

# Kontrolle der Einphotonenemission eines einzelnen $\text{Ca}^+$ -Ions

Diplomarbeit

zur Erlangung des Magistergrades  
an der  
Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

vorgelegt von

**Christian Maurer**

durchgeführt am Institut für Experimentalphysik  
unter der Leitung von  
o. Univ. Prof. Dr. R. Blatt

Innsbruck  
April 2004



# Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	v
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Einleitung und Motivation . . . . .	1
1.2 Realisierung der Einzelphotonenquelle . . . . .	2
<b>2 Wechselwirkung von Licht mit Materie</b>	<b>7</b>
2.1 Zwei-Niveau-Atom, Drehwellennäherung . . . . .	7
2.2 Drei-Niveau-System im elektromagnetischen Feld . . . . .	9
2.3 Dichtematrixformalismus, dissipative Prozesse . . . . .	10
<b>3 Besetzungstransfer in Drei-Niveau-Systemen</b>	<b>13</b>
3.1 Inkohärente Anregung . . . . .	13
3.2 Kohärente Anregung . . . . .	14
3.3 Adiabatische Anregung . . . . .	16
<b>4 Experimentelle Parameter</b>	<b>19</b>
4.1 Fangen eines einzelnen Ions . . . . .	19
4.1.1 Prinzip der Paul Falle . . . . .	19
4.1.2 Abschätzung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit . . . . .	21
4.2 Kopplung an den Resonator . . . . .	21
4.2.1 Eigenschaften des quantenmechanischen $^{40}\text{Ca}^+$ Ions . . . . .	22
4.2.2 Zeemanaufspaltung . . . . .	23
4.2.3 Resonatoreigenschaften . . . . .	23
4.2.4 Kopplungsstärke . . . . .	25
4.3 Knoten-Bauch Lokalisation . . . . .	29
4.4 Laserstrahlgeometrie, Präparation in den Anfangszustand. . . . .	29
<b>5 Modell mit Zeeman-Aufspaltung</b>	<b>33</b>
5.1 Erläuterung des Simulationsprogramms . . . . .	33
5.1.1 Beschreibung des Prozesses . . . . .	33
5.1.2 Liouvilleoperator . . . . .	37
5.1.3 Analyse . . . . .	40
5.1.4 Experimentell zugängliche Parameter . . . . .	41
5.2 Ramanprozess . . . . .	43
5.2.1 Effektives Zwei-Niveau-System . . . . .	44
5.2.2 Analyse des Ramanprozesses . . . . .	44
5.3 Adiabatischer Prozess . . . . .	47
5.3.1 Adiabatische Bedingung . . . . .	48

5.3.2	Gefundene Relationen der Größen . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>53</b>
6.1	Vergleich von Ramanresonanz und adiabatischem Prozess . . . . .	53
6.1.1	Idealer Ramanprozess . . . . .	54
6.1.2	Idealer adiabatischer Prozess . . . . .	58
6.1.3	Realer Ramanprozess . . . . .	62
6.1.4	Realer adiabatischer Prozess . . . . .	64
6.1.5	Auswahl des effektiveren Prozesses für das Experiment . . . . .	69
6.1.6	Abhängigkeit der Größen $P_{em}$ , $t_{em}$ und $\beta$ von der Kopplungsstärke .	72
6.2	Einzelphotonenpuls . . . . .	75
6.2.1	Rückpumpmechanismus . . . . .	75
6.2.2	Hintereinanderausführung der Pumppulse . . . . .	77
6.2.3	Korrelationsfunktion . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung/Ausblick</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Simulationsprogramm</b>	<b>89</b>
A.1	Besetzungstransfer . . . . .	89
A.1.1	Raman - Programm für den Ramanprozess . . . . .	89
A.1.2	Hamilton - Hamiltonoperator . . . . .	90
A.1.3	Liouville - Liouvilleoperator . . . . .	92
A.1.4	Zeitentwicklung . . . . .	92
A.1.5	Hilfsprogramme . . . . .	93
A.2	Einphotonenpuls . . . . .	95
A.2.1	Photonenpuls . . . . .	95
A.2.2	Hamilton - Hamiltonoperator . . . . .	97
A.2.3	Liouville - Liouvilleoperator . . . . .	99
A.2.4	Zeitentwicklung . . . . .	99
A.2.5	Hilfsprogramme . . . . .	100
	<b>Danksagung</b>	<b>105</b>

# Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird an einem numerischen Modell die Möglichkeit zur Erzeugung von einzelnen Photonen in einem optischen Resonator beschrieben. In einem Hochfinesse Resonator koppelt ein Ion an eine Mode des elektromagnetischen Feldes. Durch diese Kopplung wird eine Schnittstelle zwischen einem Ion und einem Photon realisiert, wodurch die quantenmechanische Information, die zuerst dem Atom zu eigen war, dem Photon übertragen wird. Wird ein Photon aus dem Resonator emittiert, kann es außerhalb weiterverarbeitet werden, und man hat somit eine Schnittstelle zur Aussenwelt geschaffen.

Unter Zuhilfenahme des Dichtematrixformalismus wird in der Drehwellennäherung die zeitliche Entwicklung der Besetzungen der atomaren Niveaus studiert. Anhand der Resultate werden der Stimulierte-Raman-Adiabatische Übergang (STIRAP) mit dem Ramanprozess verglichen. Die Simulation der beiden Prozesse beinhaltet neben der spontanen Emission aus den einzelnen Niveaus auch Verluste durch die Linienbreite der Laser und Abweichungen von der Resonanzbedingung. Aus den numerischen Daten werden experimentelle Anforderungen abgeleitet und deren Realisierung geprüft.



# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Einleitung und Motivation

Die Frage nach der Beschaffenheit von Licht und Materie ist eine Frage, die die Menschheit schon seit Jahrhunderten beschäftigt. Die Philosophen des Altertums postulierten eine Korpuskulartheorie des Lichtes, wodurch die geradlinige Ausbreitung und die Reflexion an einem Spiegel erklärt werden konnten. In der Neuzeit findet diese Theorie mit Newton einen ihrer berühmtesten Verteidiger, der viele Erscheinungen des Lichtes mit der Korpuskulartheorie erklärte. Die Entdeckung der Interferenz- und Beugungserscheinungen durch Young zu Beginn des 19. Jahrhunderts lenkte die Aufmerksamkeit auf die Wellentheorie des Lichtes. Die Interferenzerscheinung konnte jedoch nur durch wellenartiges Licht erklärt werden. In der Folge wurde die Optik in die Theorie der Elektrodynamik eingebettet, sowie die Lichtgeschwindigkeit mit der elektrischen und magnetischen Feldkonstante in Beziehung gesetzt, und die Polarisation des Lichtes konnte durch den Vektorcharakter des elektromagnetischen Feldes gedeutet werden. Im Jahre 1900 stellte Planck die Hypothese der Quantisierung der Energie auf, um damit eine Theorie für die Hohlraumstrahlung, die mit der klassischen Theorie nicht erklärt werden kann, zu entwickeln. Für eine elektromagnetische Welle der Frequenz  $\nu$  sind die einzig möglichen Energien ganzzahlige Vielfache der kleinsten Energieeinheit  $h\nu$ . Einstein verallgemeinerte diese Theorie und schlug 1905 wieder eine Korpuskulartheorie des Lichtes vor. Das Licht ist als ein Strahl von Photonen aufzufassen, die alle die Energie  $h\nu$  besitzen [1]. Damit kann der photoelektrische Effekt erklärt werden. Fast zwanzig Jahre später gelang der Nachweis eines einzelnen Photons durch den Compton - Effekt [2]. Seither muss man zur Beschreibung der Photonen einen Teilchen-Wellen Dualismus heranziehen.

Mit dem Experiment von Brown und Twiss [3] wurde es möglich, die zeitliche Verteilung der Photonen einer Lichtquelle zu messen. Für eine thermische Lichtquelle zeigt sich ein Bündelungseffekt (engl. *bunching*). Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen kurz nacheinander am gleichen Ort eintreffen, ist deutlich erhöht im Vergleich zu dem Fall, dass zwei Photonen in einem großen zeitlichen Abstand ankommen. Für eine ideale Laserquelle ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen mit einem bestimmten zeitlichen Abstand am gleichen Ort eintreffen, für alle Zeitintervalle gleich. Ein anderes Verhalten zeigt das Licht eines Quantenemitters: Bei diesem verschwindet die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen zur selben Zeit am gleichen Ort eintreffen, komplett. Photonen, die ein solches Verhalten zeigen, nennt man Abstand haltende Photonen (engl. *anti-bunching*) [4, 5]. Abstand haltende Photonen wurden erstmals von Kimble et al. [6] 1977 nachgewiesen.

Die Eigenschaften des Quantenemitters ermöglicht eine Lichtquelle, die ein und nur

ein Photon auf ein Triggerereignis hin emittiert. Dieses Photon "auf Bestellung", findet in mehreren Bereichen seine Anwendung. In der Quantenkryptographie [7] wird ein einzelnes Photon zur abhörsicheren Datenkommunikation verwendet. Dabei wird ein Photonenpuls als Schlüssel für eine zu versendende Nachricht eingesetzt. Möchte ein Spion die Nachricht abhören, so muss er den Zustand der einzelnen Photonen messen. Es ist allerdings in der Quantenmechanik nicht möglich, durch eine einzelne Messung an einem einzelnen Photon die gesamte Information des Photons zu erhalten. Möchte der Spion unerkannt bleiben, verschickt er für jedes detektierte Photon ein Neues. Quantenmechanisch ist es nicht möglich, dass das neue Photon in exakt dem selben Zustand präpariert wird, wie das gemessene Photon. Aus diesem Grund misst der Empfänger einen höheren Fehler und kann auf das Mitmischen eines Spions schließen. Einen weiteren Einsatzbereich für die Einzelphotonenpulse bietet der Quantencomputer. Es wurde gezeigt, dass mit der Kombination von Einzelphotonenpulsen und linearen optischen Elementen die grundlegenden Logikoperationen eines Quantencomputers realisiert werden können [8].

In unserer Arbeitsgruppe wird ein  $\text{Ca}^+$ -Ion in einer linearen Paulfalle gespeichert. Das Ion wird durch Laserkühlung in seinen Bewegungsgrundzustand gekühlt. Ein Hochfinesse Resonator koppelt das Ion an eine Mode des elektromagnetischen Feldes. Weiters regt ein gepulster Laser das Ion aus dem Niveau  $S_{1/2}$  in ein höheres Energieniveau an, von wo es verstärkt durch den optischen Resonator in das Niveau  $D_{5/2}$  zerfällt. Durch Einstrahlen weiterer Laser wird das Ion wieder in dem Ausgangszustand  $S_{1/2}$  präpariert, und der Prozess kann nun von neuem beginnen. Besonderes Augenmerk muss dabei auf die Kopplungsstärke des Resonators an das Ion gelegt werden. Die Kopplungsstärke hängt neben atomaren Größen nur vom Volumen des optischen Resonators ab. Dabei muss für eine gute Kopplung ein kleines Volumen erreicht werden.

In einem ersten Experiment wurde die Kopplung des Ions an das elektromagnetische Feld untersucht [9]. In einem weiteren Experiment wurde die Verstärkung der spontanen Emission gemessen [10]. Diese beiden Arbeiten bilden die Grundlage für ein Experiment zur Erzeugung einzelner Photonen, das von Russo [11] aufgebaut wird. Die vorliegende Arbeit vergleicht anhand eines numerischen Modells zwei Prozesse zur Erzeugung einzelner Photonen. Die Simulation für den Besetzungstransfer wird mit realistischen Werten durchgeführt. Neben der spontanen Emission aus den einzelnen Niveaus werden auch Verluste durch Linienbreiten der Laser und Abweichungen von der Resonanzbedingung berücksichtigt.

Im folgenden Abschnitt wird ein kurzer Überblick über aktuelle Experimente zur Erzeugung einzelner Photonen gegeben. Im zweiten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für die Arbeit mit Atomen und Photonen und deren Wechselwirkung aufgezeigt. Ein Überblick über verschiedene Transferprozesse im Drei-Niveau Atom folgt im dritten Kapitel. Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den experimentellen Randbedingungen und den daraus resultierenden Modellparametern. Ein detailliertes Studium des Transferprozesses im Kalziumion findet sich dann in Kapitel fünf, gefolgt von den Simulationen zur Einzelphotonenemission, die im Kapitel sechs zusammengefasst sind.

## 1.2 Realisierung der Einzelphotonenquelle

Ein erster, intuitiver Ansatz lässt vermuten, dass man einzelne Photonen durch Abschwächen einer gepulsten Laserquelle auf ein Photon pro Puls erhält. Dies ist aber nicht möglich, da die Photonenemission einer klassischen Lichtquelle der Poisson-Statistik gehorcht. Die Poisson-Verteilung lässt sich schreiben als:

$$P(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (1.1)$$



mit  $n$  der Anzahl von Photonen und  $\bar{n}$  der mittleren Anzahl von Photonen pro Puls.  $P(n)$  ist die Wahrscheinlichkeit,  $n$  Photonen pro Puls zu erhalten. Schwächt man die Intensität des Laser so weit ab, dass im Mittel nur ein Photon pro Puls emittiert wird, ist die Wahrscheinlichkeit, null Photonen oder ein Photon zu erhalten, jeweils gleich 37%, die Wahrscheinlichkeit, mehr als ein Photon zu erhalten, beträgt aber 26%. Schwächt man die Intensität des Lasers ab, damit man die Wahrscheinlichkeit, zwei Photonen zur selben Zeit zu erhalten verringert, wird die Photonenausbeute wiederum drastisch reduziert.

Zur Erzeugung einer Einphotonenquelle werden drei Komponenten benötigt: ein einzelner Quantenemitter, eine Kontrolle des Emissionsvorgangs und eine "Schnittstelle zur Außenwelt". Ein Quantenemitter muss in der Lage sein, einzelne Photonen getrennt nacheinander zu emittieren. Abstandhaltende Photonen wurden für viele Quantenemitter nachgewiesen. Darunter fallen einzelne Atome, Ionen, Moleküle, Farbzentren und Halbleiterquantenpunkte [12] - [23]. Eine weitere Bedingung für eine deterministische Einphotonenquelle wird erfüllt, wenn die Emission einem Startsignal folgt und innerhalb eines kleinen Zeitfensters geschieht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Einphotonenprozess setzt sich aus der Anregung des Quantenemitters durch das Startsignal und der anschließenden Emission zusammen. Das emittierte Photon wird aber in der Regel in alle Raumrichtungen abgestrahlt, weshalb es notwendig ist, die Emissionswahrscheinlichkeit in eine bestimmte Richtung zu erhöhen. In den meisten Experimenten geschieht dies durch einen Resonator, der als Schnittstelle zur Außenwelt dient.

Die erste Realisierung einer deterministischen Erzeugung einzelner Photonen gelang 1999 Kim [13] nach einer Methode, die von Imamoglu und Yamamoto [12] vorgeschlagen wurde. Sie verwendeten als Quelle einen Halbleiter p-i-n Übergang, mit einem intrinsischen Quantenfilm als aktive Schicht, wobei der Quantenfilm durch Tunnelbarrieren von den n- und p- Schichten getrennt war. Dabei nutzt man die Coulomb-Blockade für den Elektronen- und Löchertunnelprozess aus, die sicherstellt, dass bei Anlegen eines elektrischen Spannungspulses jeweils nur ein Elektron bzw. Loch in den Quantenfilm tunnelt, und dadurch nur ein einzelnes Photon bei der Rekombination erzeugt werden kann. Thermische Energie kann die Coulomb-Blockade aufheben, weshalb sich diese Anwendung auf tiefe Temperaturen beschränkt. Auch durch Anlegen einer elektrischen Spannung kann die Coulomb-Blockade aufgehoben werden, wodurch man ein Steuerelement erhält, mit dem man den Tunnelprozess, und damit die Emission eines Photons, steuern kann. Ein anderes Experiment mit Halbleitermaterialien verwendet Halbleiter-Quantenpunkte [14] zur Erzeugung einzelner Photonen. Dabei wird ein Halbleitermaterial mit kleiner Bandlücke (z.B.: InAs) in ein Halbleitermaterial mit größerer Bandlücke (z.B.: GaAs) eingebettet. Durch den dreidimensionalen Ladungsträgereinschluss besitzen die Quantenpunkte diskrete Energieniveaus. Bei einer inkohärenten, optischen Anregung des Halbleitermaterials weit über der Bandkante werden freie Ladungsträger erzeugt, die innerhalb von 35 ps von den Quantenpunkten eingefangen werden und in die niedrigsten Energiezustände relaxieren. Die hohe Ladungsträgerkonzentration und die Coulombwechselwirkung bewirken, dass sich nach Einfangen der Ladungsträger in den Quantenpunkten Exzitonen ausbilden. In einem Kaskadenprozess zerfallen höher angeregte Exzitonen in niedriger angeregte Exzitonen, bis als letztes ein einzelnes Elektronen-Loch Paar rekombiniert. Ist die Rekombinationszeit der freien Ladungsträger in der Barriere wesentlich kürzer als der gesamte Kaskadenprozess, so ist die Wahrscheinlichkeit eines erneuten Ladungsträgereinfangs gering, und es wird pro Anregungspuls genau ein Photon mit der Frequenz des letzten Rekombinationsprozesses detektiert. Mit diesem Experiment wurde zum ersten Mal die Intensitätskorrelationsfunktion für eine gepulst angeregte Quelle gemessen [15, 16]. Eine Anregung des Halbleitermaterials auf elektronischem Weg wurde durch die Gruppe von Pepper nachgewiesen [17].

Eine weitere Möglichkeit einzelne Photonen zu erzeugen, besteht in der Verwendung von

Farbzentren in Kristallen. Ersetzt man im Diamant ein Kohlenstoffatom durch ein Stickstoffatom, so erhält man zwei nichtgebundene Elektronen. Die Erzeugung von Störstellen kann dabei derart erfolgen, dass nur ein einzelnes Stickstoffatom mit einem eingestrahlt Laserlicht wechselwirkt. Das Stickstoffatom und die erzeugte Leerstelle können vereinfacht durch vier Niveaus mit zwei angeregten und zwei Grundzuständen dargestellt werden. Durch gepulste Anregung wird eine Lichtquelle mit einem Photon pro Puls erzeugt. Das Emissionsspektrum des Kristalles hat eine Breite von 120 nm, weshalb die einzelnen Photonen stark in ihrer Frequenz variieren [18] (Abbildung 1.1).

