresonanzen sehr schmal werden. Nachdem die erreichbare minimale kinetische Energie beim Dopplerkühlen von der Geschwindigkeitsselektivität aufgrund der Form des Absorptionsprofils abhängt, lassen sich bei einer Verstimmung in der Nähe einer Dunkelresonanz geringere minimale Energien erzielen, als dies bei einem reinen Zwei-Niveau-System der Fall wäre (REISS et al., 1996). Entsprechend geringe Linienbreiten und gute Stabilität der Laser wären dafür Voraussetzung.

### 5.3.2. Seitenbandkühlen

Durch die periodische Bewegung des Ions in der Falle entstehen im Anregungsspektrum Seitenbänder in Abständen der Fallenfrequenz. Diese können nur dann aufgelöst werden, wenn die natürliche Linienbreite des Übergangs kleiner als die Fallenfrequenz ist. Falls diese Bedingung erfüllt ist, spricht man von starker Speicherung. Auf dem Dipolübergang  $S_{1/2}-P_{1/2}$  mit einer Linienbreite von ca. 20 MHz gegenüber einer axialen Fallenfrequenz von 100–200 kHz ist diese Bedingung nicht erfüllt, jedoch für den Quadrupolübergang  $S_{1/2}-D_{5/2}$  bei 729 nm mit einer natürlichen Lebensdauer von 1 s.

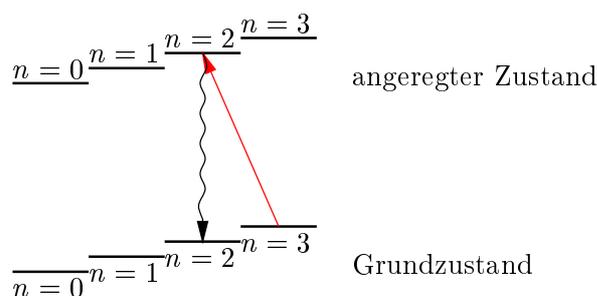


Abbildung 5.7.: Schema der Seitenbandkühlung

Das Prinzip der Seitenbandkühlung ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Wird der Laser auf das rotverschobene Schwingungsseitenband verstimmt und zerfällt der angeregte Zustand vorwiegend ohne Änderung der Schwingungsquantenzahl, so erfolgt die Kühlung durch optisches Pumpen in den Bewegungsgrundzustand. Essentiell für das effektive

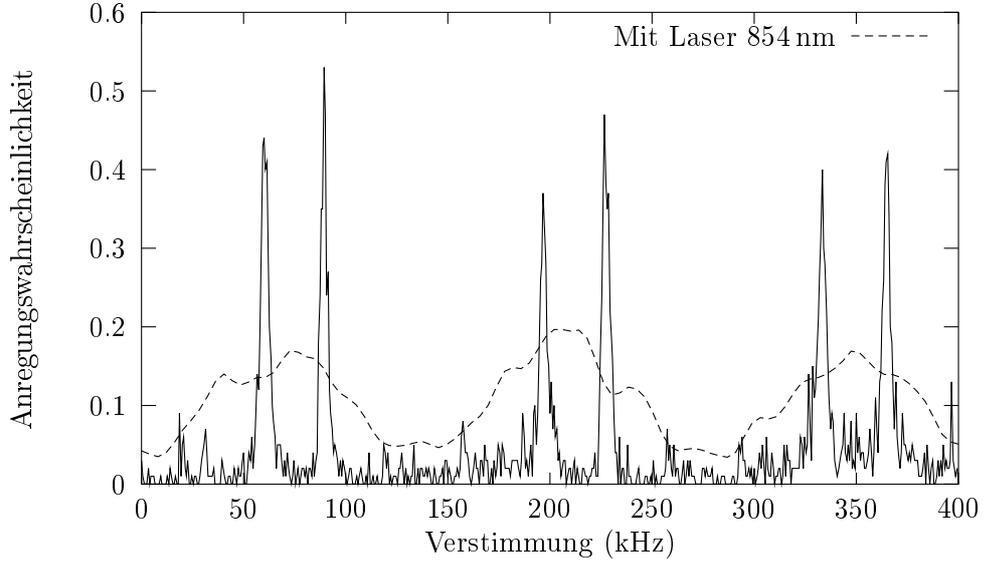


Abbildung 5.8.: Seitenbandspektren mit/ohne zusätzlichem Licht bei 854 nm. Die Daten stammen aus der Doktorarbeit von NÄGERL.