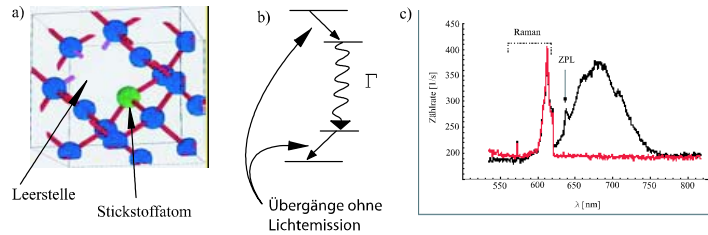


Abbildung 1.1: Das erste Bild zeigt die Leerstelle und das Stickstoffatom im Diamant. Im zweiten Bild wurde das vereinfachte Niveauschema dargestellt. Photonen werden nur beim mittleren Übergang emittiert. Im letzten Bild wird das Spektrum eines Diamanten mit Störstelle (schwarze Kurve) mit jenem ohne Störstelle (rote Kurve) verglichen. In diesem Bild kann man deutlich die Breite des Emissionsspektrums von 120 nm erkennen [18].

Durch das Anregen von Molekülen mit einem Laser lässt sich ebenfalls eine Einphotonenquelle bauen. Das Molekül wird dabei adiabatisch vom Grundzustand in den fluoreszierenden Singlet Zustand gehoben. Sobald es sich nun in diesem befindet zerfällt das Molekül wieder in seinen Grundzustand und emittiert ein Photon. Das System kann durch ein Zwei-Niveau-System beschrieben werden. Indem der anregende Laser über die atomare Resonanzfrequenz durchgestimmt wird, wird die Besetzung vom Grundzustand in das angeregte Niveau gebracht. Dabei folgt man adiabatisch einem der beiden "dressed" Eigenzustände. Die Intensitätskorrelationsfunktion zeigt in diesem Experiment aber eine hohe Wahrscheinlichkeit für einen Zwei-Photonenprozess [19] (Abbildung 1.2).

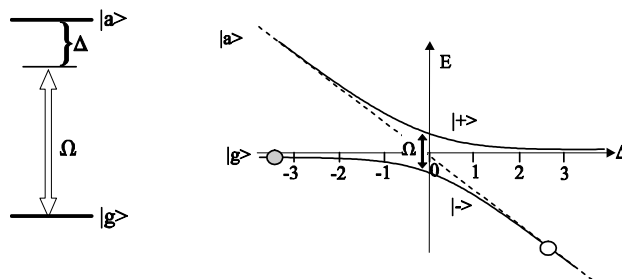


Abbildung 1.2: Koppelt ein intensiver Laser  $\Omega$  mit einer Verstimmung  $\Delta$  das Grundniveau  $|g\rangle$  mit dem angeregten Niveau  $|a\rangle$ , dann sind die Eigenzustände des Systems die "dressed Zustände  $|+\rangle$  und  $|-\rangle$ ". Die beiden Eigenzustände stellen eine Überlagerung der beiden atomaren Niveaus dar:  $|+\rangle = \cos \vartheta |g\rangle + \sin \vartheta |a\rangle$ ,  $|-\rangle = -\sin \vartheta |g\rangle + \cos \vartheta |a\rangle$ , mit  $\vartheta = \tan((\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2})/\Delta)$ . Folgt man dem Zustand  $|-\rangle$  adiabatisch, kann man einen kompletten Besetzungstransfer erreichen [20].

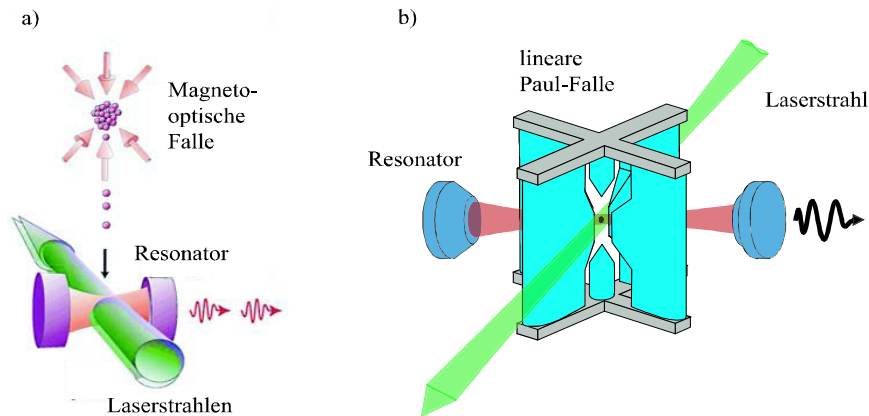


Abbildung 1.3: Zwei mögliche Realisierungen zur Erzeugung einzelner Photonen mit einem Atom bzw. Ion. In a) werden die Atome mit einer magneto-optischen Falle gespeichert. Fällt ein Atom durch den Resonator, kann dieses mit den Laserstrahlen und der Resonatormode wechselwirken [22]. In b) wird ein Ion in einer linearen Paul-Falle gespeichert. Die Wechselwirkung des Ions mit der Resonatormode und den Laserstrahlen erfolgt analog zu a) [9].

Auch ein einzelnes Atom findet als Quantenemitter Verwendung indem man Atome mit zwei Grundzuständen heranzieht. Es reicht, wenn einer der beiden Grundzustände metastabil ist, das heißt, dass seine Lebensdauer wesentlich länger als die Emissionszeit des Prozesses ist. Zudem benötigt man ein angeregtes Niveau, das mit den beiden Grundzuständen koppelt. Für den Emissionsprozess ist es wichtig, dass die Besetzung des oberen Zustandes gering ist, damit die spontane Emission aus diesem Niveau unterdrückt wird. Aus diesem Grund verwendet man für die Anregung einen Ramanprozess. Ein Laserstrahl regt das Atom in das obere Niveau an, das durch die Kopplung eines Resonators in den zweiten metastabilen Zustand zerfällt. Befindet sich das Atom im metastabilen Zustand wird es durch optisches Pumpen in das Ausgangsniveau gebracht, und der Prozess kann von neuem beginnen [21, 22, 23]. Eine wichtige Randbedingung ist in diesem Fall, dass sich immer nur ein Atom im Resonator befindet, damit genau ein Photon emittiert werden kann. Die Realisierung erfolgt durch zwei verschiedene Ansätze: In den Experimenten von Kimble und Rempe [22, 23] wird ein Atomstrahl verwendet. Dabei ist die Zahl der Atome, die pro Zeitintervall mit dem Resonator wechselwirken können, im wesentlichen nach der Poisson-Statistik gegeben. Aus diesem Grund muss der Strahl so stark abgeschwächt werden, dass die Wahrscheinlichkeit, zwei Atome im Resonator zu finden, äußerst klein wird. Dadurch reduziert sich aber auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Atom den Resonator durchquert ( $\sim 5,7\%$  im Experiment von Rempe), und in den meisten Fällen befindet sich kein Atom im Resonator. Die zweite Möglichkeit besteht darin, das Atom in einer Falle im Resonator zu speichern, wodurch sichergestellt wird, dass die Emission eines Photons nur durch dieses eine Atom erfolgen kann. Der Emissionsprozess läuft in beiden Experimenten gleich ab. Ein entscheidender Parameter dieser Experimente stellt die Kopplung des Resonators an den atomaren Übergang dar. Die Kopplung ist dabei umgekehrt proportional zur Wurzel des Resonatorvolumens. Für die gefangenen Atome ist der Resonator durch die Fallengröße, die sich innerhalb des Resonators befindet, begrenzt. Der minimale Abstand der Spiegel ist für das Atomstrahl-Experiment wesentlich geringer. Die Kopplung des Reso-

nators hängt aber auch von der Position des Atoms innerhalb des Resonators ab. Befindet sich das Atom in einem Bauch der Stehwelle des Resonators, ist die Kopplung maximal, in einem Knoten verschwindet die Kopplung aber völlig. Für das Atomstrahl-Experiment ergibt sich die Position rein zufällig, hingegen kann die Position für ein gespeichertes Atom relativ genau bestimmt werden [9, 24].

## Kapitel 2

# Wechselwirkung von Licht mit Materie

Zum Verständnis der Natur komplexer Systeme betrachtet man in der Physik zunächst meist einfache Teilsysteme, die einen Ausschnitt eines größeren Systems repräsentieren. Die Wechselwirkung zwischen dem elektromagnetischen Feld und einem einzelnen Atom stellt das Kernstück des hier beschriebenen Experimentes dar. Vorerst wird das Atom als starr in einer Falle ruhend angenommen. Die atomaren Niveaus werden auf zwei nichtentartete Niveaus reduziert. In der Quantenmechanik wird das elektromagnetische Feld als Überlagerung von einzelnen Feldmoden betrachtet, somit ergibt sich die einfachste Konfiguration als ein Zwei-Niveau-System, das mit einer einzelnen Feldmode wechselwirkt. In Kapitel 2.2 wird das System um ein Niveau erweitert. Anhand des Drei-Niveau-Systems wird der prinzipielle Formalismus zur Beschreibung kleiner, atomarer Systeme erklärt. Es wird eine Methode vorgestellt, die eine formale Beschreibung des Atom-Lichtfeld-Systems ermöglicht.

### 2.1 Zwei-Niveau-Atom, Drehwellennäherung

Der Hilbertraum wird durch die beiden atomaren Niveaus aufgespannt. In Matrixschreibweise lässt sich dieses System, mit der Notation  $g$  für den Grundzustand und  $e$  für den angeregten Zustand, durch [28] die beiden Vektoren

$$u(g) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u(e) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

beschreiben. Der Hamiltonoperator der atomaren Niveaus schreibt sich im Schrödingerbild als:

$$H_{\text{Atom}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z. \quad (2.2)$$

Hier wurde der Energienullpunkt in die Mitte der beiden Energie-Niveaus gelegt, und  $\omega_0$  bezeichnet die atomare Übergangsfrequenz der beiden Niveaus. Die Wechselwirkung mit dem Feld kann im Fall eines Dipolübergangs durch den Wechselwirkungsoperator beschrieben werden:

$$H_{\text{WW}} = \vec{d}(\sigma^+ + \sigma^-)\vec{E} \quad (2.3)$$

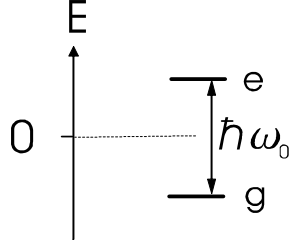


Abbildung 2.1: Energieniveaus bei einem Zwei-Niveau-Atom. Die Energiedifferenz der beiden Niveaus beträgt  $\hbar\omega_0$ . Der Energienullpunkt wurde in die Mitte der beiden Niveaus gelegt.

mit  $\vec{d}$  dem Dipoloperator, der die Stärke der Kopplung zwischen Feld und Atom angibt. Die Auf- und Absteigeoperatoren für das Atom lassen sich in Matrixform schreiben als

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Der Vektor  $\vec{E}$  ist der Feldoperator des elektromagnetischen Feldes. Der quantisierte Feldoperator für eine einzelne Mode ist [29]:

$$\hat{E}(r, t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}} \vec{\epsilon} \{ \hat{a} \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{a}^\dagger \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \} \quad (2.5)$$

$V$  entspricht dem Modenvolumen,  $\vec{\epsilon}$  dem Einheitsvektor, der die Polarisationsrichtung angibt.  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$  sind die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für die Feldmode. Das gesamte Strahlungsfeld erhält man, indem man den Feldoperator über die beiden Polarisationsrichtungen summiert und über alle möglichen Moden integriert. In dieser Arbeit wird aber immer nur mit einer einzelnen Feldmode gerechnet, was wegen der Ankoppelung des Atoms an nur eine Resonatormode gerechtfertigt ist. Der gesamte Hamiltonoperator ergibt sich zu:

$$H = H_A + H_{\text{Feld}} + H_{\text{WW}} \quad (2.6)$$

wobei  $H_{\text{Feld}}$  der Hamiltonoperator des Feldes ist. Das Feld kann als Überlagerung von harmonischen Oszillatoren betrachtet werden. Der Hamiltonoperator eines eindimensionalen harmonischen Oszillators lässt sich schreiben als

$$H_{\text{Feld}} = \hbar\omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.7)$$

Betrachtet man nur ein Atom, das in einer Falle gespeichert ist, kann in einer ersten Näherung die Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes am Ort des Atoms vernachlässigt werden, da  $a_{\text{Bohr}}/\lambda \sim 10^{-4}$  ist. Eine näherungsweise Berechnung des Besetzungstrfers lässt sich mit der sogenannten Drehwellennäherung bewerkstelligen [29]. Für die Drehwellennäherung muss die Zeitskala des Besetzungstrfers mit der Schwingungsperiode des elektrischen Feldes verglichen werden. Der Besetzungstrfer findet innerhalb von  $10^{-7}$ s statt, hingegen oszilliert das Feld mit einer Frequenz von  $10^{15}$ s $^{-1}$ . Für die Besetzung der einzelnen Niveaus bedeutet dies, dass Terme, die eine Frequenz größer als  $2\omega$  beinhalten, vernachlässigt werden können, da sie sich im Mittel zu null ergeben. Für die zeitliche Entwicklung der Besetzungen müssen nur die Differenzen zwischen der atomaren Übergangsfrequenz und der anregenden Laserfrequenz betrachtet werden. Im Drei-Niveau-System tauchen zusätzlich die Differenzen zwischen den einzelnen atomaren Übergangsfrequenzen auf. In diesem

Fall ist die Drehwellennäherung nur dann gültig, wenn diese Differenzen in derselben Größenordnung wie die Lichtfrequenzen auftreten. Die einzelnen Niveaus müssen daher einen großen energetischen Abstand voneinander haben.

Mit der Drehwellennäherung lässt sich der Wechselwirkungsteil schreiben als [29]:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \hbar \Omega \{ \hat{a}^\dagger \sigma^- \exp(-i\omega t) + \hat{a} \sigma^+ \exp(i\omega t) \} \quad (2.8)$$

mit der Rabifrequenz

$$\Omega = \frac{\vec{E} \vec{d}}{2\hbar} = e \sqrt{\frac{\omega}{2\epsilon_0 \hbar V}} \vec{\epsilon} \cdot \vec{d}. \quad (2.9)$$

Hierbei wurden Terme, die mit einer Frequenz größer als  $2\omega$  rotieren, vernachlässigt, da sie zu schnell oszillieren und im zeitlichen Mittel null ergeben [29].

Transformiert man nun das System noch in das Wechselwirkungsbild mit der unitären Transformation  $U = e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t}$ , so nimmt der Hamiltonoperator  $H_I = U^\dagger H U$  die Form

$$H_I = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & \Delta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

an [30]. Dabei wurde für die Verstimmung der Laserfrequenz von der atomaren Übergangsfrequenz folgende Konvention gewählt:  $\Delta = \omega_A - \omega_L$ , das heißt, für rotverstimmtes Laserlicht ist die Verstimmung positiv.

## 2.2 Drei-Niveau-System im elektromagnetischen Feld

Vergrößert man den Hilbertraum um eine Dimension, indem man ein weiteres atomares Niveau mitberücksichtigt, ergeben sich mehrere mögliche Konfigurationen für eine Kopplung der einzelnen Niveaus miteinander. Im Drei-Niveau-System muss die Drehwellennäherung mit Vorsicht angewendet werden. Die Drehwellennäherung gilt nur dann, wenn alle Summen und Differenzen der atomaren Übergangsfrequenzen mindestens in der Größenordnung der Lichtfrequenzen auftreten. Dies ist für das Kalziumion der Fall, weshalb weiterhin diese Näherung verwendet wird. Eine weitere Einschränkung wird gemacht, indem man nur Übergänge zwischen  $E_1 \leftrightarrow E_2$  und  $E_2 \leftrightarrow E_3$  erlaubt. Für den später betrachteten Fall ist eine Kopplung der Niveaus  $E_1 \leftrightarrow E_3$  ohne Bedeutung. Strahlt man zwei Lichtfelder nahe der atomaren Übergangsfrequenz ein, ergeben sich drei mögliche Konfigurationen [30] (siehe Abbildung 2.2). Der Energienullpunkt wurde immer in das Niveau 2 gelegt. Im Leiter-System zerfällt das Atom in einem Kaskadenprozess vom Zustand  $|3\rangle$  über den Zustand  $|2\rangle$  in den Grundzustand  $|1\rangle$ . Die Anregung erfolgt ebenfalls stufenweise, das heißt, es gibt keinen direkten Übergang zwischen  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$ . Das  $\Lambda$ -System besitzt zwei Grundzustände  $|1\rangle, |3\rangle$  und einen angeregten Zustand  $|2\rangle$ . Im Gegensatz dazu hat das V-System zwei angeregte Zustände  $|1\rangle, |3\rangle$  und einen Grundzustand  $|2\rangle$ . Wählt man die Verstimmung als Differenz der atomaren Übergangsfrequenzen von den Frequenzen der Lichtfelder  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , so ergeben sich für das  $\Lambda$  System die Relationen:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (E_2 - E_1)/\hbar - \omega_1 \\ \Delta_3 &= (E_2 - E_3)/\hbar - \omega_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

und der Hamiltonoperator schreibt sich mit der Basis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

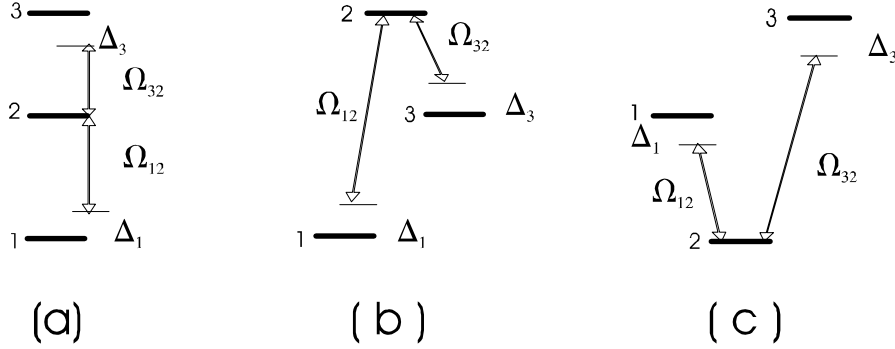


Abbildung 2.2: Schematisches Diagramm möglicher 3-Niveau Anordnungen: (a)  $\Xi$ , (b)  $\Lambda$ , (c)  $V$ . Die Rabifrequenzen der einstrahlenden Laser werden mit  $\Omega_{12}$  und  $\Omega_{32}$  symbolisiert, die Verstimmung der Rabifrequenz von der atomaren Übergangsfrequenz ist  $\Delta_1$  bzw.  $\Delta_3$ .

im Wechselwirkungsbild als [30]:

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 2\Delta_1 & \Omega_{12}^* & 0 \\ \Omega_{12} & 0 & \Omega_{32}^* \\ 0 & \Omega_{32} & 2\Delta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Die Rabifrequenzen ergeben sich aus dem Produkt der Dipolmatrixelemente der jeweiligen Übergänge mit den Feldstärken der Laserfrequenzen.