Funktionieren der Seitenbandkühlung ist die Wahrscheinlichkeit für die Änderung der Schwingungsquantenzahl bei einem Übergang. Diese ist (BLATT, 1992)

$$\begin{aligned}
 W_{n \rightarrow n'} &= |\langle n | e^{-ikr} | n' \rangle|^2 \\
 &\simeq \delta_{nn'} + \eta^2 (n' \delta_{n, n'-1} + (n' + 1) \delta_{n, n'+1}) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

mit der Entwicklung gültig für kleines

$$\eta^2 = \frac{\epsilon}{\omega} = \left( \frac{\pi a_0}{\lambda} \right)^2 \ll 1,
 \tag{5.6}$$

wobei  $a_0 = \sqrt{2\hbar/m\omega}$  die Ausdehnung des Grundzustands und  $\epsilon = \hbar k^2/2m$  die Rückstoßenergie bei Absorption/Emission eines Photons in Frequenzeinheiten bezeichnen. Der Entwicklungsparameter  $\eta$  wird als Lamb-Dicke-Parameter bezeichnet. Dieser ist auch ein Maß für die Lokalisierung des Atoms im Bewegungsgrundzustand im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichts. Im Limes  $\eta \ll 1$ , dem Lamb-Dicke-Regime, koppeln also nur unmittelbar benachbarte Schwingungszustände miteinander. Änderungen der Schwingungsquantenzahl um  $\pm 1$ , ausgehend von einem Zustand mit Schwingungsquantenzahl  $n$ , sind zudem um den Faktor  $n\eta^2$  unterdrückt. Die minimale mittlere Schwingungs-

quantenzahl beim Seitenbandkühlen im Lamb-Dicke-Regime

$$\langle n \rangle = \alpha \left( \frac{\Gamma}{\omega} \right)^2 \quad (5.7)$$

(mit  $\alpha \approx 1$ , abhängig von der Art des Übergangs) kann bei entsprechend geringer Linienbreite des Übergangs nahe bei Null liegen, d.h. das Ion befindet sich mit großer Wahrscheinlichkeit ( $> 90\%$ ) im Bewegungsgrundzustand.

Die Anregungs- und Zerfallsrate bestimmen die erreichbare Kühlrate. Die Anregungsrate hängt von der zur Verfügung stehenden Leistung des antreibenden Laserlichts ab, die Zerfallsrate ist durch die Lebensdauer des angeregten Zustandes bestimmt. Die natürliche Lebensdauer von 1 s des  $D_{5/2}$ -Zustandes bei  $\text{Ca}^+$  würde aber eine inakzeptable geringe Kühlrate bedeuten. Durch zusätzliches Einstrahlen von Licht bei 854 nm koppelt jedoch der kurzlebige  $P_{3/2}$ -Zustand an und dadurch wird die Lebensdauer des  $D_{5/2}$ -Zustandes je nach Intensität und Verstimmung des Lichtes bei 854 nm verkürzt. Im Lamb-Dicke-Regime ist sichergestellt, dass auch beim Übergang ins  $P_{3/2}$ -Niveau und anschließendem Spontanzerfall in den Grundzustand sich die Schwingungsquantenzahl nicht ändert.

Bei einer Fallenfrequenz von 200 kHz beträgt der Lamb-Dicke-Parameter für den Übergang bei 729 nm  $\eta = 0.21$ . Ausgehend von einer mittleren Schwingungsquantenzahl  $\langle n_z \rangle = 100$  nach dem Dopplerkühlen ist jedoch die Voraussetzung  $n\eta^2 \ll 1$  für effizientes Seitenbandkühlen nicht erfüllt. Abhilfe schafft eine Erhöhung der Fallenfrequenz und/oder ein zusätzliches Kühlverfahren. Dieses wäre z.B. Dopplerkühlen auf dem  $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$  Übergang, wobei der  $D_{5/2}$ -Zustand durch Licht bei 854 nm derart verbreitert wird, dass die Seitenbänder nicht mehr aufgelöst werden können. Da die erreichbare minimale Energie beim Dopplerkühlen von der Linienbreite abhängt, lässt sich bei einer Linienbreite von einigen Hundert Kilohertz gegenüber 20 MHz auf dem  $S_{1/2}$ - $P_{1/2}$ -Übergang eine entsprechend niedrigere minimale Energie erreichen.

Eine spektroskopische Messung auf dem  $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$ -Übergang an einem einzelnen Ion in der linearen Falle ist in Abbildung 5.8 auf der vorherigen Seite gezeigt.

Ein Absorptionsspektrum wurde mittels gepulster Spektroskopie (siehe Abschnitt 5.1) aufgenommen. Ein komplettes Spektrum auf dem Quadrupolübergang ist sehr komplex. Abgesehen von der Zeeman-Aufspaltung der Linie in mehrere Komponenten sind viele axiale Bewegungsseitenbänder (ca. 30 pro Übergang) zu beobachten. Zusätzlich zu den axialen Bewegungsseitenbändern gibt es radiale Bewegungsseitenbänder, die wiederum axiale Bewegungsseitenbänder aufweisen. Abschnitt 5.1 zeigt nur einen Ausschnitt. Zu erkennen sind Auschnitte von zwei Kämmen axialer Bewegungsseitenbänder mit Abständen von ca. 120 kHz, die ineinandergreifen. Wird zusätzlich Licht bei 854 nm eingestrahlt, werden die einzelnen Linien verbreitert, die benachbarten Linien verschmelzen zu einer einzelnen Linie mit einer Breite von ca. 50 kHz.

### 5.4. Optogalvanische Spektroskopie

Bei der optogalvanischen Spektroskopie (DEMTRÖDER, 1993) wird in einem neongefüllten Glaszylinder eine Gasentladung zwischen einer ringförmigen Anode und einer becherförmigen Kathode aus Kalzium gezündet. Eingestrahltres resonantes Licht regt die aus der Anode herausgeschlagenen, ionisierten Kalziumatome an und verändert dadurch die weitere Ionisierungswahrscheinlichkeit und damit die Leitfähigkeit der Gasentladung. Änderungen im Entladungsstrom bei periodischer Unterbrechung des anregenden Laserstrahls werden durch einen Lock-In-Verstärker detektiert. Die Übergänge zeigen starke Dopplerverbreiterung mit Linienbreiten von ungefähr 1 GHz. Die Mitte der Linie lässt sich mit Sicherheit auf besser als 100 MHz genau bestimmen. Die optogalvanische Spektroskopie dient vorwiegend dazu, für die Experimente an einzelnen Ionen die Laser auf die richtige Wellenlänge zu bringen.

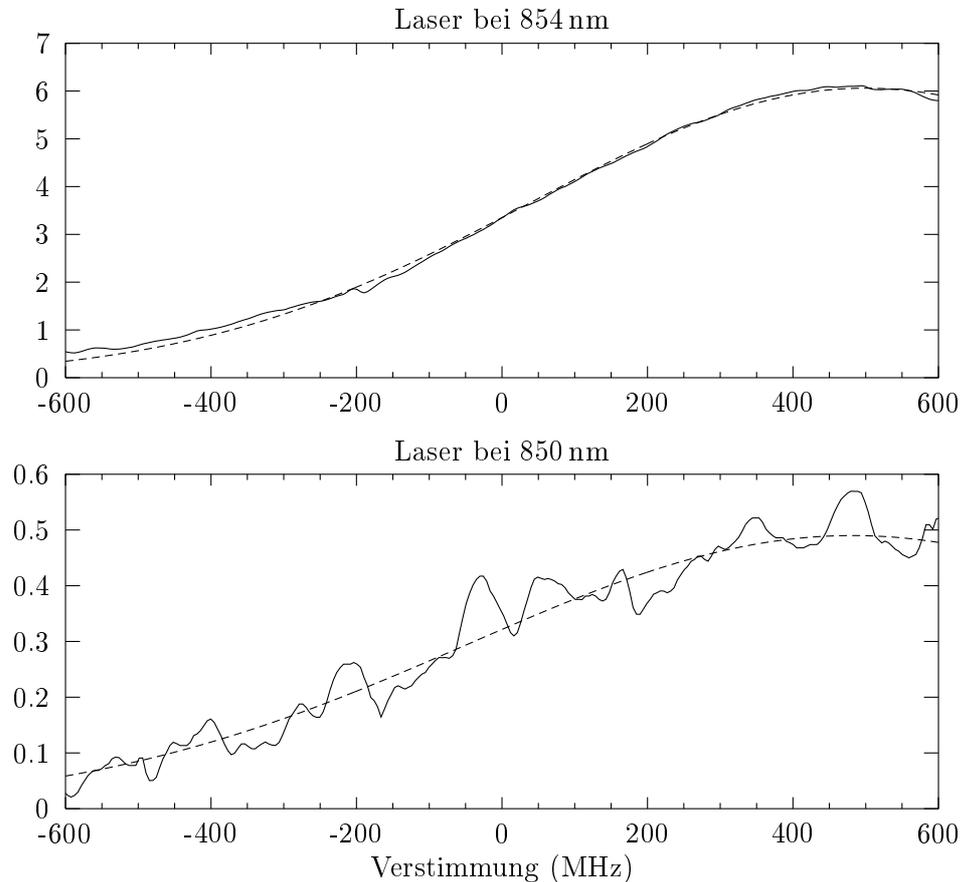


Abbildung 5.9.: Hohlkathodenspektren

Abbildung 5.9 zeigt zwei Hohlkathodenspektren bei 850 nm und 854 nm. Wie aus dem Vergleich der Lebendauern der Übergänge (siehe Tabelle 5.1 auf Seite 74) ersichtlich ist, ist der Übergang bei 850 nm etwa zehnmal schwächer als der bei 854 nm. Dies schlägt sich auch in einem etwa zehnmal schwächeren Hohlkathodensignal bei 850 nm nieder, das unter günstigen Umständen gerade noch zuverlässig messbar ist. Bis auf die Messunsicherheit von ca. 100 MHz in der Bestimmung der Linienmitte ist die Differenzfrequenz der beiden Übergänge ein ganzzahliges Vielfaches des freien Spektralbereichs des optischen Resonators. Dieser wiederum lässt sich, vorsichtig geschätzt, auf zumindest 10 kHz genau bestimmen (siehe Abschnitt 4.5.1.1). Nachdem die Differenzfrequenz von ca. 1.8 THz zwischen den  $D_{3/2}$  und  $D_{5/2}$ -Zuständen ungefähr 2500 freien Spektralbereichen entspricht, bedeutet dies eine Unsicherheit von nur 25 MHz in der Differenzfrequenz der Übergänge bei 850 nm und 854 nm. Ungewiss ist jedoch die genaue Anzahl der Moden, die dieser Differenzfrequenz entspricht. Diese ließe sich durch eine Messung mit einer verbesserten Version des Wellenlängenmessgerätes mit hinreichender Sicherheit bestimmen. Mit einem Wert von 700.306 MHz für den freien Spektralbereich und einem wahrscheinlichen Abstand von 2598 Moden beträgt die Differenzfrequenz der Übergänge bei 850 nm und 854 nm 1.8194 THz.



## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Im experimentellen Teil dieser Diplomarbeit wurden Diodenlaser bei 850 nm, 854 nm und 866 nm frequenzstabilisiert. Die Stabilisierung erfolgte in zwei Schritten, zum einen durch eine passive Stabilisierung durch optische Rückkopplung von einem Gitter in Litrow-Anordnung, zum anderen durch eine aktive Regelung nach dem Verfahren von Pound-Drever-Hall. Die aktive Regelung ist hinreichend robust und ermöglicht ununterbrochenen Betrieb für Stunden.