### 2.3 Dichtematrixformalismus, dissipative Prozesse

Bisher wurde das System in einem reinen Zustand betrachtet. Dabei wurden nur die Wechselwirkungen der Zustände mit dem eingestrahlt Strahlungsfeld dargestellt, aber keine Wechselwirkungen des Atoms mit den Vakuummoden des elektromagnetischen Feldes. Diese Wechselwirkung führt zu einem spontanen Zerfall des angeregten Niveaus, und damit geht der reine Zustand in ein Zustandsgemisch über. Eine exakte Beschreibung der Wechselwirkung des Atoms mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld erfordert, dass man sämtliche Moden des Feldes berücksichtigen muss, um weiterhin in einem reinen Zustand zu bleiben. Mithilfe des Dichtematrixformalismus ist es möglich, nur die atomaren Niveaus zu betrachten. Für eine exakte Berechnung müsste man in der Dichtematrix die unendliche Anzahl der Feldmoden berücksichtigen. Die Dichtematrix des Gesamtsystems, bestehend aus den atomaren Niveaus und den Feldmoden, kann reduziert werden, indem man die Spur über die Einträge des Strahlungsfeldes berechnet. Die Wirkung der einzelnen Vakuummoden wird in diesem Fall summiert, und als gesamte Wirkung des Feldes betrachtet.

Man führt den Dichteoperator wie folgt ein [1]:

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \quad (2.14)$$

mit  $\sum_k p_k = 1$ .  $k$  bezeichnet die Zustände des Systems, die mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p_k$  auftreten,  $|\Psi_k\rangle$  ist ein Zustandsvektor des Systems.

Der Erwartungswert eines Operators  $\hat{A}$  ist

$$\langle \hat{A} \rangle = Sp\{\hat{\rho}\hat{A}\} \quad (2.15)$$



und die zeitliche Entwicklung des Systems für einen hermiteschen Hamiltonoperator ist

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.16)$$

Koppelt man das Atom an das Vakuumfeld, so ergibt sich eine Wechselwirkung der beiden Systeme, die mit Hilfe der Störungsrechnung berechnet werden kann. Verwendet man "Fermi's Goldenen Regel", die eine Summation über alle möglichen Moden, die das Feld nach einem Zerfall einnehmen kann, beinhaltet, lässt sich die spontane Emissionsrate berechnen. Diese ergibt sich zu [32]

$$\Gamma_{eg} = \frac{8\pi^2}{3\epsilon_0 \hbar \lambda_{eg}^3} |\vec{\mu}_{eg}|^2 \quad (2.17)$$

mit dem Dipolmatrixelement  $\vec{\mu}_{eg} = \langle e | \vec{\mu} | g \rangle$  und dem atomaren Dipoloperator  $\vec{\mu} = e\vec{d}$ .

Durch die Wechselwirkung des Atoms mit dem Strahlungsfeld wird die Dämpfung des angeregten Niveaus mitberücksichtigt. In diesem Fall ist der gesamte Hamiltonoperator nicht mehr hermitsch. Wenn man den Hamiltonoperator mit der zeitlichen Entwicklung, wie sie in Gleichung 2.16 angegeben wurde, berechnet, verschwindet die gesamte Besetzung des Atoms mit der Zeit [31]. Betrachtet man ein abgeschlossenes System, dann muss aber die Summe der Wahrscheinlichkeiten, das System in einem bestimmten Zustand zu finden, eins ergeben [1]. Die Spur der Dichtematrix muss also für alle Zeiten eins ergeben, da die Diagonalelemente der Dichtematrix die Wahrscheinlichkeit für die Besetzung der einzelnen Niveaus angeben.

Eine Form der Dichtematrix, die auch mit dissipativen Prozessen die Spur erhält, ist die Lindbladform der Mastergleichung [28]:

$$\dot{\rho} = L\rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_j (2A_j \rho A_j^\dagger - \rho A_j^\dagger A_j - A_j^\dagger A_j \rho) \quad (2.18)$$

mit H dem hermiteschen Hamiltonoperator und  $A_j$  einem beliebigen Operator, der einen dissipativen Prozess beschreibt. Der Hamiltonoperator H wird in dieser Form, wie in Gleichung 2.13 angegeben, verwendet. Er enthält also keine Dämpfungsterme. Der Liouvilleoperator L ist ein Superoperator, da er sowohl Operatoren enthält, die von links auf die Dichtematrix wirken, aber auch Terme die von rechts, auf die Dichtematrix wirken. Schreibt man die Dichtematrix in Vektorform, so ist der Liouvilleoperator linear. Diese Form wird später für die Simulation verwendet.

Der Operator für den spontanen Zerfall von  $|2\rangle$  nach  $|1\rangle$  wird in diesem Bild geschrieben als:

$$A_{21} = \sqrt{\Gamma_{21}} |1\rangle\langle 2| \quad (2.19)$$

und für den Zerfall von  $|2\rangle$  nach  $|3\rangle$ :

$$A_{23} = \sqrt{\Gamma_{23}} |3\rangle\langle 2|. \quad (2.20)$$

Die Zerfallsraten lassen sich mit der Gleichung 2.17 berechnen. Die Linienbreite der Laser wird durch die Operatoren

$$A_1 = \sqrt{2\Gamma_1} |1\rangle\langle 1| \quad (2.21)$$

$$A_2 = \sqrt{2\Gamma_2} |3\rangle\langle 3| \quad (2.22)$$

berücksichtigt. Dabei charakterisieren  $\Gamma_1, \Gamma_2$  die Linienbreiten der Laser für den Übergang  $|1\rangle$  nach  $|2\rangle$  bzw.  $|3\rangle$  nach  $|2\rangle$ . Durch Nachrechnen lässt sich leicht zeigen, dass  $-\rho A_{21}^\dagger A_{21} -$

$A_{21}^\dagger A_{21} \rho$  zu dem erwarteten Dämpfungsterm, das heißt, zu der spontanen Zerfallsrate von  $\Gamma_{21}$ , für den ersten Übergang führt. Der Term  $2A_{21} \rho A_{21}^\dagger$  gleicht den Verlust durch die spontane Emission aus, indem er die spontan abgestrahlte Besetzung dem Grundzustand zufügt. Damit bleibt die Dichtematrix normiert.

Für ein  $\Lambda$ -System in einem Resonator ergibt sich somit die Bewegungsgleichung zu [23]:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \frac{\Gamma \cos^2 \Theta}{2}(2\sigma_{12}\rho\sigma_{21} - \rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho) + \frac{\Gamma \sin^2 \Theta}{2}(2\sigma_{32}\rho\sigma_{23} - \rho\sigma_{22} - \sigma_{22}\rho). \quad (2.23)$$

Der Hamiltonoperator wurde in Gleichung 2.13 definiert.  $\Gamma$  ist die gesamte spontane Zerfallsrate aus dem Niveau 2, der Winkel  $\Theta$  gibt das Verzweungsverhältnis für den Zerfall an ( $\tan^2(\theta) = \Gamma_{23}/\Gamma_{21}$ ) und die  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$  sind die Dipolprojektionsoperatoren.

Da die Lindbladform der Mastergleichung 2.18 linear in den Komponenten der Dichtematrix ist [28], kann sie durch eine vektorisierte Dichtematrix umgeschrieben werden. Mit dem Vektor

$$\rho = \left( \rho_{11}, \rho_{12}, \dots, \rho_{(n-1)n}, \rho_{nn} \right), \quad (2.24)$$

der alle Zeilen der Dichtematrix hintereinandergeschachtelt beinhaltet, kann man die Liouvillegleichung in ein lineares Gleichungssystem umschreiben:

$$\frac{d}{dt}\rho_i = \sum_{j=1}^{n^2} M_{ij}\rho_j \quad (2.25)$$

dabei ist  $M$  eine  $n^2 \times n^2$  - Matrix und  $n$  die Dimension des Dichteoperators. Die Matrix  $M$  erhält man direkt aus dem Liouvilleoperator durch Vergleich der Koeffizienten. Diese Gleichungen werden optische Blochgleichungen genannt. Mit der Anfangsbedingung  $\rho(0)$  ergibt sich eine Lösung der Gleichung 2.25 durch

$$\rho(t) = e^{Mt}\rho(0). \quad (2.26)$$

Die Summe der Einträge des Vektors  $\rho$ , die einem Diagonalelement der Dichtematrix entsprechen, ergibt sich in dieser Form zu eins.

## Kapitel 3

# Besetzungstransfer in Drei-Niveau-Systemen

In diesem Kapitel werden mögliche Prozesse für einen Besetzungstransfer im  $\Lambda$ -System beschrieben. Das Ziel ist ein Transferprozess, der in möglichst kurzer Zeit zu einem nahezu vollständigen Besetzungstransfer führt. Die beiden Grundzustände werden als stabil angenommen. Abbildung 3.1 zeigt die relevanten Größen für die weitere Betrachtung. Die beiden Grundzustände werden jeweils durch ein Laserfeld an das obere Niveau gekoppelt, die Kopplungsstärke durch die Rabi-Frequenzen  $\Omega_{12}$  und  $\Omega_{32}$  ausgedrückt. Die Verstimmungen der beiden Laser von der atomaren Übergangsfrequenz hängt von der Art des verwendeten Prozesses ab und wird im einzelnen behandelt. Die Zerfallsrate  $\Gamma$  des angeregten Niveaus teilt sich in die beiden Zerfallsraten  $\Gamma_{21}$  und  $\Gamma_{23}$  auf, die die Gewichtung der beiden Übergänge berücksichtigen. Für die weitere Betrachtung ist immer das Niveau  $|1\rangle$  das Ausgangsniveau, und Niveau  $|3\rangle$  das Zielniveau. Deshalb befindet sich die gesamte Besetzung zu Beginn der Kopplung im Niveau  $|1\rangle$ . Ausgehend von diesem Niveau wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass sich das System nach einer bestimmten Wechselwirkungszeit im Niveau  $|3\rangle$  befindet.

### 3.1 Inkohärente Anregung

Ein möglicher Besetzungstransfer stellt die inkohärente Anregung aus dem Ausgangsniveau dar. Durch optisches Pumpen mit einem intensiven Laser auf den Übergang von  $|1\rangle$  nach  $|2\rangle$  regt man das Atom in den Zustand  $|2\rangle$  an, der spontan zerfällt. Strahlt man zusätzlich einen Laser auf den Übergang von  $|2\rangle$  nach  $|3\rangle$  ein, erhöht man die Übergangsrate für das dritte Niveau. In einem geschlossenem Dreiniveausystem, das heißt, für den Fall dass außer den oben geschilderten Niveaus keine anderen Niveaus eine Rolle spielen, lässt sich mit dieser Methode ein vollständiger Besetzungstransfer erzielen.

In einem realen Atom spalten sich die Niveaus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  in der Regel durch die Feinstruktur in weitere Niveaus auf, die alle spontan besetzt werden können. Diese Zerfallskanäle müssen ebenfalls berücksichtigt werden. Ist die Laserintensität des Übergangs von  $|1\rangle$  nach  $|2\rangle$  hinreichend groß, sodass eine Sättigung des Übergangs erfolgt, dann befinden sich 50 % der Besetzung von Niveau  $|1\rangle$  im Niveau  $|2\rangle$ . Wird der zweite Laser ebenfalls mit hinreichend hoher Intensität eingestrahlt, wird ein Teil der Besetzung des Niveaus  $|2\rangle$  in das Niveau  $|3\rangle$  gepumpt. Für diesen Prozess befinden sich nach der Wechselwirkungszeit typischerweise 50 % im Ausgangsniveau  $|1\rangle$ , 25 % im Niveau  $|3\rangle$ , und die restlichen 25 % verteilen sich auf andere Niveaus [30].

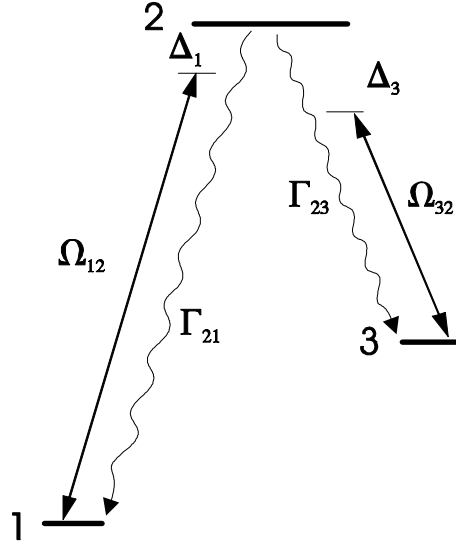


Abbildung 3.1: Niveauschema bei einer  $\Lambda$ -Konfiguration. Die beiden Grundzustände werden als stabil angenommen. Die Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  koppelt die Niveaus 1 und 2 miteinander, die Rabi-Frequenz  $\Omega_{32}$  die beiden Niveaus 3 und 2. Die Emissionsraten wurden auf dieselbe Weise definiert. Die Verstimmung des ersten Lasers von der atomaren Übergangsfrequenz ist  $\Delta_1$ , die Verstimmung des zweiten Lasers  $\Delta_2$ .

Dieser relativ leicht zu realisierende Prozess beinhaltet zwei Schwachpunkte: Zum Einen wird das Niveau  $|3\rangle$  nur mit einer relativ geringen Rate besetzt, zum Anderen erfolgt die Besetzung dieses Niveaus inkohärent. Es lässt sich keine kohärente Superposition erzeugen, wenn die beiden Niveaus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  einen großen Energieabstand haben.

### 3.2 Kohärente Anregung

Betrachtet man zunächst ein Zwei-Niveau-System mit einer Kopplungsstärke  $\Omega \gg \Gamma$ , dann beträgt die Besetzung des angeregten Niveaus e:

$$P_e(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega_{\text{eff}}^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{\text{eff}}}{2}t\right) \quad (3.1)$$

mit  $\Omega_{\text{eff}}^2 = \Delta^2 + \Omega^2$ ,  $\Delta = \omega_0 - \omega$  ist die Verstimmung der Laserfrequenz  $\omega$  von der Übergangsfrequenz  $\omega_0$ . Strahlt man eine resonante Laserfrequenz ein, dann ist  $\Omega_{\text{eff}} = \Omega$  und Gleichung 3.1 vereinfacht sich zu

$$P_a(t) = \sin^2\left(\frac{\Omega}{2}t\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\Omega t)). \quad (3.2)$$

Für resonante Anregung kann man also einen kompletten Besetzungstransfer vom Grundzustand in das obere Niveau erreichen. Dazu müssen die Rabi-Frequenz und die Zeitdauer des eingestrahlichten Lasers folgende Beziehung erfüllen:  $\Omega t = \pi$ . Für einen sogenannten  $\pi$ -Puls befindet sich die gesamte Besetzung im oberen Niveau.

Verstimmt man im 3 Niveausystem die Laserfrequenzen  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_{23}$  weit weg von den atomaren Übergängen, kann man das Niveau  $|2\rangle$  adiabatisch eliminieren. Die Besetzung

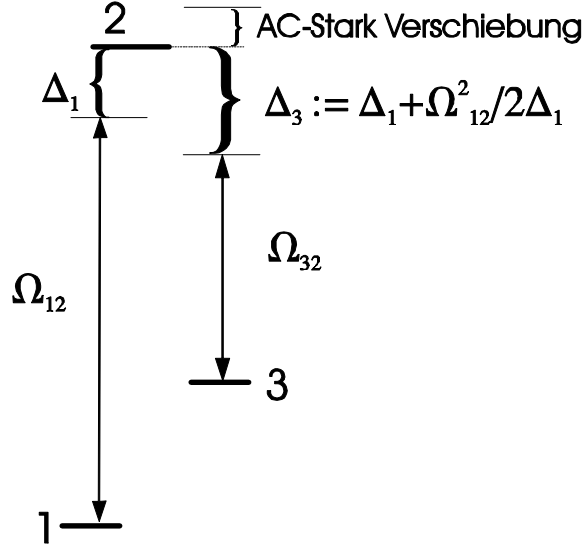


Abbildung 3.2: Die hohe Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  bewirkt eine Kopplung zwischen den beiden Niveaus 1 und 2 und dem Strahlungsfeld. Die resultierenden Energieeigen-niveaus sind gegenüber den ursprünglichen Niveaus verschoben. Für den Raman Prozess muss der zweite Laser resonant auf eines der beiden resultierenden Niveaus eingestrahlt werden.

des Niveaus  $|2\rangle$  ist wegen der großen Verstimmung klein. Aus diesem Grund ist der Beitrag, den dieses Niveau an der Besetzungsänderung der anderen Niveaus hat, gering. Indem man das Niveau  $|2\rangle$  vernachlässigt, erhält man ein effektives 2-Niveau-System. Für den Besetzungstransfer von  $|1\rangle$  nach  $|3\rangle$  kann man damit die bekannten Ergebnisse für ein Zwei-Niveau-Atom verwenden. Das Resultat aus der Störungsrechnung ergibt, für die effektive Kopplung der beiden Niveaus, die Rabi-Frequenz [33]

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega_{12}\Omega_{32}}{2\Delta_1}. \quad (3.3)$$

Die effektive Zerfallsrate kann mit

$$\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma \frac{\Omega_{12}^2}{4\Delta_1^2} \quad (3.4)$$

berechnet werden. Dabei ist  $\Gamma$  die gesamte Emissionsrate des Niveaus  $|2\rangle$ .

Die Kopplung des Strahlungsfeldes mit den atomaren Niveaus erzeugt eine AC-Stark Aufspaltung der Niveaus. Für den Fall  $\Omega_{12} \gg \Omega_{32} \gg \Gamma$  ist diese gleich [34]

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 + \Omega_{12}^2}). \quad (3.5)$$

Für den Fall großer Verstimmung  $\Delta_1 > \Omega_{12}$  kann die zusätzliche Verstimmung durch  $\Omega_{12}^2/(2\Delta_1)$  näherungsweise berechnet werden (siehe Abbildung 3.2).

Strahlt man den zweiten Laser derart ein, dass seine Frequenz resonant mit dem durch den AC-Stark Effekt verschobenem Niveau ist, bedeutet dies für das effektive Zwei-Niveau-System eine resonant eingestrahelte Laserfrequenz. Damit kann man bei kleiner effektiver Zerfallsrate einen kompletten Besetzungstransfer zwischen den Niveaus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  erzeugen.

Die effektive Rabifrequenz ist proportional zu  $\Omega_{12}/\Delta_1$ , die effektive Zerfallsrate dagegen proportional zum Quadrat von  $\Omega_{12}/\Delta_1$ . Damit wird, für große Verstimmungen, die effektive Rabifrequenz größer als die effektive Zerfallsrate, auch wenn die Kopplung  $\Omega_{32}$  des zweiten Übergangs schwach ist.

### 3.3 Adiabatische Anregung

Eine andere Möglichkeit, die Spontanemission aus dem oberen Niveau zu verringern und das Niveau  $|2\rangle$  kaum zu besetzen, besteht in der Technik der stimulierten Adiabatischen-Raman-Passage (STIRAP) [38].

Betrachtet wird der Hamiltonoperator von Gleichung 2.13. Für gleiche Verstimmung  $\Delta_1 = \Delta_3$  sind die Eigenzustände folgende Linearkombinationen der atomaren Zustände:

$$\begin{aligned} |a^+\rangle &= \sin\theta \sin\phi |1\rangle + \cos\phi |2\rangle + \cos\theta \sin\phi |3\rangle \\ |a^0\rangle &= \cos\theta |1\rangle - \sin\theta |3\rangle \\ |a^-\rangle &= \sin\theta \cos\phi |1\rangle - \sin\phi |2\rangle + \cos\theta \cos\phi |3\rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Mischungswinkel  $\theta$  ist durch die Gleichung

$$\tan\theta = \frac{\Omega_{12}}{\Omega_{32}} \quad (3.7)$$

definiert. Der Winkel  $\phi$  ist ohne weitere Bedeutung für die folgende Betrachtung [37]. Man sieht, dass der Zustand  $|a^0\rangle$  keinen Beitrag des angeregten Niveaus beinhaltet. Bleibt man immer in diesem Zustand, wird das obere Niveau nicht besetzt und kann somit auch nicht zerfallen. Aus diesem Grund bezeichnet man diesen Zustand als den Dunkelzustand. Befindet man sich in diesem Zustand und strahlt zwei Laser resonant ein, wird kein Photon aus dem Niveau  $|2\rangle$  emittiert. Durch Verändern des Mischungswinkels  $\theta$  kann man die Besetzung vom Ausgangsniveau  $|1\rangle$  in den Endzustand  $|3\rangle$  transferieren. Für einen Mischungswinkel von  $\theta = 0$  befindet sich die gesamte Besetzung im Niveau  $|1\rangle$ , ändert man die Parameter, sodass sich ein Mischungswinkel von  $\theta = 1$  ergibt, befindet sich die gesamte Besetzung in Niveau  $|3\rangle$ , für den Fall, dass man sich während der gesamten Wechselwirkungszeit im Dunkelzustand befindet.

Die Energie-Eigenwerte der Zustände sind:

$$\begin{aligned} \omega^+ &= \frac{1}{2}(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 + \Omega_{12}^2 + \Omega_{32}^2}) \\ \omega^0 &= \Delta_1 \\ \omega^- &= \frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 + \Omega_{12}^2 + \Omega_{32}^2}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Am Beginn der Wechselwirkung, wenn kein Laser die Niveaus anregt, sind die drei Zustände entartet. Erhöht man die Leistung für den Laser auf dem zweiten Übergang  $\Omega_{32}$  spalten sich die Zustände auf. Außerdem befindet sich die gesamte Besetzung im Dunkelzustand, da der Mischungswinkel  $\theta$  für  $\Omega_{12} = 0$  null ist, und das atomare System im Zustand  $|1\rangle$  präpariert wurde. Langsames Erhöhen des ersten Lasers  $\Omega_{12}$ , und gleichzeitiges Absenken von  $\Omega_{32}$  ändert den Mischungswinkel bis sich dieser für  $\Omega_{32} = 0$  zu eins ergibt.

Die Änderung der Rabifrequenzen muss langsam genug stattfinden, sodass der Zustandsvektor des Atoms dem Zustand  $|a^0\rangle$  adiabatisch folgen kann. Nichtadiabatische Effekte und somit eine Besetzung des oberen Zustandes treten auf, wenn die Zustände  $|a^+\rangle$ ,  $|a^-\rangle$  besetzt werden. Ein Maß für die nichtadiabatische Kopplung zwischen dem Zustand  $|a^0\rangle$ , der die

Besetzungsverteilung beinhaltet, die sich mit der Zeit ändert, und den Zuständen  $|a^+\rangle$ ,  $|a^-\rangle$  ist gegeben durch  $\langle a^\pm | \dot{a}^0 \rangle$  [39]. Die Verluste aus dem Zustand  $|a^0\rangle$  sind klein, wenn dieses Matrixelement im Vergleich zur Aufspaltung der Energieeigenwerte, hervorgerufen durch das Feld, klein ist

$$|\langle a^\pm | \dot{a}^0 \rangle| \ll |\omega^\pm - \omega^0|. \quad (3.9)$$

Setzt man Gleichung 3.6 in Gleichung 3.9 ein, folgt für die adiabatische Bedingung [35]

$$|\dot{\theta}| \ll |\omega^\pm - \omega^0|. \quad (3.10)$$

Man kann einen fast kompletten Besetzungstransfer auch mit einem konstanten Laser auf dem Übergang von  $|3\rangle$  nach  $|2\rangle$  erzielen, wenn die Rabifrequenz des ersten Lasers  $\Omega_{12}$  wesentlich größer wird als die Rabifrequenz des konstanten Lasers  $\Omega_{32}$ . In diesem Fall wird die adiabatische Bedingung leichter erfüllt, bzw. die Energieeigenzustände sind schon zu Beginn der Kopplung des Laser  $\Omega_{12}$  voneinander getrennt, und der atomare Zustand stimmt mit dem Dunkelzustand überein.

Für den adiabatischen Transfer ist es wichtig, dass die Zwei-Photonen-Resonanz erfüllt wird. Aus den Energieeigenwerten erkennt man, dass für kleine Verstimmung die Aufspaltung der Eigenzustände hauptsächlich durch die Rabifrequenzen hervorgerufen wird. Ist die Verstimmung wesentlich größer als die Rabifrequenz, ist ein Eigenzustand weit vom Dunkelzustand entfernt, der andere hingegen fällt fast mit diesem zusammen. Dadurch muss die Änderung der Rabifrequenzen in diesem Fall äußerst langsam erfolgen, damit die adiabatische Bedingung erfüllt wird. Aus diesem Grund macht es für die adiabatische Anregung keinen Sinn, die Laserfrequenzen weit von den atomaren Übergangsfrequenzen wegzustimmen.





# Kapitel 4

## Experimentelle Parameter

Im folgenden Kapitel werden die experimentellen Voraussetzungen analysiert. Im ersten Abschnitt wird die Falle erläutert, die in diesem Experiment verwendet wird. Aus den Fallenparametern kann man die örtliche Einschränkung der Bewegung des Ions berechnen und dadurch abschätzen, auf welchem Bereich das Ion festgehalten werden kann. Im zweiten Abschnitt wird das verwendete Ion beschrieben. Ein wichtiger Teil des Experimentes stellt die Kopplung des Ions an die Resonatormode dar. Dafür wird zuerst das Feld im Resonator beschrieben und aufbauend die Kopplung berechnet. Der letzte Teil dieses Kapitels behandelt die Präparation des Ions in den Anfangszustand und eröffnet einen Vorschlag für die Anordnung der notwendigen Laserstrahlen, um ein einzelnes Photon zu erzeugen, und um das Ion anschließend wieder in den Anfangszustand zurückzupumpen.

### 4.1 Fangen eines einzelnen Ions

In diesem Experiment wird eine lineare Paul Falle verwendet. Die Idee kam von Wolfgang Paul, der 1953 eine Massenselektion von Ionen durch ein Radiofrequenzfeld vorschlug [40]. Die Paul Falle ermöglicht ein Fangen und Speichern von geladenen Teilchen mit einem bestimmten Masse zu Ladungsverhältnis [41, 42], und findet deshalb einen großen Einsatzbereich in der Physik. Mit Hilfe des Einsatzes von Ultrahochvakuum (UHV) kann man die einzelnen Ionen von der Umgebung abschirmen und dadurch die Eigenschaften, etwa des einzelnen Ions, studieren.

#### 4.1.1 Prinzip der Paul Falle

Das Potential für ein dreidimensionales Quadrupolfeld lässt sich schreiben als

$$\phi(r) = \frac{\phi_0}{r^2} \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2. \quad (4.1)$$

Für ein Potential im Vakuum muss  $\Delta\phi = 0$  gelten, damit die Maxwellgleichung erfüllt ist. Die Summe der Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  muss null ergeben, es muss also mindestens ein Koeffizient negativ sein. Deshalb ist der Punkt  $x = y = z$  für ein statisches Potential nicht stabil. Für ein dynamisches Potential kann eine Gleichgewichtsposition gefunden werden. Mit dem Ansatz

$$\phi_0(t) = U_0 + V \cos(\Omega_{\text{RF}} t) \quad (4.2)$$

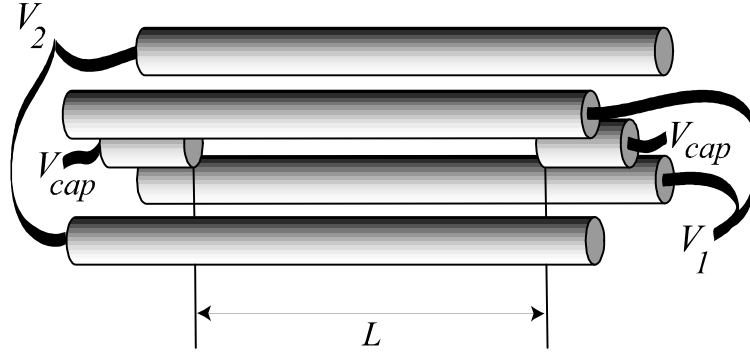


Abbildung 4.1: Lineare Paul Falle. Geladene Teilchen werden durch die vier Zylinderstäbe, mit den Spannungen  $V_1$  und  $V_2$ , in der radialen Richtung eingesperrt. Eine der beiden Spannungen oszilliert mit der Frequenz  $\Omega_{RF}$ . Die Spannung  $V_{cap}$  ist für den axialen Einschluss maßgeblich [43].

ergeben sich die Bewegungsgleichungen für ein geladenes Teilchen mit Ladung  $Q$  und Masse  $m$  unter Berücksichtigung der Bedingung  $\sum_i \alpha_i = 0$  zu:

$$\ddot{x}_i + \frac{2Q\alpha_i}{mr^2}(U_0 + V \cos(\Omega_{RF}t))x_i = 0 \quad (4.3)$$

Mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{8\alpha_i QU}{mr^2\Omega_{RF}^2} \\ q_i &= \frac{4\alpha_i QV}{mr^2\Omega_{RF}^2} \\ \xi &= \frac{\Omega_{RF}t}{2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

erhält man die Standardform der Mathieu-Gleichungen:

$$\frac{dx_i^2}{d\xi^2} + (a_i - 2q_i \cos(2\xi))x_i = 0. \quad (4.5)$$

Die stabilen Lösungen dieser Gleichung können in der Literatur [41] nachgeschlagen werden. Die Parameter müssen derart gewählt werden, dass sich Teilchen mit einem bestimmten Masse zu Ladungs Verhältnis innerhalb dieses Stabilitätsbereiches befinden. Die Lösung der Mathieu-Gleichung kann für den Parameterbereich  $a_i \ll q_i \ll 1$  durch die Näherung

$$x_i(t) = x_{i0} \left(1 + \frac{q_i \cos(\Omega_{RF}t)}{2}\right) \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (4.6)$$

mit

$$\omega_i = \beta_i \frac{\Omega_{RF}}{2}, \beta_i = \sqrt{a_i + \frac{q_i^2}{2}} \quad (4.7)$$

ersetzt werden. Die Konstanten  $x_{i0}, \phi_i$  sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Die Bewegung eines gefangenen Teilchens kann man in zwei Teile differenzieren. Die Trajektorie folgt zum Einen einer harmonischen Schwingung mit der Frequenz  $\omega_i$ , die Säkularbewegung

genannt wird. Dieser ist eine Mikrobewegung überlagert, die mit der treibenden Radiofrequenz oszilliert und mit zunehmender Entfernung aus dem Fallenzentrum zunimmt. Die Säkularapproximation vernachlässigt die Mikrobewegung und interpretiert die Säkularbewegung als harmonische Bewegung, verursacht durch ein effektives harmonisches Potential:

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \omega_i^2 x_i^2. \quad (4.8)$$

Im Experiment wird eine Potentialtiefe von einigen eV im Zentrum der Falle erreicht. Die kinetische Energie der Ionen, beim Austritt aus dem Kalziumofen, liegt zwischen einigen 10 meV bis wenigen 100 meV. Damit ist es möglich, die Falle durch einen Strahl von thermischen Ionen, der durch das Zentrum der Falle gerichtet ist, zu laden.

### 4.1.2 Abschätzung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Die kinetische Energie des gefangenen Ions kann durch Laserkühlung reduziert werden [45]. Ist die räumliche Ausdehnung des niedrigsten harmonischen Oszillatorzustandes wesentlich kleiner als die Wellenlänge des atomaren Übergangs, spricht man vom Lamb-Dicke-Regime. Durch Dopplerkühlung wird das Ion in das Lamb-Dicke-Regime gekühlt. Eine weitere Reduktion der Bewegungsenergie erfolgt durch Seitenbandkühlen. Die Details zum Kühlmechanismus können in [46] nachgelesen werden. Das Ion kann mit großer Wahrscheinlichkeit ( $\sim 98\%$ ) in den Bewegungsgrundzustand gekühlt werden.

Für einen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton-Operator

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (4.9)$$

mit einer Resonatorfrequenz von  $\omega$ , und den Auf- bzw. Absteigeoperatoren  $a^\dagger$  bzw.  $a$ , ergibt sich der Ortserwartungswert für einen Zustand  $n$  zu

$$\langle x_i \rangle = \langle n | x_i | n \rangle = 0 \quad (4.10)$$

mit der Streuung

$$\Delta x_i = \sqrt{\langle n | x_i^2 | n \rangle} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar}{\omega_i m}}. \quad (4.11)$$

Bei einer Fallenfrequenz von  $2\pi \times 5$  MHz bzw.  $2\pi \times 1$  MHz für die radiale bzw. axiale Richtung ergeben sich, für ein  $^{40}\text{Ca}^+$  Ion räumliche Ausdehnungen, für den Bewegungsgrundzustand von 12.6 nm bzw. 28.17 nm in die radiale- bzw. axiale Richtung.

## 4.2 Kopplung an den Resonator

Die Kopplung eines Vakuumfeldes an ein Ion ist ein wesentlicher Bestandteil des Experiments. Im Experiment wird ein  $^{40}\text{Ca}^+$  - Ion verwendet. In einem ersten Schritt werden die wesentlichen Eigenschaften des Kalziumions beschrieben. Für die selektive Kopplung an eine Mode des elektromagnetischen Feldes wird ein optischer Resonator verwendet. Im nächsten Abschnitt wird die Kopplung der Mode an das Feld berechnet.

Ziel des Experiments ist das Erreichen der starken Kopplung. Für die starke Kopplung gilt  $g > (\gamma, \kappa)$ , mit  $g$  der Kopplungsstärke des Feldes an das Atom,  $\gamma$  der spontanen Zerfallsrate und  $\kappa$  der Resonatorzerfallsrate. In diesem Regime kann das System Atom-Resonator kohärent koppeln, bevor dissipative Prozesse die Wechselwirkung zerstören.

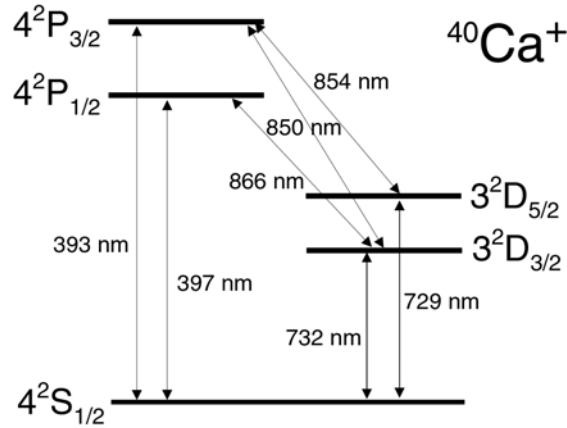


Abbildung 4.2: Termschema des ionisierten Kalzium Ions  $^{40}\text{Ca}^+$ . Dargestellt sind die fünf niedrigsten Niveaus des Ions.