Die beiden Laser bei 850 nm und 854 nm wurden auf den gleichen Referenzresonator stabilisiert, sodass durch die Analyse des Schwebungssignals eine Linienbreite relativ zum Referenzresonator von minimal 315 Hz gemessen werden konnte. Dieses Ergebnis ist dem von HILOCO et al. (1994) veröffentlichten sehr ähnlich, das an einem vergleichbaren Aufbau gewonnen wurde.

Für die praktische Verwendbarkeit ist auch die langfristige Stabilität von großer Wichtigkeit. Durch Verbesserungen an dem als Referenz dienenden optischen Resonator konnte die Drift auf weniger als 100 kHz/h gesenkt werden. Als Referenz für die Driftmessungen wurde Sättigungsspektroskopie an Cäsium betrieben.

Die Diodenlaser werden für spektroskopische Experimente an einzelnen gefangenen  $\text{Ca}^+$ -Ionen verwendet. Der Diodenlaser bei 866 nm wird als Rückpumper für das Dopplerkühlen auf dem  $S_{1/2}$ - $P_{3/2}$  Übergang benötigt, um Atome, die in den langlebigen  $D_{3/2}$ -Zustand zerfallen, wieder dem Kühlkreislauf zuzuführen. Der Diodenlaser bei 854 nm wird bei der Spektroskopie am  $S_{1/2}$ - $D_{5/2}$ -Übergang verwendet, um nach einem erfolgten Übergang in das langlebige  $D_{5/2}$ -Niveau dieses zu entleeren. Durch Einstrahlen von Laserlicht bei 854 nm koppelt das  $D_{5/2}$ -Niveau an das schnell zerfallende  $P_{3/2}$ -Niveau an. Abhängig von der Intensität des eingestrahlten Lichts lässt sich dadurch die Lebensdauer des  $D_{5/2}$ -Zustandes verkürzen. Dies ist für die Seitenbandkühlung auf diesem Übergang notwendig, um eine genügend hohe Kühlrate zu erzielen.

Der Diodenlaser bei 850 nm soll dazu dienen, gemeinsam mit dem Laser bei 854 nm den Ramanübergang  $D_{5/2}$ - $D_{3/2}$  zu treiben. Werden beide Laser mithilfe eines Kammgenerators phasenstarr gekoppelt, so ist die kohärente Entwicklung auf diesem Übergang nicht durch Stabilität der Laser beschränkt. Eine probeweise phasenstarre Kopplung der Laser bei einer Differenzfrequenz von 30 MHz war erfolgreich. Die Regelungselektronik, wie sie für die Frequenzstabilisierung nach Pound-Drever-Hall verwendet wurde, eignet sich auch für die phasenstarre Kopplung zweier Laser.

Die Messung des Frequenzganges des Gitterpiezos zeigt einige Verbesserungsmöglichkeiten auf. Der Aufbau zur optischen Rückkopplung von einem Gitter besitzt einige nur schwach gedämpfte mechanische Resonanzen, die sich einerseits ungünstig auf die Regelungseigenschaften auswirken, andererseits durch akustische Störungen leicht angeregt werden können und zu einer Verschlechterung der Frequenzstabilität führen. Ein stabilerer Aufbau mit zusätzlichem Dämpfungsmaterial könnte hier Abhilfe schaffen. In der Optimierung des Frequenzgangs des Regelverstärkes besteht ebenfalls noch eine Verbesserungsmöglichkeit.