#### 4.2.1 Eigenschaften des quantenmechanischen $^{40}\text{Ca}^+$ Ions

Kalzium ist im reinen Zustand ein silberweiß glänzendes Leichtmetall, das an der Luft infolge einer Oxidation blaugrau anläuft. Natürliches Kalzium besteht zu 96.9% aus dem kernspinlosen Isotop  $^{40}\text{Ca}$ . Das einfach positiv geladene Kalziumion besitzt eine Argon-Konfiguration mit einem zusätzlichen Valenzelektron. Die fünf niedrigsten Niveaus sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Die D-Niveaus mit einer Hauptquantenzahl von 3 sind dabei aufgrund des großen Abstands der Wellenfunktion vom Zentrum schwächer gebunden als das S-Niveau mit einer Hauptquantenzahl von 4. Der spontane Zerfall aus den  $P_{3/2}$ -Niveau besetzt die niederen  $S_{1/2}$  bzw.  $D_{5/2}$  Niveaus in einem Verhältnis von 17.6:1, das Verzweungsverhältnis von  $P_{3/2}$  nach  $S_{1/2}$  bzw.  $D_{3/2}$  ist 150:1. Die D-Niveaus sind mit dem S-Niveau durch einen elektrischen Quadrupol-Übergang mit einer Übergangsrate von ungefähr  $(2\pi) \times 0.16 \text{ s}^{-1}$  gekoppelt. Das entspricht einer Lebensdauer der D-Niveaus von ungefähr  $\sim 1 \text{ s}$ . Die weiteren Emissionsraten sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

##### Wellenlänge und Lebensdauer der atomaren Übergänge von $^{40}\text{Ca}^+$ [48]:

Dipol Übergänge					
	$S_{1/2} \leftrightarrow P_{1/2}$	$S_{1/2} \leftrightarrow P_{3/2}$	$P_{1/2} \leftrightarrow D_{1/2}$	$P_{3/2} \leftrightarrow D_{3/2}$	$P_{3/2} \leftrightarrow D_{5/2}$
$\tau_{nat}$ [ns]	7.7 (2)	7.4 (3)	94.3	901	101
$\lambda_{air}$ [nm]	396.847	393.366	866.214	849.802	854.209

##### Quadrupol Übergänge [49]

	$S_{1/2} \leftrightarrow D_{3/2}$	$S_{1/2} \leftrightarrow D_{5/2}$
$\tau_{nat}$ [s]	1.20 (0.01)	1.168 (0.007)
$\lambda_{air}$ [nm]	729.147	732.389

Im Experiment werden die Niveaus  $S_{1/2}$ ,  $P_{3/2}$  und  $D_{5/2}$  verwendet. Das Ion wird in den Zustand  $S_{1/2}$  präpariert, von wo das Ion durch einen Laser mit einer Wellenlänge von 393 nm in den Zustand  $P_{3/2}$  angeregt wird. Der Übergang zwischen  $P_{3/2}$  und  $D_{5/2}$  wird durch einen optischen Resonator gekoppelt. Dieser wird in Abbildung 4.2.3 näher beschrieben.

### 4.2.2 Zeemanaufspaltung

Da der Kernspin des verwendeten Ions Null ist, erfolgt keine Hyperfeinaufspaltung. Es muss allerdings die Niveaufspaltung, induziert durch das Magnetfeld, berücksichtigt werden. Die Zeeman - Aufspaltung führt zu einem Trennen der entarteten Niveaus in der Größenordnung:

$$\Delta E = g_j \mu_B B m_j \quad (4.12)$$

bei dieser Gleichung ist  $\mu_B$  das Bohr'sche Magneton, B die Stärke des angelegten Magnetfeldes,  $m_j$  die magnetische Quantenzahl und  $g_j$  der Landé'sche g Faktor. Dieser kann durch die Formel [32]

$$g_j = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (4.13)$$

berechnet werden. Für das Kalzium Ion sind die Werte für die niedrigsten fünf Niveaus in der nächsten Tabelle angegeben:

Landé'sche g- Faktoren für die ersten fünf Niveaus von Kalzium:

	$S_{1/2}$	$P_{1/2}$	$P_{3/2}$	$D_{3/2}$	$D_{5/2}$
$g_J$	2	2/3	4/3	4/5	6/5

Die Übergangsfrequenzen von den  $P_{3/2}$  Zeeman-Niveaus zu denen des  $D_{5/2}$  Niveaus sind unterschiedlich, da die Landé'schen g-Faktoren unterschiedlich sind. Die Aufspaltung pro  $\mu_B B$  ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Die relative Stärke der Übergänge lässt sich aus dem Quadrat der Glebsch Gordon Faktoren berechnen. Das angelegte Magnetfeld ist in der Größenordnung von 3 Gauss. Man erhält drei Quartetts, die entweder  $\sigma^-$ ,  $\pi$  oder  $\sigma^+$  - Licht enthalten. Die Aufspaltung der drei Polarisationsrichtungen ist ungefähr  $1.2 \times 1.4 \times 10^6 \times 3 = 5$  MHz (Mittelwert eines Quartetts von Zuständen,  $\mu_B \cdot B/\hbar$ , Stärke des Magnetfeldes). Die Komponenten einer Polarisationsrichtung sind noch einmal durch  $0.56 \times 1.4 \times 10^6 \times 3 = 0.56$  MHz voneinander getrennt.

Die Aufspaltung der Übergangsfrequenzen wird zum selektiven Auswählen einer Polarisationsrichtung verwendet, siehe dazu Kapitel 5.2.

### 4.2.3 Resonatoreigenschaften

Für eine große Kopplung des elektrischen Feldes durch den Resonator muss der Resonator zum Einen sehr stabil sein, zum Anderen ist es nötig, das elektromagnetische Feld auf ein kleines Volumen einzuschränken. Die genaue Abhängigkeit dieser beiden Eigenschaften wird in diesem Abschnitt beschrieben. Es wird mit einer Herleitung der Kopplungsstärke begonnen. Mittels dieser Gleichung werden die nötigen Parameter erläutert und die zu erwartenden Werte für die Kopplungsstärke angegeben.

Der verwendete optische Resonator besteht aus zwei hochreflektierenden Spiegel im Abstand von 20 mm. Beide haben einen Krümmungsradius von 10 mm. Ein Spiegel kann durch eine Piezokeramik entlang der optischen Achse über einige  $\mu\text{m}$  bewegt werden. Dadurch kann man, mit einer geeigneten elektronischen Steuerung, die Resonatorlänge auf die gewünschte Länge stabilisieren, und man kann die nötige Verstimmung des Resonators für die Ramanresonanz einstellen. Durch eine zweite Piezokeramik kann man die beiden Spiegel bezüglich des Ions verschieben. Aus dem Abstand der Spiegel ergibt sich ein freier Spektralbereich von 7.5 GHz.

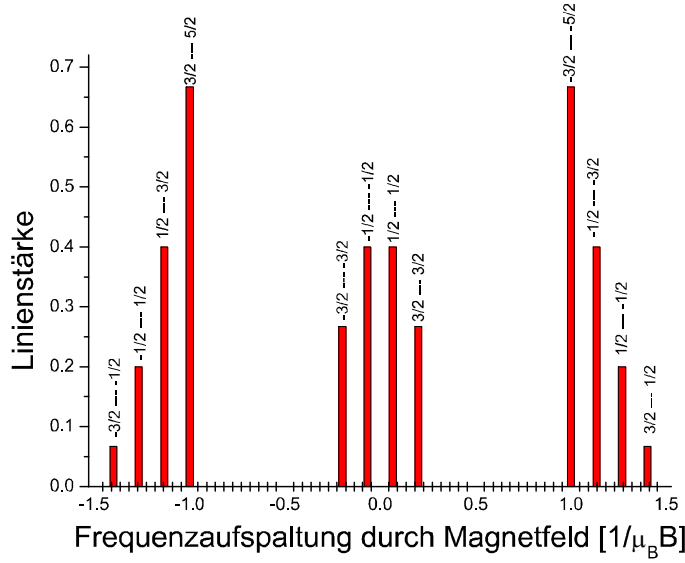


Abbildung 4.3: Aufspaltung der Übergänge zwischen  $P_{5/2} \leftrightarrow D_{3/2}$ . Im Magnetfeld spaltet der Übergang in 12 Komponenten auf. Die Linienstärke ist proportional zum Quadrat der zugehörigen Glebsch-Gordon-Werte.

### Finesse

Eine charakteristische Größe eines Resonators ist seine Finesse. Diese ist definiert durch

$$F = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r} \quad (4.14)$$

mit  $r$  der Reflektivität der Spiegel. Für große Reflektivitäten, das heißt, für  $r$  nahe bei 1 kann man die Finesse auch durch das Verhältnis von freiem Spektralbereich zu der Resonanzbreite des Resonators ausdrücken:

$$F = \frac{\nu_f}{\delta\nu} \quad (4.15)$$

mit  $\nu_f = \frac{c}{2L}$ , dem freien Spektralbereich.  $L$  ist die Länge des Resonators. Bleibt man weiterhin in einem Bereich kleiner Verluste, kann die Finesse geschrieben werden als [50]

$$F \approx \frac{\pi}{\alpha_r L}. \quad (4.16)$$

$\alpha_r L \ll 1$  ist ein Maß für die Verluste und kann über den Reflexionskoeffizienten berechnet werden. Durch Umformen erhält man  $\delta\nu = \frac{c\alpha_r}{2\pi}$ . Dabei gibt  $c \cdot \alpha_r$  den Verlust pro Einheitszeit an. Mit der Definition

$$\tau = \frac{1}{c\alpha_r} = \frac{FL}{c\pi} \quad (4.17)$$

ist die Resonatorzerfallszeit oder Photonen-Lebensdauer gegeben. Üblich ist die Angabe der Resonatorfelderfallskonstante  $\kappa$  definiert durch

$$\kappa = \frac{1}{2\tau} = \frac{c\pi}{2FL}. \quad (4.18)$$

Die Intensität berechnet sich aus dem Quadrat der Feldamplitude. Daher zerfällt die Photonenzahl mit  $2\kappa$  aus dem Resonator.

### Modenquerschnitt

Für einen Resonator mit zwei gleich stark gekrümmten Spiegel ist die Taille des Strahles in der Mitte platziert. Ist  $R$  der Krümmungsradius der Spiegel,  $L$  der Spiegelabstand und  $\lambda$  die verwendete Wellenlänge, dann ergibt sich der Durchmesser der Taille  $w_0$  und Strahlgröße auf den Spiegeln  $w_1$  zu [51]

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{L(2R-L)} \\ w_1^2 &= \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{LR^2}{2R-L}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ist die Länge des Resonators festgelegt, in dem beschriebenen Experiment ist der Spiegelabstand durch die Größe der Falle gegeben, stellt die beste Wahl für eine kleine Taille ein Resonator im fast konzentrischen Fall dar. Dabei sind die Krümmungsradien der Spiegel gleich dem halben Spiegelabstand. Führt man die Größe  $\Delta L = R - L/2$  ein, ergeben sich die Taille und der Strahldurchmesser an den Spiegeln zu

$$\begin{aligned} w_0^2 &= \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\Delta L \cdot L} \\ w_1^2 &= \frac{2L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{L}{\Delta L}} \end{aligned} \quad (4.20)$$

für  $\Delta L \ll L$ . Aus den beiden Formeln ist leicht ersichtlich, dass man für eine kleine Taille große Spiegel braucht, damit die Verluste durch Streuung an den Spiegelrändern gering gehalten werden. Im Experiment werden Spiegel mit einem Durchmesser von 3 mm bei einem Abstand von ungefähr 19.95 mm verwendet. Daraus ergeben sich Werte für Tailendurchmesser und Strahldurchmesser von

$$\begin{aligned} w_0 &= 11.65 \mu\text{m} \\ w_1 &= 465 \mu\text{m}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

#### 4.2.4 Kopplungsstärke

Der Hamiltonoperator für die Wechselwirkung eines Atoms, das an der Position  $\mathbf{r}_0$  mit einem Strahlungsfeld  $\mathbf{E}_T(\mathbf{r}_0)$  über eine Dipolwechselwirkung koppelt, kann nach [29] geschrieben werden als:

$$H_{ED} = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_T(\mathbf{r}_0). \quad (4.22)$$

Die Stehwelle in einem optischen Resonator kann in der paraxialen Näherung als

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}) = i\epsilon\phi(\mathbf{r}) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})(ae^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (4.23)$$

geschrieben werden [50].  $\epsilon$  ist die Polarisation des elektrischen Feldes,  $\phi(\mathbf{r})$  beschreibt die Struktur der transversalen Moden. Für die TEM<sub>00</sub> - Mode eines Gauss'schen Strahles, mit einem Tailendurchmesser  $w_0$ , in einem Resonator der Länge  $L$ , ist das transversale Profil durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (4.24)$$

gegeben, wobei  $\rho$  den Abstand vom Zentrum des Resonators beschreibt. Der Normalisierungsfaktor  $\phi_0$  wird über die Energie eines  $n$ -Photonen Fock-Zustandes berechnet. Die Moden Energie eines Fockzustandes erfüllt die Beziehung:

$$\int dV \epsilon_0 \langle n | \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) | n \rangle = \hbar \omega (n + \frac{1}{2}). \quad (4.25)$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\int dV \epsilon_0 \langle n | \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) | n \rangle = \epsilon_0 \langle n | aa^\dagger + a^\dagger a | n \rangle \phi_0^2 \int dV \cos^2(kz) e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \quad (4.26)$$

$$= \epsilon_0 (2n + 1) \frac{\phi_0^2 L \pi w_0^2}{4}. \quad (4.27)$$

Daraus folgt für  $\phi_0$ :

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 L \pi w_0^2}} \quad (4.28)$$

Der Hamiltonoperator für die Dipolwechselwirkung schreibt sich also:

$$H_{ED} = e r i \epsilon \phi_0 e^{-\frac{\rho^2}{w_0^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) (a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}). \quad (4.29)$$

Für ein Zwei-Niveau-Atom mit Grundzustand  $|g\rangle$  und angeregtem Zustand  $|e\rangle$  in der Nähe des Zentrums lässt sich der Hamiltonoperator, unter Anwendung der Drehwellennäherung, schreiben als:

$$H_{ED} = i\hbar g (|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) (a e^{-i\omega t} - a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (4.30)$$

$$g = \frac{e\phi_0}{\hbar} \langle g | \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} | e \rangle \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.31)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Kopplungsstärke  $g$  stark von der Position in der Stehwelle abhängt. Die Kopplung erreicht in einem Bauch des elektrischen Feldes ihr Maximum und verschwindet bei einer Positionierung in einem Knoten. Es wird deshalb später nötig sein, die Position des Atoms in der Stehwelle detektieren zu können, und das Atom in einer bestimmten Position festzuhalten.

Das Matrixelement  $\langle g | \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} | e \rangle$  kann mithilfe des Wigner-Eckhart-Theorems berechnet werden [48]:

$$\langle g | \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\epsilon} | e \rangle = \sqrt{\frac{A}{c\alpha k^3}} \sigma \quad (4.32)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3(2j'+1)}{4}} \left| \sum_{q=-1}^1 \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -m_j & q & m_j' \end{pmatrix} c^{(q)} \epsilon^{(q)} \right|. \quad (4.33)$$

Dabei ist  $A = \gamma_{\parallel} = 2\gamma_{\perp}$  der Einsteinkoeffizient des Übergangs,  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137$  die Feinstrukturkonstante,  $k = 2\pi/\lambda$  der Wellenzahlvektor und  $\sigma$  ein Maß für die Stärke der Kopplung und kann über das Wigner 3-j Symbol [52] berechnet werden. Die Polarisation des Lichtes kommt durch den geometrischen Faktor  $p^{(q)} = c^{(q)} \epsilon^{(q)}$  zur Geltung. Die Tabelle 4.1 beinhaltet die einzelnen Kopplungsstärken  $\sigma$  für die Zeemankomponenten des Übergangs von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$  mit der Annahme  $p^{(q)} = 1$ , das heißt, die geometrische Ausrichtung ist für jeden Übergang optimal gewählt.

Der Polarisationsvektor und der Wellenvektor können durch den Winkel  $\phi$  zwischen optischer Achse und Magnetfeld, und  $\gamma$ , dem Winkel zwischen Polarisationsrichtung und



$D_{5/2} \setminus P_{3/2}$	-3/2	-1/2	1/2	3/2
-5/2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0
-3/2	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	0	0
-1/2	$\frac{1}{\sqrt{20}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\sqrt{\frac{3}{40}}$	0
1/2	0	$\sqrt{\frac{3}{40}}$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{20}}$
3/2	0	0	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
5/2	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Tabelle 4.1: Kopplungsstärke der Zeemankomponenten für den Übergang von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$

Magnetfeld projiziert in die Einfallsebene, parametrisiert werden [44]. Wählt man das Magnetfeld  $\mathbf{B} = B_0(0, 0, 1)$ , und legt damit eine Quantisierungsachse fest, kann man die geometrische Abhängigkeit berechnen. Vektorisiert man die Ausbreitungsrichtung durch  $\mathbf{k} = k(\sin \phi, 0, \cos \phi)$  und die Polarisation durch  $\boldsymbol{\epsilon} = (\cos \gamma \cos \phi, \sin \gamma, -\cos \gamma \sin \phi)$ , ergeben sich die geometrischen Faktoren für die Übergänge mit  $\Delta m = 0$  und  $|\Delta m| = 1$  zu:

$$\begin{aligned}
 p^{(0)} &= \frac{1}{2} |\cos \gamma \sin \phi| \\
 p^{(\pm 1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\cos \gamma \cos \phi - i \sin \gamma|.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Die Abbildung 4.4 zeigt die Abhängigkeit der Dipolkopplung von der Anordnung des Magnetfeldes, der Ausbreitungsrichtung und der Polarisationsrichtung. Der Resonator ist nicht selektiv auf eine Polarisationsrichtung ausgerichtet. Legt man das Magnetfeld in Richtung des Resonators, kann kein linear polarisiertes Licht emittiert werden [32]. Geht man vom Niveau  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  aus, ist die Kopplung zum Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$   $\sqrt{10}$  mal größer als für den Übergang  $|D_{5/2}, m_j = -1/2\rangle$ , und der Übergang nach  $|D_{5/2}, m_j = -3/2\rangle$  ist wegen der Wahl des Magnetfeldes verboten.

Die Kopplungsstärke für den Übergang von  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  nach  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  ergibt sich durch Einsetzen der Größen in Gleichung 4.31 zu

$$g = \sqrt{\frac{2c\gamma_{\perp}\lambda^2}{\pi^2 Lw_0^2}}. \tag{4.35}$$

Man erkennt aus der oberen Formel, dass die Kopplung von atomaren Größen und vom Modenvolumen  $V_m = \pi Lw_0^2/4$  abhängt. Dadurch wird das Ziel eines möglichst kleinen Taillendurchmessers verdeutlicht. Ein Umschreiben von Gleichung 4.35 ergibt

$$\frac{g}{\gamma_{\parallel}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{V_0}{V_m}}. \tag{4.36}$$

Dabei ist  $V_0 = \sigma_0 c / \gamma_{\parallel}$  das atomare Streuvolumen mit  $\sigma_0 = 3\lambda^2/2\pi$  dem atomaren Streuquerschnitt. Ein Photon innerhalb dieses Volumens regt mit Sicherheit das Atom an. Damit die Bedingung für die starke Kopplung  $g > \gamma_{\parallel}$  erfüllt wird, muss das Streuvolumen größer als das Modenvolumen werden.