In der letzten Zeit ist es in unserer Arbeitsgruppe gelungen, ein einzelnes  $\text{Ca}^+$ -Ion durch Seitenbandkühlung bis in den Bewegungsgrundzustand zu bringen. Dies wurde durch die höhere Fallenfrequenz von ca. 700 kHz der verwendeten konventionellen Paulfalle erleichtert. Durch Verbesserungen an der linearen Falle konnte auch dort die Fallenfrequenz auf vergleichbare Werte erhöht werden, sodass die Kühlung in den Grundzustand auch in der linearen Falle absehbar ist. Dies bedeutet einen wichtigen Schritt in Richtung der Verwirklichung des Konzeptes von Cirac und Zoller zur Realisierung eines Quantencomputers.

## A. Anhang

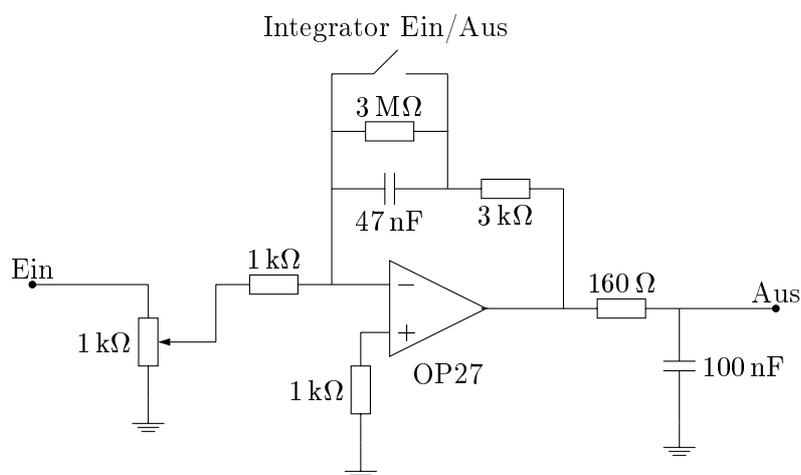


Abbildung A.1.: Regelverstärker, Piezozweig. Durch einen Schalter kann der Kondensator im Rückkoppelzweig des Operationsverstärkers überbrückt werden und damit die Integratorwirkung ausgeschaltet werden (Frequenzgang siehe Abbildung A.3). Durch das Potentiometer am Eingang wird die Gesamtverstärkung geregelt.

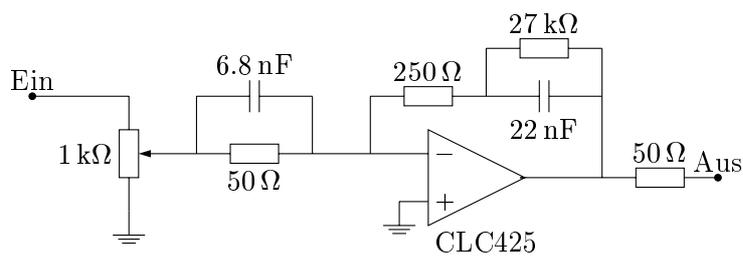


Abbildung A.2.: Regelverstärker, Stromzweig

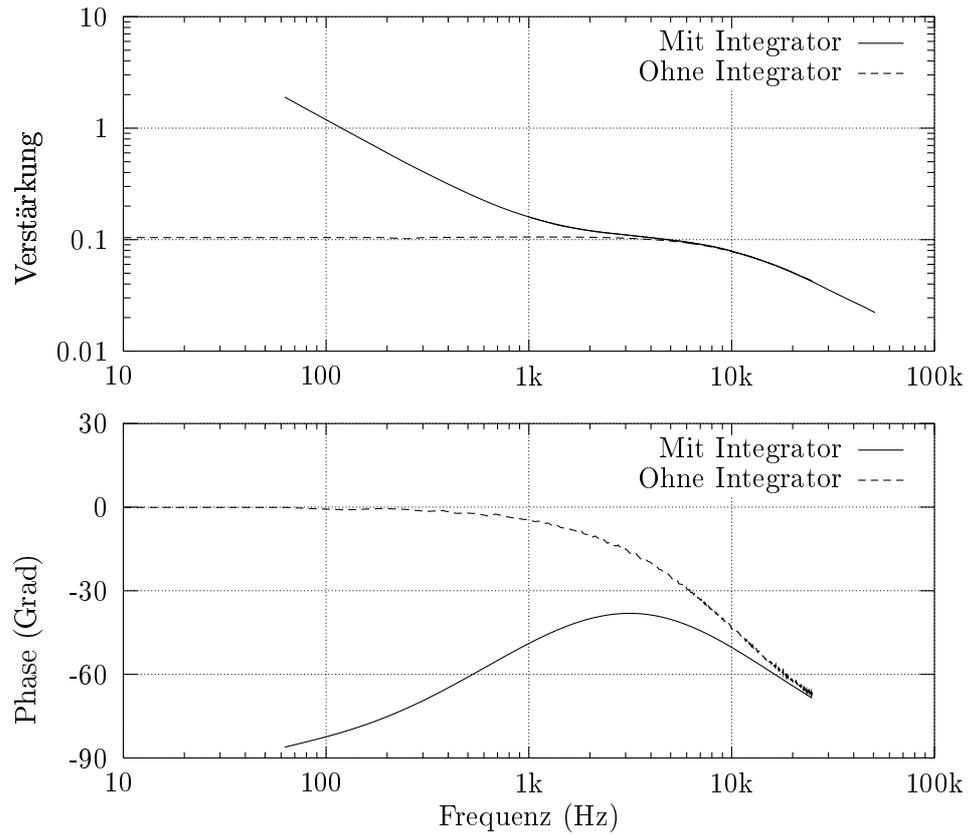


Abbildung A.3.: Frequenzgang Regelverstärker, Piezozweig, gemessen für eine typische Einstellung der Gesamtverstärkung. Bei eingeschaltetem Integrator (siehe Schaltung in Abbildung A.1 auf der vorherigen Seite) steigt die Verstärkung für niedrige Frequenzen an. Ein Tiefpass am Ausgang vermindert die Verstärkung für Frequenzen oberhalb von 10 kHz

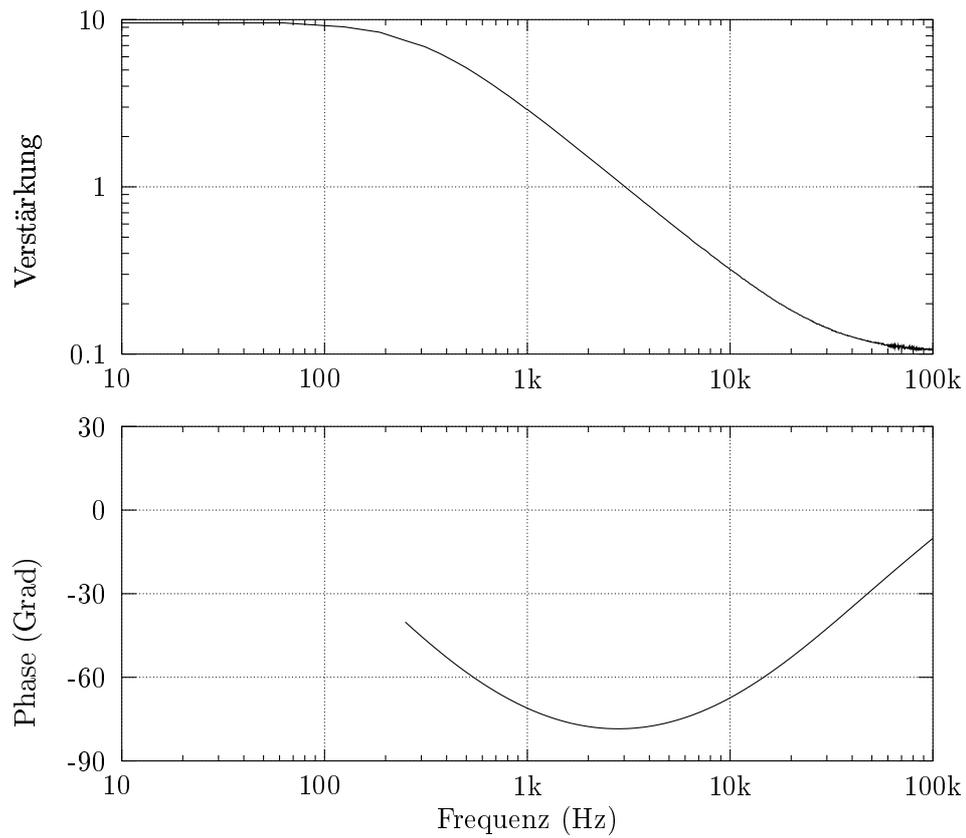


Abbildung A.4.: Frequenzgang Regelverstärker, Stromzweig. Nicht gezeigt ist der Anstieg der Verstärkung für Frequenzen ab 470 kHz.