Der dimensionslose Parameter  $N_0 = 2\gamma_{\perp}\kappa/g^2$  gibt die kritische Atomanzahl in einem bestimmten Regime an [53]. Ist  $N_0 \gg 1$  spielt ein zusätzliches Atom mehr oder weniger

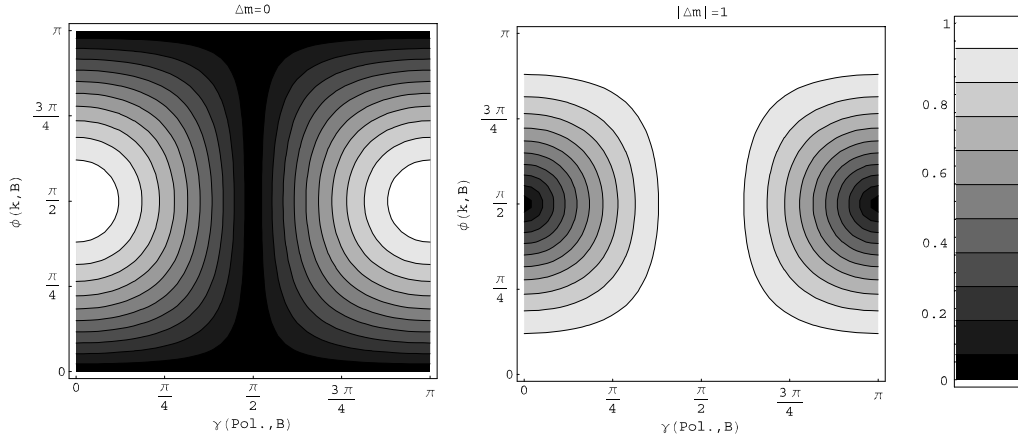


Abbildung 4.4: Relative Kopplungsstärke für den Dipolübergang von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$  für  $\Delta m = 0, 1$ .  $\phi$  ist der Winkel zwischen Magnetfeld und Einfallrichtung, das heißt optischen Achse,  $\gamma$  bezeichnet den Winkel zwischen Magnetfeld und Polarisation projiziert in die Einfallsebene. Helle Bereiche bedeuten eine hohe Kopplung, dunkle Stellen eine schwache Kopplung

kaum eine Rolle für die Eigenschaften des Systems, erreicht man aber ein Regime mit  $N_0 \ll 1$ , hängt das System stark von den Eigenschaften des einzelnen Atoms ab. Der Kehrwert dieser Größe wird Kooperativität genannt [55]:

$$C = \frac{1}{N_0} = \frac{g^2}{2\kappa\Gamma_{\perp}}. \quad (4.37)$$

Mit den Definitionen für die Resonator Zerfallsrate  $\kappa$  ergibt sich Kooperativität zu:

$$C = 2 \frac{\lambda^2 \gamma_{\perp}}{\pi^3 \Gamma_{\perp}} \cdot \frac{F}{w_0^2}. \quad (4.38)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass die Kooperativität des gesamten Systems von der gesamten Emissionsrate aus dem  $P_{3/2}$  Niveau abhängt, die Kopplung der Resonatormode an das Atom aber nur von der Emissionsrate von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$ , weshalb sich die Emissionsraten in der obigen Formel nicht kürzen. Die Finesse kann im Experiment durch den Zerfall des gefüllten Resonators gemessen werden. Der Taillendurchmesser wird durch Messen der Resonatorlänge und anschließendes Berechnen ermittelt.

Die Wechselwirkung der Resonatormode mit dem Atom führt zu einer Verstärkung des Übergangs von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$ . Diese Verstärkung führt zu einer erhöhten Wahrscheinlichkeit für eine Emission in den Resonator und dadurch zu einer Reduktion anderer spontaner Emissionsprozesse. Damit wird die Kohärenz des Übergangs erhöht. Der Purcell Faktor  $\overline{F}$  ist ein Maß für die Verstärkung der Emission in den Resonator durch den Resonator. Er kann durch die Kooperativität berechnet werden:

$$\overline{F} = 2C + 1 \quad (4.39)$$

und für die Zerfallsrate im Resonator, relativ zur Vakuumzerfallsrate, ergibt sich eine Erhöhung um den Purcell Faktor:

$$\gamma' = \gamma \cdot \overline{F}. \quad (4.40)$$

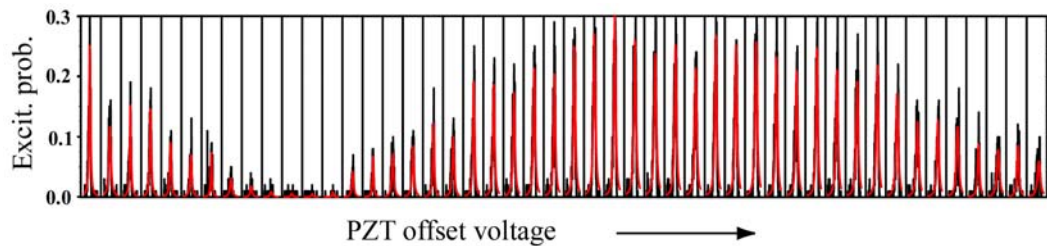


Abbildung 4.5: Anregungswahrscheinlichkeit für den Übergang von  $S_{1/2}$  nach  $D_{5/2}$  bei verschiedenen Positionen in der Stehwelle. Die Stehwelle wird durch die Spannungsänderung an den Piezos verschoben [24].

### 4.3 Knoten-Bauch Lokalisation

Zum Erreichen der starken Kopplung ist es wichtig, dass sich das Ion in einem Bauch der Stehwelle befindet. Durch die Falle wird das gekühlte Ion auf einen Bereich kleiner als 20 nm eingeschränkt. Die Detektion der Position des Ions in der Stehwelle wurde von Mundt für den Quadrupolübergang zwischen  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$  gezeigt. Die beiden Spiegel sind in seinem Experiment auf jeweils einer Piezokeramik befestigt, wodurch sie in Richtung der optischen Achse verschoben werden können. Ein Piezo dient dem Stabilisieren des Resonators. Legt man an beide Piezokeramiken zusätzlich eine gleich starke Spannung an, verschiebt sich die Stehwelle bezüglich des festen Ions. Dabei tritt eine Fehlerquelle zum Vorschein, die durch die Drift des Quadrupolfeldes hervorgerufen wird. Auf diese Drift wird hier nicht weiter eingegangen, sondern auf die Referenz [24] verwiesen.

Für verschiedene Positionen in der Stehwelle wird das Ion durch einen Laserstrahl, der in der  $TEM_{00}$ -Mode durch den Resonator geschickt wird, angeregt. Es bildet sich im Resonator eine Stehwelle aus, die abhängig von der Position des Ions relativ zur Welle, das Ion anregt. Durch Einstrahlen von Licht der Wellenlänge 397 nm wird der Zustand  $P_{1/2}$  besetzt und dadurch die Wahrscheinlichkeit für eine Besetzung des  $D_{5/2}$ -Niveaus gemessen. Verändert man die Offsetspannung kann jede Position innerhalb eines Knoten-Bauch Bereiches abgetastet werden.

Abbildung 4.5 zeigt die Anregungswahrscheinlichkeit für verschiedene Positionen in der Stehwelle. Dabei handelt es sich in diesem Fall um einen Quadrupolübergang. Man sieht deutlich einen Bereich schlechter Anregung, wenn sich das Ion in einem Bauch der Stehwelle befindet, und einen breiten Bereich starker Anregung für die Position des Ions in einem Knoten der Stehwelle. Bei einem Dipolübergang ist die Anregungswahrscheinlichkeit in einem Bauch maximal und verschwindet, wenn sich das Ion in einem Knoten der Stehwelle befindet. Mit dieser Messung kann man sicherstellen, dass die Kopplung durch den Resonator maximal wird.

### 4.4 Laserstrahlgeometrie, Präparation in den Anfangszustand.

In der Abbildung 4.6 sind jene Laserstrahlen eingezeichnet, die zur Erzeugung eines Photons benötigt werden. Für die Dauer des Experiments wird ein Laserstrahl mit einer Wellenlänge von 866 nm eingestrahlt. Die Laserfrequenz ist resonant mit dem Übergang von  $D_{3/2}$  nach  $P_{1/2}$ , wodurch das Niveau  $D_{3/2}$  entleert wird, falls sich das Ion in diesem Zustand befindet.

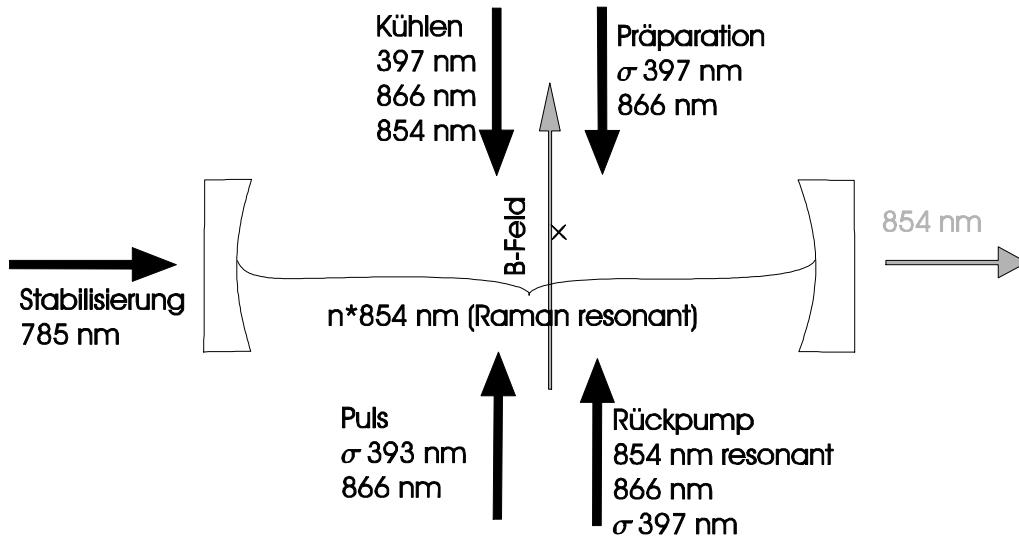


Abbildung 4.6: Schematische Darstellung der Laserstrahlen und der Quantisierungsachse. Das Magnetfeld ist parallel zur der optischen Achse des Resonators. Dadurch hat das auslaufende Feld nur zirkular polarisiertes Licht. Die Laser für die Ionisierung wurden vernachlässigt.

Das Magnetfeld zeigt in Richtung der Resonatorachse, damit nur zirkular polarisiertes Licht in Richtung der optischen Achse erzeugt wird. Vor dem Start des Experiments muss gewährleistet werden, dass sich das Ion in einem Bauch der Stehwelle befindet. Der Resonator wird durch einen Referenzlaser mit einer Wellenlänge von 785 nm stabilisiert, damit sich kein zusätzliches Licht der Wellenlänge 854 nm im Resonator befindet.

Ein, in der Falle gespeichertes, Ion wird durch einen rotverstimmten Laser der Wellenlänge 397 nm gekühlt. Die Verstimmung zur atomaren Übergangsfrequenz beträgt dabei ungefähr 900 MHz. Ein Laser mit einer Wellenlänge von 854 nm pumpt das Niveau  $D_{5/2}$  leer, sobald es besetzt wird. Die Ausbreitungsrichtung dieses Lasers ist dabei normal zur Resonatorachse. Die Besetzung des Ausgangsniveaus  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  erfolgt durch Einstrahlen eines zirkularpolarisierten Laserstrahl mit einer Wellenlänge  $\lambda = 397$  nm.

Ist das Ion mit großer Wahrscheinlichkeit im Zustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  präpariert, werden alle Laser, bis auf 866 nm, ausgeschaltet. Durch Einstrahlen von  $\sigma$ -polarisiertem Licht der Wellenlänge 393 nm und der Resonanzbedingung für einen Zwei-Photonenprozess, zwischen diesem Laser und der Mode des Resonators, erfolgt der Besetzungstransfer in das  $D_{5/2}$  - Niveau. Beim Übergang in das  $D_{5/2}$  Niveau kann ein Photon in den Resonator emittiert werden [53].

Durch Rückpumpen des Zustandes in den Ausgangszustand kann der Vorgang wiederholt werden. Beim optischen Pumpen strahlt man Laserlicht resonant auf den Übergang von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$  ein. Die Laserleistung soll dabei groß genug gewählt werden, damit der Übergang gesättigt ist. Dadurch wird das Niveau  $P_{3/2}$  besetzt, das mit einem Verzweigungsverhältnis von 17:1 in die Zustände  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$  zerfällt. Das Niveau  $S_{1/2}$  wird mit einer hohen Wahrscheinlichkeit besetzt, wenn die Einstrahldauer des Laserlichtes von 854 nm viel länger als die Lebensdauer des Niveaus  $P_{3/2}$  ist. Beim Rückpumpvorgang soll kein Photon in den Resonator gestreut werden, da dies die Einphotonen-Emission verschlechtert.

Für den Ramanprozess kann man die Verstimmung des Resonators bezüglich des Über-

gangs von  $D_{5/2}$  nach  $P_{3/2}$  ausnützen. Es werden keine Photonen in den Resonator gestreut, da dessen Resonanz weit von der atomaren Übergangsfrequenz entfernt ist. Dies ermöglicht ein Einstrahlen des Rückpumpasers mit einer hohen Leistung, ohne Zerstörung der Einphotonenquelle.

Nach dem Rückpumpprozess besetzt das Atom den Zustand  $\alpha |S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle + \beta |S_{1/2}, m_j = +1/2\rangle$ , mit  $|\alpha|^2 > |\beta|^2$ . Dabei sind  $|\alpha|^2$  und  $|\beta|^2$  die Wahrscheinlichkeiten, dass sich das Atom in dem jeweiligen Niveau befindet. Der reine Zustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  wird durch Einstrahlen von  $\sigma$ - polarisiertem Licht der Wellenlänge 397 nm erzeugt. Der genaue Anteil von  $\alpha$  und  $\beta$  muss erst im Experiment bestimmt werden. Daraus wird dann die Einstrahldauer für diesen Pumplaser berechnet. Für eine hohe Wiederholungsrate soll der gesamte Rückpumpvorgang in einigen  $\mu\text{s}$  abgeschlossen sein, doch für eine hohe Effizienz muss gewährleistet sein, dass sich das Atom bei jedem Pulsstart im Anfangszustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  befindet.



# Kapitel 5

## Modell mit Zeeman-Aufspaltung

Befindet sich ein Atom in einem Magnetfeld, spalten die Energieniveaus nach ihren Magnetfeldquantenzahlen auf. Die unterschiedliche Kopplung der einzelnen Zeeman-Niveaus muss bei der Berechnung genauso berücksichtigt werden, wie die größere Anzahl von Zerfallskanälen. Im ersten Abschnitt wird jenes Modell erläutert, das als Grundlage für die numerische Simulation verwendet wurde. In einem nächsten Schritt werden die Eckpfeiler des Programms aufgezeigt. Anhand der Simulationen werden anschließend die beiden Fälle a) Ramanresonanz und b) adiabatischer Transfer detailliert beschrieben.

### 5.1 Erläuterung des Simulationsprogramms

Zur numerischen Berechnung des Transferprozesses wird die in Abschnitt 2.3 beschriebene Form der Mastergleichung verwendet. Der verwendete Vektorraum setzt sich aus sieben atomaren Niveaus und zwei Fockzuständen zusammen. Der 14-dimensionale Raum kann durch etwas geistige Arbeit um sechs Dimensionen reduziert werden. Die betrachteten Niveaus und ihre Basisvektoren sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Im folgenden Abschnitt wird die Auswahl der Niveaus erläutert, und basierend auf dieser Auswahl, der Prozess zur Erzeugung einzelner Photonen beschrieben.

#### 5.1.1 Beschreibung des Prozesses

In der folgenden Diskussion wird der Hilbertraum bestehend aus  $\{Atom\} \otimes \{Mode\}$  mit den Energieniveaus des Atoms und den Fockzuständen des Resonators verwendet, siehe Abbildung 5.1. Die wesentlichen atomaren Niveaus sind das Ausgangsniveau  $S_{1/2}$ , das Niveau  $P_{3/2}$  und das Endniveau  $D_{5/2}$ . Der Laserstrahl  $\Omega_{12}$  mit einer Wellenlänge von 393 nm koppelt das Niveau  $S_{1/2}$  an das Niveau  $P_{3/2}$ . Dabei erfolgt die Kopplung nur zwischen gleichen Fockzuständen. Der Resonator  $g_{32}$  wiederum koppelt die Niveaus  $P_{3/2}$  und  $D_{5/2}$  miteinander. Wird der Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$  durch den Resonator induziert, emittiert ein Photon in den Resonator. Dadurch wechselt der Resonator in den nächsthöheren Fockzustand. Dieser Prozess ist reversibel, solange sich ein Photon im Resonator befindet. Wird ein Photon aus dem Resonator absorbiert, besetzt das Ion den Zustand  $P_{3/2}$ , und der Fockzustand reduziert sich um eins. Der Fockzustand zerfällt mit einer Rate von  $2\kappa$  in den nächsttieferen Zustand.

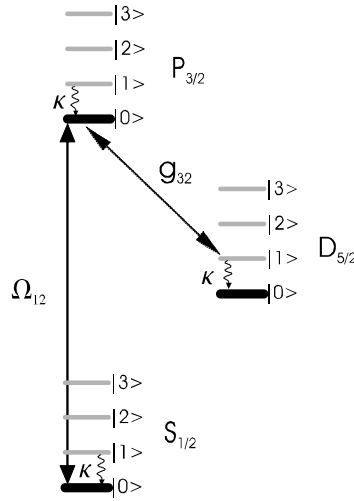


Abbildung 5.1: Die Abbildung zeigt jene drei atomaren Niveaus, die zur Erzeugung eines einzelnen Photons verwendet werden. Außerdem sind die ersten vier Fockzustände für die Resonatormode gezeichnet. Der Laser mit einer Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  koppelt das Niveau  $S_{1/2}$  an das Niveau  $P_{3/2}$  ohne den Fockzustand zu ändern. Der Resonator  $g_{32}$  koppelt den Zustand  $P_{3/2}$  mit  $D_{5/2}$ . Beim Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$  wird der Fockzustand um eins geändert.