# Literaturverzeichnis

- BARGER, R. L., M. S. SOREM und J. L. HALL. *Appl. Phys. Lett.*, **22**, 1973, S. 573
- BECHTER, W. *Frequenzstabilisierung eines Diodenlasers bei 866nm zur Spektroskopie an  $Ca^+$ -Ionen*. Diplomarbeit, Universität Innsbruck, 1998
- BJORKLUND, G. C., M. D. LEVENSON, W. LENTH und C. ORTIZ. *Frequency modulation (FM) spectroscopy*. *Appl. Phys. B*, **32**, 1983, S. 142
- BLATT, R. *Laser cooling of trapped ions*. In *Fundamental Systems in Quantum Optics*, herausgegeben von J. Dalibard, J. M. Raimond und J. Zinn-Justin, Elsevier Science Publishers B. V., Les Houches, Session LIII, 1990, Course 4. 1992, S. 253–286
- BOLLE, J. *Spektroskopie und nichtklassische Fluoreszenzeigenschaften von einzelnen gespeicherten  $Ba^+$ -Ionen*. Dissertation, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, 1998
- BOSCH, K. *Elementare Einführung in die angewandte Statistik*, Band 27 von *vieweg studium, Basiswissen*. Vieweg, vierte Auflage, 1987
- BOSCH, K. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Band 25 von *vieweg studium, Basiswissen*. Vieweg, fünfte Auflage, 1993
- BRONŠTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAEV, G. MUSIOL und H. MÜHLIG. *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, Frankfurt am Main, 1995
- CHAMPENEY, D. C. *Fourier Transforms and their Physical Applications*. Academic Press, 1973
- CIRAC, J. I. und P. ZOLLER. *Quantum computations with cold trapped ions*. *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 1995, S. 4091
- COHEN, L. *Time-Frequency-Analysis*. Prentice Hall PTR, 1995
- DEMTRÖDER, W. *Laserspektroskopie*. Springer-Verlag, 1993
- DREVER, R. W. P., J. L. HALL, F. V. KOWALSKI, J. HOUGH, G. M. FORD, A. MUNLEY und H. WARD. *Laser phase and frequency stabilisation using an optical resonator*. *Appl. Phys. B*, **31**, 1983, S. 97–105

- ELSNER, F. *Ein-Seitenband-Verfahren zur Frequenzdurchstimmung eines Dauerstrich-Farbstofflasers*. Diplomarbeit, Universität Hamburg, 1988
- FLEMING, M. W. und A. MOORADIAN. *Fundamental line broadening of single-mode (GaAl)As diode lasers*. Appl. Phys. Lett., **38**, 1981, S. 511
- GERTHSEN, C. und H. VOGEL. *Physik*. Springer, 19. Auflage, 1997
- GLATZEL, K. *Ein Diodenlasersystem bei 866,2 nm zur Spektroskopie an gespeicherten  $Ca^+$ -Ionen*. Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1996
- GOSH, P. K. *Ion Traps*. Clarendon Press, Oxford, 1995
- HELMCKE, J., S. A. LEE und J. L. HALL. *Dye laser spectrometer for ultrahigh spectral resolution: design and performance*. Appl. Opt., **21** (9), 1982, S. 1686–1694
- HENRY, C. H. *Theory of the linewidth of semiconductor lasers*. IEEE J. Quantum Electron., **QE-18** (2), 1982, S. 259–264
- HILOCO, L., D. TOUAHRI, F. NEZ und A. CLAIRON. *Narrow-line, low-amplitude noise semiconductor laser oscillator in the 780 nm range*. Rev. Sci. Inst., **65** (12), 1994, S. 3628–3633
- HÄNSCH, T. und A. SCHAWLOW. *Cooling of gases by laser radiation*. Opt. Commun., **13**, 1975, S. 68
- HORVATH, G. Z. K., R. C. THOMPSON und P. L. KNIGHT. *Fundamental physics with trapped ions*. Contemporary Physics, **38** (1), 1997, S. 25–48
- HOUSSIN, M., M. JARDINO und M. DESAINTEFUSCIEN. *Comparison of the calculated transient responses of a Fabry-Perot used in reflection and in transmission*. Rev. Sci. Inst., **61** (11), 1990, S. 3348–3352
- HUBER, A., T. UDEM, B. GROSS, J. REICHERT, M. KOUROGIE, K. PACHUCKI, M. WEITZ und T. W. HÄNSCH. *Hydrogen-Deuterium 1S-2S isotope shift and the structure of the deuteron*. Phys. Rev. Lett., **80** (3), 1998, S. 468–471
- JAMES, D. *Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation*. Appl. Phys. B, **66**, 1998, S. 181–190
- KOUROGI, M., B. WIDIYATOMOKO, Y. TAKEUCHI und M. OHTSU. *Limit of optical-frequency comb generator due to material dispersion*. IEEE J. Quantum Electron., **31** (12), 1995
- KUNZE, S., S. WOLF und G. REMPE. *Measurement of fast frequency fluctuations: Allan variance of a grating-stabilized diode laser*. Opt. Commun., **128**, 1996, S. 269–274

- LEIBFRIED, D., D. MEEKHOF, B. KING, C. MONROE, W. ITANO und D. WINELAND. *Experimental preparation and measurement of the state of motion of a trapped atom*. Journal of Modern Optics, **44**, 1997, S. 2485
- LEIBFRIED, D., D. M. MEEKHOF, B. E. KING, C. MONROE, W. M. ITANO und D. J. WINELAND. *Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom*. Phys. Rev. Lett., **77**, 1996, S. 4281
- MANDEL, L. und E. WOLF. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, 1995
- MONROE, C., D. MEEKHOF, B. KING, W. ITANO und D. WINELAND. *Demonstration of a fundamental quantum logic gate*. Phys. Rev. Lett., **75**, 1995, S. 4714
- MONROE, C., D. MEEKHOF, B. KING, D. LEIBFRIED, W. ITANO und D. WINELAND. *Manipulating the motion of a single trapped atom*. Accounts of Chemical Research, **29**, 1996, S. 585
- NÄGERL, H., W. BECHTER, J. ESCHNER, F. SCHMIDT-KALER und R. BLATT. *Ion strings for quantum gates*. Appl. Phys. B, **66**, 1998a, S. 603–608
- NÄGERL, H.-C. *Ion strings for quantum computation*. Dissertation, Institut für Experimentalphysik der Universität Innsbruck, 1998
- NÄGERL, H. C., D. LEIBFRIED, H. ROHDE, G. THALHAMMER, J. ESCHNER, F. SCHMIDT-KALER und R. BLATT. *Laser addressing of individual ions in a linear trap*, 1998b. Wird veröffentlicht
- OBERST, H. *Resonance fluorescence of single barium ions*. Diplomarbeit, Institut für Experimentalphysik, Universität Innsbruck, 1999
- PETERMANN, K. *Laser diode modulation and noise*. Kluwer Academic Publishers, 1988
- REISS, D., A. LINDNER und R. BLATT. *Cooling of trapped multilevel ions: A numerical analysis*. Phys. Rev. A, **54** (6), 1996, S. 5133–5140
- RICCI, L., M. WEIDEMÜLLER, T. ESSLINGER, A. HEMMERICH, C. ZIMMERMANN, V. VULETIC, W. KÖNIG und T. W. HÄNSCH. *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*. Opt. Commun., **117**, 1995, S. 541–549
- RUTMAN, J. *Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources: fifteen years of progress*. Proc. IEEE, **66** (9), 1978, S. 1048–1075
- SANTARELLI, G., A. CLAIRON, S. LEA und G. M. TINO. *Heterodyne optical phase-locking of extended-cavity semiconductor lasers at 9 GHz*. Opt. Commun., **104**, 1994, S. 339–344

- SAUTER, T., W. NEUHAUSER, R. BLATT und P. E. TOSCHEK. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1986, S. 1696
- SCHAWLOW, A. L. und C. H. TOWNES. *Infrared and optical Masers*. *Phys. Rev.*, **112**, 1958, S. 1940–1949
- SCHENZLE, A., R. G. DEVOE und R. G. BREWER. *Phase-modulation laser spectroscopy*. *Phys. Rev. A*, **25** (5), 1982, S. 2606–2621
- SCHMIDT, O., K.-M. KNAAK, R. WYNANDS und D. MESCHEDE. *Cesium saturation spectroscopy revisited: How to reverse peaks and observe narrow resonances*. *Appl. Phys. B*, **59**, 1994, S. 167–178
- SCHUBERT, M., I. SIEMERS, R. BLATT, W. NEUHAUSER und P. TOSCHEK. *Phys. Rev. A*, **52** (4), 1995, S. 2994
- SHOR, P. W. *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer*. *SIAM J. Computing*, **26**, 1997, S. 1484–1509
- TELLE, H. R. und H. LI. *Phase-locking of laser diodes*. *Electron. Lett.*, **26** (13), 1990, S. 858–859
- TELLE, H. R., D. MESCHEDE und T. W. HÄNSCH. *Realization of a new concept for visible frequency division: phase locking of harmonic and sum frequencies*. *Opt. Lett.*, **15** (10), 1990, S. 532–534
- UDEM, T. *Phasenkohärente optische Frequenzmessung am Wasserstoffatom. Bestimmung der Rydberg-Konstanten und der 1S Lamb-Verschiebung*. Dissertation, Universität München, 1997
- UDEM, T., A. HUBER, B. GROSS, J. REICHERT, M. PREVEDELLI, M. WEITZ und T. W. HÄNSCH. *Phase-Coherent measurement of the hydrogen 1S-2S Transition Frequency with an optical frequency interval divider chain*. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (14), 1997, S. 2646–2649
- WIEMANN, C. E. und L. HOLLBERG. *Using diode lasers for atomic physics*. *Rev. Sci. Inst.*, **66** (1), 1991, S. 1–20
- WINELAND, D. J. und H. G. DEHMELT. *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **20**, 1975, S. 637