Im folgenden werden die Zustände durch die Schreibweise

$$|\text{atomares Niveau}| \text{Fockzustand}\rangle \quad (5.1)$$

dargestellt. Dabei gibt der Fockzustand die Anzahl der Photonen im Resonator an. Das Ion wird zu Beginn des Prozesses in dem Zustand  $|S_{1/2}|0\rangle$  präpariert. Die Kopplung des Atoms mit dem Laser  $\Omega_{12}$  ändert die Photonenzahl im Resonator nicht. Induziert der Resonator den Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$ , wird ein Photon in den Resonator gestreut. Ausgehend vom Niveau  $|D_{5/2}|1\rangle$  sind zwei Prozesse möglich: Zum Einen kann das Ion das Photon absorbieren, zum Anderen kann das Photon aus dem Resonator emittiert werden. Im ersten Fall wird der Zustand  $|P_{3/2}|0\rangle$  besetzt, und das Ion kann erneut zerfallen. Im zweiten Fall befindet sich kein Photon mehr im Resonator, weshalb das Ion nicht mehr in das Niveau  $P_{3/2}$  gehoben werden kann. Das System von Atom und Resonator kann seinen Zustand vorerst nicht mehr ändern und bleibt in dem Endzustand  $|D_{5/2}|0\rangle$ . Ein erneutes Anregen des Prozesses ist nur möglich, wenn ein Laser der Wellenlänge 854 nm eingestrahlt wird, und das Ion anregt, oder wenn das Niveau  $D_{5/2}$  über einen langsamen Quadrupolübergang in das Niveau  $S_{1/2}$  zerfällt. Die Lebensdauer des  $D_{5/2}$  Niveaus liegt in der Größenordnung von einer Sekunde, weshalb dieser Übergang vernachlässigt werden kann. Die Anregung des Ions aus dem Niveau  $D_{5/2}$  durch einen Laser wird in Abschnitt 6.2 detailliert beschrieben.

In diesem Abschnitt entspricht der Zustand  $|D_{5/2}|0\rangle$  dem Endzustand. Vorerst wird auf die Wechselwirkung eines Lasers der Wellenlänge 854 nm mit dem Ion verzichtet. Durch das Einstrahlen dieses Lasers kann das Ion wieder in das Niveau  $S_{1/2}$  gebracht werden, und der Prozess kann dadurch wiederholt werden. Wird der Laser bei 854 nm nicht eingestrahlt, kann sich maximal ein Photon im Resonator befinden. Aus diesem Grund reduziert sich der unendliche Fockraum auf die Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ .

Abbildung 5.2 zeigt die acht Niveaus, die im Programm verwendet wurden. In der Ta-



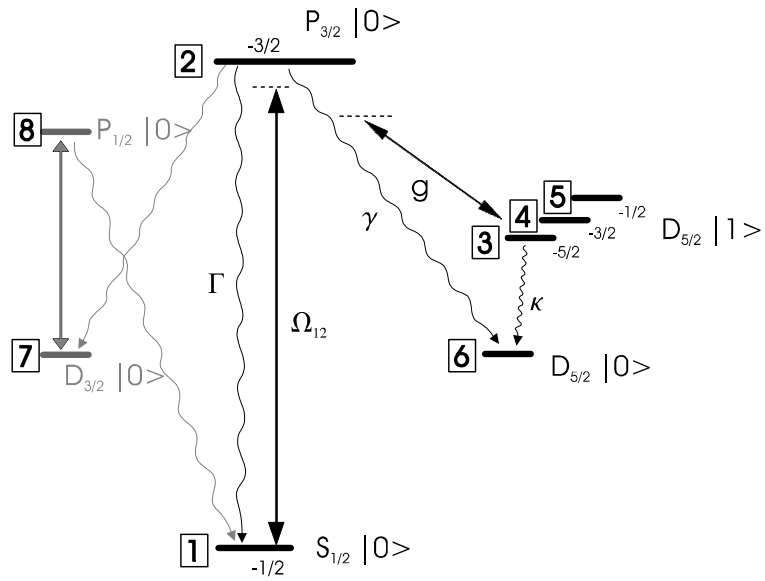


Abbildung 5.2: Reduziertes Termschema von Kalzium mit Zeeman-Komponenten. Es wurden jene Niveaus gezeichnet, die im Programm verwendet werden und mit dem entsprechenden Basisvektor nummeriert (umrandete Ziffern). Die Unterscheidung zwischen Vakuummode und 1 Photonenmode wird nur für den Endzustand  $D_{5/2}$  benötigt. Die Kopplung durch den Resonator  $g$  setzt sich aus den drei Kopplungen  $g_{32}$ ,  $g_{42}$  und  $g_{52}$  zusammen. Details dazu siehe den Text.

1	=>	$ S_{1/2}, m_j = -1/2 0\rangle$
2	=>	$ P_{3/2}, m_j = -3/2 0\rangle$
3	=>	$ D_{5/2}, m_j = -5/2 1\rangle$
4	=>	$ D_{5/2}, m_j = -3/2 1\rangle$
5	=>	$ D_{5/2}, m_j = -1/2 1\rangle$
6	=>	$ D_{5/2} 0\rangle$
7	=>	$ D_{3/2} 0\rangle$
8	=>	$ P_{1/2} 0\rangle$

Tabelle 5.1: Nummerierung der Basisvektoren im Simulationsprogramm

belle 5.1 werden die einzelnen Zustände mit der Nummerierung für das Simulationsprogramm aufgelistet. Das Kalziumion wird in dem Zustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  präpariert. Für den Besetzungstransfer werden die Niveaus  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$ ,  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  miteinander gekoppelt. Die Wahl fiel dabei auf die äußersten Zeeman-Niveaus, da deren Emissionsraten am größten sind. Die Wahl für die negativen Zeeman-Niveaus ist für den Einphotonenprozess willkürlich, allerdings ergibt sich bei dieser Wahl eine etwas bessere Kühlbilanz der Ionen [46].

Strahlt man  $\sigma^-$ -polarisiertes Licht mit einer Wellenlänge von 393 nm ein, dann wird nur das Niveau  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  besetzt. Die Dipol erlaubten Übergänge aus dem Niveau  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  führen in das Ausgangsniveau  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$ , in die Zeeman-Komponenten  $-1/2, -3/2, -5/2$  des  $D_{5/2}$ -Niveaus und in die Zeeman-Komponenten  $-1/2, -3/2$  des  $D_{3/2}$ -Niveaus. Die Besetzung der Zeeman-Komponenten des  $D_{5/2}$  Niveaus mit einem Photon im Resonator ist von entscheidender Bedeutung für die Erzeugung einzelner Photonen. Man möchte mit großer Wahrscheinlichkeit nur eine Zeeman-Komponente besetzen, damit die in den Resonator emittierten Photonen alle dieselbe Polarisationsrichtung haben. Die Zeeman-Niveaus des  $|D_{5/2}|1\rangle$ -Niveaus zerfallen mit der gleichen Rate  $2\kappa$  in den Endzustand. Für den Endzustand  $|D_{5/2}|0\rangle$  ist die Besetzungsverteilung der Zeeman-Komponenten vorerst ohne Bedeutung, da die Simulation bei Besetzung dieses Zustandes beendet ist. Im weiteren ist bei großer Kopplung durch den Resonator die Besetzung der Zeeman-Komponenten von  $|D_{5/2}|0\rangle$  proportional zu jener von  $|D_{5/2}|1\rangle$ .

Das  $D_{3/2}$ -Niveau wird durch einen breitbandigen Laserstrahl der Wellenlänge 866 nm über das Niveau  $P_{1/2}$  in das Niveau  $S_{1/2}$  zurückgepumpt. Dabei ist die genau Besetzungsverteilung der Zeeman-Komponenten vorerst ohne Bedeutung. Betrachtet man den Verlauf der Besetzung von  $P_{3/2}$  über  $D_{1/2}, P_{1/2}$  nach  $S_{1/2}$ , erkennt man, dass die Wahrscheinlichkeit  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  zu besetzen, wesentlich größer ist als  $|S_{1/2}, m_j = +1/2\rangle$  zu besetzen. Das  $D_{3/2}$ -Niveau kann daher ohne Zeemanaufspaltung in die Simulation mit einbezogen werden. Die Zerfallsrate von  $P_{3/2}$  nach  $D_{3/2}$  ist gleich der Summe der Zerfallsraten für die einzelnen Zeeman-Komponenten.

Abbildung 5.3 zeigt die spontanen Emissionsprozesse von  $P_{3/2} m_j = -3/2$  nach  $D_{5/2} m_j = -5/2$ . Wird das Niveau  $P_{3/2}$  besetzt, kann das Ion spontan in die Niveaus  $S_{1/2}, D_{3/2}$ , und  $D_{5/2}$  zerfallen. Von besonderem Interesse ist die spontane Emission in das Niveau  $D_{5/2}$ . Bei diesem Zerfallskanal gibt es zwei Möglichkeiten: Das Photon kann direkt in den Resonator emittiert werden, oder es wird in den übrigen Raum emittiert. Der Raumwinkel  $\varepsilon$  des Resonators ist in der Größenordnung von  $10^{-4}$  rad. Damit ergibt sich für den spontanen Zerfall in den übrigen Raum eine Zerfallskonstante von  $\gamma' = (1 - \varepsilon)\gamma_{ii}$ , mit der Zerfallsrate  $\gamma_{ii}$  für das Zeeman-Niveau  $D_{5/2} m_j = -5/2$ . Die Zerfallskonstante in die Resonatormode wird durch die Kopplung des Resonators bestimmt [47]. Das Verzweigungsverhältnis für die spontane Emission von  $P_{3/2}, m_j = -3/2$  nach  $D_{5/2}$  kann aus

dem Quadrat der Glebsch-Gordon Faktoren berechnet werden. Die Rechnung ergibt für  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle: |D_{5/2}, m_j = -3/2\rangle: |D_{5/2}, m_j = -1/2\rangle$  ist gleich  $10 : 4 : 1$ .

Ist die Resonatorzerfallszeit größer als die spontane Emissionsrate ist also  $\kappa < \gamma$ , spricht man von dem "guten" Resonator. In diesem Fall besteht die Möglichkeit, dass das Photon, solange es sich im Resonator befindet, das Ion erneut in den Zustand  $P_{3/2}$  anregt, das heißt, dass es vom Ion absorbiert wird. In diesem Fall befindet sich der Resonator wieder im Vakuumzustand.

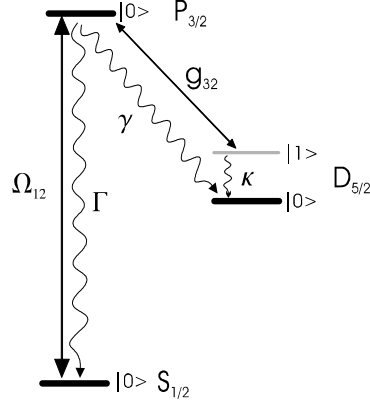


Abbildung 5.3: Spontane Emissionsprozesse aus dem Niveau  $P_{3/2}$ . Der Zerfallskanal von  $P_{3/2}$  nach  $D_{3/2}$  wurde vernachlässigt. Jener Anteil der Zerfallsrate, der spontan in den Resonator streut wird mit  $\gamma'$  bezeichnet, die Emission in den übrigen Raum mit  $\gamma$ .

Die Linienbreite der effektiven Kopplungsfrequenz zwischen  $|S_{1/2}, m_j = -1/2|0\rangle$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  sollte wesentlich kleiner sein, als die Zeeman-Aufspaltung der Niveaus durch das Magnetfeld. Diese Bedingung gewährleistet, dass hauptsächlich das Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  besetzt wird, die Besetzung der andere  $D_{5/2}$ -Zeeman-Niveaus hingegen verschwindet. Dies bewirkt eine effektivere Besetzung des gewünschten Niveaus, und führt damit zu einer höheren Ausbeute an Photonen, die in den Resonator gestreut werden.

### 5.1.2 Liouvilleoperator

Nach der Drehwellennäherung sind nur mehr die Verstimmungen der Laserfrequenzen von den atomaren Übergangsfrequenz von Bedeutung. Für die Simulation wurde das Zwischenniveau  $P_{3/2}$  als Nullpunktsniveau festgelegt. Die Verstimmung wurde derart festgelegt, dass sie für rot verstimmtes Laserlicht positiv ist, das heißt  $\Delta = \omega_A - \omega_L$  mit  $\omega_A$  der atomaren Übergangsfrequenz und  $\omega_L$  der eingestrahlten Laserfrequenz. Bei der Berechnung der relativen Energieniveaus müssen die Zeeman-Komponenten für das Niveau  $D_{5/2}$  berücksichtigt werden. Die Kopplung durch den Resonator erfolgt auf das Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ . Aus diesem Grund ist es naheliegend, die Verstimmung bezüglich diesem Niveau anzugeben. Die atomare Übergangsfrequenz  $\omega_{23} = (E(|P_{3/2}, m_j = -3/2|0\rangle) - E(|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle))/\hbar$  minus der Resonatorfrequenz  $\omega_{854}$  ergibt die Verstimmung  $\Delta_{23}$ . Die Verstimmungen für die anderen Zeeman-Niveaus ergeben sich durch Subtraktion von  $E_z = \Delta m_j \mu_B g_j B / \hbar$  von  $\Delta_{23}$  (siehe Abbildung 5.4).

Der Zustand  $|D_{5/2}|0\rangle$  wird nicht durch den Resonator mit einem anderen Niveau gekoppelt, daher kann dieses Niveau nach Anwenden der Drehwellennäherung auf Resonanz gesetzt werden. Die Niveaus  $P_{1/2}$  und  $D_{3/2}$  sind unabhängig von den übrigen Niveaus, sie

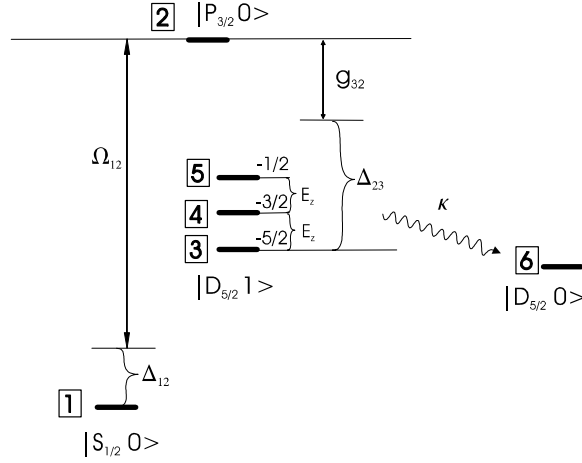


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung der Verstimmung. Gezeigt werden die drei niedrigsten Zeeman-Niveaus des  $D_{5/2}$  Niveaus. Die beiden Verstimmungen  $\Delta_{12}$  und  $\Delta_{23}$  müssen die jeweilige Resonanzbedingung erfüllen. Die Resonanzbedingung ist für den Raman Prozess und den adiabatischen Prozess unterschiedlich. Wird eines der Zeeman-Niveaus mit einem Photon im Resonator besetzt, geht dieser Zustand mit einer Rate von  $2\kappa$  in dasselbe atomare Niveau mit keinem Photon im Resonator über. Die Niveaus  $D_{3/2}$  und  $P_{1/2}$  werden nicht dargestellt.

werden nur miteinander durch Einstrahlen eines Laserstrahles bei einer Wellenlänge von 866 nm miteinander gekoppelt. Dieser wird resonant auf den atomaren Übergang eingestrahlt.

Die diagonalen Elemente des Hamiltonoperators mit den Basisvektoren haben folgende Werte:

$$H_a = \Delta_{12} |1\rangle\langle 1| + \Delta_{23}(|3\rangle\langle 3| - E_z |4\rangle\langle 4| - 2E_z |5\rangle\langle 5|) \quad (5.2)$$

Die Kopplung zwischen  $S_{1/2}$  und  $P_{1/2}$  wird durch die Rabifrequenz

$$\Omega_{12} = \frac{\vec{E}_{393} \vec{d}_{12}}{2\hbar} \quad (5.3)$$

beschrieben. Der Dipoloperator  $\vec{d}_{12}$  beschreibt die Kopplung des Laserlichtes an das Atom,  $\vec{E}_{393}$  die Stärke des elektrischen Feldes am Ort des Atoms. Die Kopplung von  $P_{3/2}$  mit  $D_{5/2}$  ist abhängig von dem Zeeman-Niveau des Endzustandes. Es besteht auch hier die Freiheit, ein Zeeman-Niveau auszuzeichnen. Die Kopplung der beiden Zustände  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  wurde in Abschnitt 4.2 berechnet. Die Kopplungsstärke ergab sich dort zu

$$g_{32} = \sqrt{\frac{2c\gamma_{\perp} \lambda^2}{\pi^2 L w_0^2}}. \quad (5.4)$$

Liegt das Magnetfeld in Richtung der Resonatorachse, verschwindet die Kopplung für den Übergang  $\Delta m = 0$ . Der Abbildung 4.1 entnimmt man die relative Kopplungsstärke für den Übergang von  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  nach  $|D_{5/2}, m_j = -1/2\rangle$ , und der Parameter ergibt sich zu  $g_{52} = g_{32}/\sqrt{10}$ . Man beachte, dass die Definition der Kopplung eines Resonators an ein Atom etwas von der Definition der Kopplung eines Laserstrahles an das Atom abweicht. Die Kopplung  $g_{xy}$  ist exakt die halbe Rabifrequenz  $\Omega_{xy} = 2 * g_{xy}$ .

Die Rabifrequenz für den Rückpumplaser aus dem Niveau  $D_{3/2}$  ist gleich

$$\Omega_{78} = \frac{\vec{E}_{866} \vec{d}_{78}}{2\hbar}. \quad (5.5)$$

Die Zerfallsrate für den Übergang von  $|P_{3/2}, m_j = -3/2|0\rangle$  nach  $|S_{1/2}, m_j = -1/2|0\rangle$  ist gleich der spontanen Zerfallsrate  $\gamma_{\text{Sp}12}$  für den Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $S_{1/2}$ , da es nur einen Zerfallsweg gibt, alle anderen Übergänge sind für Dipolwechselwirkung verboten.

Für die Zeeman-Komponenten des  $D_{5/2}$  - Niveaus muss die spontane Zerfallsrate aus der Linienstärke der einzelnen Übergänge berechnet werden. Die gemessene Zerfallsrate von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$  ist gleich  $\gamma_{\text{Sp}62}$ . Die Zerfallsraten der einzelnen Zeeman-Niveaus ergeben sich aus dem Quadrat der Clebsch- Gordan Faktoren der jeweiligen Übergänge.

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{Sp}62} &= \gamma_{23} + \gamma_{24} + \gamma_{25} = \\ &= \frac{8\pi^2}{3\epsilon_0 \hbar \lambda_{eg}^3} \left( |\langle 2|d|3\rangle|^2 + |\langle 2|d|4\rangle|^2 + |\langle 2|d|5\rangle|^2 \right)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die einzelnen Zerfallsraten ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= \frac{2}{3} \gamma_{\text{Sp}62} \\ \gamma_{24} &= \frac{4}{15} \gamma_{\text{Sp}62} \\ \gamma_{25} &= \frac{1}{15} \gamma_{\text{Sp}62} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Zerfallsrate für das Feld des Resonators ist  $\kappa$ . Die Intensität entspricht dem Quadrat der Feldstärke und zerfällt daher mit  $2\kappa$ . Die Zerfallsrate von  $P_{3/2}$  nach  $D_{3/2}$  ist  $\gamma_{27}$ . Das Niveau  $P_{1/2}$  zerfällt mit den Raten  $\gamma_{81}$  bzw.  $\gamma_{87}$  in die Zustände  $S_{1/2}$  bzw.  $D_{3/2}$ .

Die dissipativen Prozesse werden wie in Abschnitt 2.3 in das Programm eingegliedert. Im folgenden werden die Operatoren  $A_i$  angegeben.

Für den Zerfall von  $P_{3/2}$  nach  $S_{1/2}$ :

$$A_1 = \sqrt{\gamma_{\text{Sp}12}} |1\rangle\langle 2|. \quad (5.8)$$

Der Zerfall von  $P_{3/2}$  nach  $|D_{5/2}|0\rangle$  ist nicht nach den einzelnen Zeeman-Komponenten differenziert. Der Anteil für den Zerfall in eine beliebige Richtung außer der Resonatorrichtung ist um einen Faktor  $(1 - \varepsilon) \approx 1$  reduziert. Der Raumwinkel des Resonators ist  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

$$A_5 = \sqrt{(1 - \varepsilon)\gamma_{\text{Sp}62}} |6\rangle\langle 2| \quad (5.9)$$

Für den Zerfall des Resonators, das heißt von  $|D_{5/2}|1\rangle$  nach  $|D_{5/2}|0\rangle$ :

$$A_6 = \sqrt{2\kappa} (|6\rangle\langle 3| + |6\rangle\langle 4| + |6\rangle\langle 5|). \quad (5.10)$$

Die restlichen Zerfälle sind

$$\begin{aligned} A_7 &= \sqrt{\gamma_{27}} |7\rangle\langle 2| \\ A_8 &= \sqrt{\gamma_{81}} |1\rangle\langle 8| \\ A_9 &= \sqrt{\gamma_{87}} |7\rangle\langle 8|. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die Linienbreite des Lasers wird durch den Term

$$A_{10} = \sqrt{2\delta_{393}} |1\rangle\langle 1| \quad (5.12)$$

berücksichtigt, wobei  $\delta_{393}$  die Linienbreite des Lasers ist. Der Resonator muss ebenfalls durch eine Stabilisierung auf einer bestimmten Länge gehalten werden. Die dabei entstehende inhomogene Linienbreite  $\delta_{\text{inh}}$  wird mit folgendem Term berücksichtigt:

$$A_7 = \sqrt{2 \cdot \delta_{\text{inh}}} (|3\rangle\langle 3| + |4\rangle\langle 4| + |5\rangle\langle 5|) \quad (5.13)$$

Der effektive Hamiltonoperator  $H_{\text{eff}}$  schreibt sich in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{12} - i\delta_{393} & \frac{\Omega_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Omega_{12}^*}{2} & -\frac{i}{2}\Gamma_{22} & g_{32} & g_{42} & g_{52} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{32}^* & \Delta_{23} - i\Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{42}^* & 0 & \Delta_{23} - E_z - i\Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{52}^* & 0 & 0 & \Delta_{23} - 2E_z - i\Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Omega_{78}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Omega_{78}^*}{2} & -\frac{i}{2}\Gamma_{88} \end{pmatrix}$$

Dabei wurden die Zerfallsprozesse wie folgt zusammen gefasst:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22} &= \gamma_{\text{Sp}12} + (1 - \varepsilon) \gamma_{\text{Sp}62} + \gamma_{27} \\ \Gamma_{33} &= \delta_{\text{inh}} + \kappa \\ \Gamma_{88} &= \gamma_{81} + \gamma_{87} \end{aligned} \quad (5.14)$$

### 5.1.3 Analyse

Wie beim Drei-Niveausystem in Kapitel 2.2 kann die Dichtematrix in einen Vektor umgeschrieben werden. Es ergibt sich dann eine Matrix  $M$  mit einer Dimension von  $64 \times 64$ . Da der Hamiltonoperator im beschriebenen Programm zeitabhängig ist, findet man die Lösung durch schrittweises Integrieren:

$$\rho(t + \Delta t) = e^{M(t) * \Delta t} \rho(t). \quad (5.15)$$

Die Koeffizienten der Dichtematrix geben die Wahrscheinlichkeiten für die Besetzung der verschiedenen Niveaus und die Kohärenzen des Prozesses an. Die Emissionsrate des Atoms, ein beliebiges Photon zu emittieren, ist  $\rho_{22}(t)(\gamma_{\text{Sp}12} + (1 - \varepsilon) \gamma_{\text{Sp}62} + \gamma_{27})$ . Daraus ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Zeit  $[0..t]$  ein Photon abgestrahlt wird:

$$P_{\text{Ver}} = \int_0^t \rho_{22}(t') (\gamma_{\text{Sp}12} + (1 - \varepsilon) \gamma_{\text{Sp}62} + \gamma_{27}) dt' \quad (5.16)$$

wobei hier über den gesamten Raum integriert wurde. Auf dieselbe Weise lässt sich die Wahrscheinlichkeit, ein Photon in den Resonator zu streuen, berechnen. Diese ergibt sich zu:

$$P_{\text{emGes}} = \int_0^t 2\kappa (\rho_{33}(t') + \rho_{44}(t') + \rho_{55}(t')) dt', \quad (5.17)$$

und für das gewünschte  $\sigma^+$ -polarisierte Licht ist die Emissionswahrscheinlichkeit gleich

$$P_{\text{em}} = \int_0^t 2\kappa \rho_{33}(t') dt'. \quad (5.18)$$

Das Zeitfenster, in dem es wahrscheinlich ist, dass der Resonator ein zirkularpolarisiertes Photon emittiert, wird aus der Besetzungskurve  $\rho_{33}(t')$  berechnet. Der Anfangszeitpunkt und der Endzeitpunkt werden durch jene Zeiten festgelegt, bei denen der Funktionswert auf ein Prozent des maximalen Wertes abgesunken ist.

$$\begin{aligned}\rho_{33}(t_{\text{anf}}) &= 0.01 \max(\rho_{33}(t')) \text{ mit } t_{\text{anf}} < t' \\ \rho_{33}(t_{\text{end}}) &= 0.01 \max(\rho_{33}(t')) \text{ mit } t_{\text{end}} > t'\end{aligned}\quad (5.19)$$

Die Differenz der beiden Zeiten definiert die Emissionszeit:

$$t_{\text{em}} = t_{\text{end}} - t_{\text{anf}}. \quad (5.20)$$

Stellt das primäre Ziel die Erzeugung einzelner Photonen dar, so ist es ausreichend, die Wahrscheinlichkeit für die Emission  $\sigma^+$ -polarisiertes Licht zu maximieren. Im Hinblick auf eine große Wiederholungsrate möchte man eine kurze Emissionszeit haben, und das Ziel der Simulation ist die Angabe von Parametern für eine optimale Ausbeute.

Ein weiterer Einsatzbereich des Versuchsaufbaus ist die Erzeugung einer kohärenten Überlagerung zwischen den Niveaus  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$ . Das dabei entstehende Photon trägt die Information der Überlagerung und gibt diese nach der Kopplung an ein zweites Qubit weiter, welches dann in derselben Überlagerung gefunden wird. Zur Erzeugung einer guten Verschränkung ist es nötig, spontane Emissionen aus dem  $P_{3/2}$ -Niveau zu verhindern oder zumindest zu minimieren. Jedes spontan emittierte Photon zerstört die Kohärenz zwischen den beiden Zuständen und damit die Verschränkung. Ein Maß für die Qualität des Prozesses ist die Güte

$$\beta = \frac{P_{\text{em}}}{P_{\text{Ver}}} \quad (5.21)$$

Die Güte kann im Bereich von  $[0..1]$  variieren, wobei 1 der angestrebte Wert ist.

Ein weiterer Parameter, der auch zum Anpassen der angelegten Pulse verwendet werden kann, ist die Besetzung für das  $P_{3/2}$ -Niveau beim Ramanprozess, bzw. die Erfüllung der adiabatischen Bedingung für den adiabatischen Prozess. Die Besetzung des  $P_{3/2}$ -Niveaus kann man unmittelbar aus dem Koeffizienten von  $\rho_{22}(t)$  der Dichtematrix ablesen. Die adiabatische Bedingung gilt als erfüllt, wenn sich der besetzte Zustand immer im Dunkelzustand befindet. Durch Projektion auf den Dunkelzustand kann man die Besetzung desselben berechnen. Der Dunkelzustand ist eine Überlagerung der beiden Zustände  $S_{1/2} |0\rangle$  und  $D_{5/2} |1\rangle$ . Der Zustand  $D_{5/2} |1\rangle$  zerfällt aber mit einer Zerfallskonstante von  $2\kappa$  in den Zustand  $D_{5/2} |0\rangle$ . Dieser Zerfall des Dunkelzustandes führt jedoch nicht zu einer Verschlechterung des adiabatischen Prozesses. Die adiabatische Bedingung kann mit der Formel

$$\langle a_0(t) | \rho(t) | a_0(t) \rangle + \langle D_{5/2}|0 | \rho(t) | D_{5/2}|0 \rangle \quad (5.22)$$

berechnet werden, wobei der Dunkelzustand  $a_0(t)$  wie in Gleichung 3.6 definiert ist:

$$a_0(t) = \frac{2g_{32}(t) |S_{1/2}, m_j = -1/2|0\rangle - \Omega_{12} |D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle}{\sqrt{\Omega_{12}^2 + 4g_{32}^2}}. \quad (5.23)$$

#### 5.1.4 Experimentell zugängliche Parameter

In diese Abschnitt werden die wichtigsten Parameter des Experiments zusammengefasst.

- Lichtintensität des Laserstrahles

Die Rabifrequenz ist im Experiment nicht leicht messbar. Man kann jedoch die Leistung des Lasers messen sowie den Strahldurchmesser am Ort des Atoms abschätzen,

und dadurch die Intensität des Laserstrahles bestimmen. Die Intensität ist aber auch gleich

$$I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2. \quad (5.24)$$

Dabei entspricht  $E$  dem Feld am Ort des Atoms. Die Rabi-Frequenz wurde als  $\Omega_{12} = \vec{E} \cdot \vec{d}_{12}/2\hbar$  definiert. Der Dipoloperator kann aus der Linienbreite

$$\Gamma_{12} = \frac{8\pi^2}{3\varepsilon_0\hbar\lambda_{12}^3}d_{12}^2 \quad (5.25)$$

des Übergangs berechnet werden. Daraus ergibt sich für die Rabi-Frequenz:

$$\Omega_{12} = \sqrt{\frac{3\lambda_{12}^3\Gamma_{12}}{16\pi^2c\hbar}}I. \quad (5.26)$$

Für den blauen Laserstrahl ergibt die vorangegangene Formel

$$\Omega_{12} = 2.22 \times 10^4 \sqrt{I}, \quad (5.27)$$

wobei die Intensität in SI - Einheiten zu verwenden ist.

- Kopplungsstärke, Resonatorzerfallsrate

Die einzige variable Größe der Kopplungsstärke eines Resonators für einen bestimmten Übergang ist das Modenvolumen. Dieses ist durch den Abstand der Spiegel und durch deren Krümmung fixiert. Für das Experiment wurde der fast-konzentrische Fall ausgewählt, da dieser bei gleichem Spiegelabstand den kleinsten Taillendurchmesser hat. Für einen Spiegelabstand von 19.95 mm und einem Krümmungsradius der Spiegel von 10 mm ergibt sich für die Kopplungsstärke ein Wert von

$$g_{23} = \sqrt{\frac{4c\gamma_{\perp}\lambda}{\pi L^2}} \sqrt{\frac{L}{\Delta L}} = 2\pi \times 1.514 \text{ MHz}. \quad (5.28)$$

Die Zerfallsrate des Resonators wird durch das Reflexionsvermögen der verwendeten Spiegel fixiert. In einem ersten Test wurde eine Finesse von 90000 gemessen [11], damit ergibt sich eine Zerfallsrate für das Feld von

$$\kappa = \frac{c\pi}{2FL} = 2\pi \times 41.7 \text{ kHz}. \quad (5.29)$$

- Verstimmung des Lasers und des Resonators

Die Verstimmung des Lasers wird mittels EOM oder AOM bewerkstelligt. Dabei kann jede Verstimmung erreicht werden, wenngleich der experimentelle Aufwand für genaue Verstimmungen steigt. Die Verstimmung des Resonators erfolgt durch Addieren einer Spannung an die Regelspannung für jene Piezokeramik, die den Resonator auf konstanter Länge hält.

- Linienbreiten

Es ist wichtig, die Linienbreite des blauen Lasers und des Resonators möglichst klein zu halten, damit die Selektion der einzelnen Zeeman-Niveaus gewährleistet wird. Leichtes Schwingen der Spiegel verursacht eine zusätzliche Linienbreite des Resonators. Die Stabilisierung der Spiegel erfolgt durch Piezokeramiken, die den Abstand



der Spiegel abhängig von einem Fehlersignal korrigieren. Diese zusätzliche Linienbreite des Resonators bezeichnen wir als inhomogene Linienbreite. Sie befindet sich in der Größenordnung von  $\delta_{\text{inh}} = 5 \text{ kHz}$  [24].

Die Linienbreite des blauen Laserlichtes wird durch einen Hochfinesse - Resonator auf einen Wert kleiner 10 kHz verringert [60].

- Anstiegszeit, Pulsform

Abhängig von dem verwendeten Prozess muss die Anstiegszeit unterschiedlich gewählt werden. Für den Ramanprozess kann diese verschwindend klein sein. Für den adiabatischen Prozess muss die Anstiegszeit genügend groß gewählt werden, damit sich das Atom immer im Dunkelzustand befindet. Die genauen Bedingungen für die Anstiegszeit und Pulsform werden im nächsten Abschnitt behandelt.

- Magnetfeld und Ausrichtung

Das magnetische Feld wird in Richtung des Resonators gelegt, damit der Übergang in den Resonator mit  $\Delta m = 0$  verboten ist. Das angelegte Magnetfeld beträgt in etwa fünf Gauss. Damit ergibt sich eine Zeemanaufspaltung für das  $D_{5/2}$  - Niveau von

$$\Delta\omega = \frac{g_j \mu_B B}{h} = 2\pi \times 1.336 \text{ MHz} \quad (5.30)$$

## 5.2 Ramanprozess

Beim Ramanprozess wird der blaue Laser stark zum atomaren Niveau verstimmt. Wenn die Kopplungsstärke des Lasers an das Atom größer als die spontane Emissionsrate ist, verschieben sich die Niveaus des Atoms wegen der Wechselwirkung mit dem Feld. Sind die Verstimmung und die Rabi-Frequenz größer als die spontane Zerfallsrate, dann ergibt sich für das Energieniveau des gekoppelten Zustandes mit dem Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{2} & \frac{\Omega}{2} \\ \frac{\Omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

eine Aufspaltung in der Größe von:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\Delta}{2} \pm \frac{\sqrt{\Omega^2 + \Delta^2}}{2}. \quad (5.32)$$

Betrachtet man die beiden Übergänge in einem drei Niveausystem getrennt, wird das gemeinsame Niveau durch beide Kopplungen aufgespalten. Damit erhält man folgende Gleichungen für eines der beiden Energieniveaus:

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \frac{\Delta_{12}}{2} + \frac{\sqrt{\Omega_{12}^2 + \Delta_{12}^2}}{2} \\ \lambda_{2+} &= \frac{\Delta_{23}}{2} + \frac{\sqrt{4g_{32}^2 + \Delta_{23}^2}}{2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

dabei wurde die dieselbe Notation wie im vorigen Abschnitt verwendet. Für einen Ramanresonanten Prozess müssen die beiden Eigenwerte gleich groß sein, und man erhält eine Funktion der Resonatorverstimmung in Abhängigkeit der Kopplungsstärken und der Laserverstimmung:

$$\Delta_{\text{Ramres}} = \frac{\Delta_{12} + \sqrt{\Omega_{12}^2 + \Delta_{12}^2}}{2} + \frac{2g_{32}^2(\Delta_{12} - \sqrt{\Omega_{12}^2 + \Delta_{12}^2})}{\Omega_{12}^2}. \quad (5.34)$$

### 5.2.1 Effektives Zwei-Niveau-System

Durch adiabatische Elimination des kaum besetzten  $P_{3/2}$  - Niveaus [59] erhält man eine effektive Kopplung zwischen den Niveaus  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$ ,  $m_j = -5/2$  von:

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega_{12}g_{32}}{\Delta_{12}} \quad (5.35)$$

und für die effektive Emissionsrate aus dem oberen Niveau:

$$\Gamma_{\text{eff}} = \left( \frac{\Omega_{12}}{2\Delta_{12}} \right)^2 \Gamma_{\text{Sp}}, \quad (5.36)$$

dabei ist  $\Gamma_{\text{Sp}}$  die gesamte Emissionsrate aus dem oberen Niveau. Durch Variieren der Verstimmung bei konstanter Laserleistung lassen sich die beiden Parameter abstimmen.

Betrachtet man die Zeitskalen des Systems, findet sich ein optimales Verhältnis zwischen der Rabifrequenz und der Verstimmung. Für Rabifrequenzen größer als die spontane Zerfallsrate erhält man Rabioszillationen der beiden Niveaus, die mit einem Faktor  $\exp(-\Gamma t)$  gedämpft sind [30]. Ist die Rabifrequenz kleiner als die spontane Emissionsrate  $\Omega < \Gamma$ , treten keine Oszillationen mehr auf, und das zweite Niveau wird nur schwach besetzt. Aus diesem Grund ist eine Bedingung für einen guten Prozess:

$$\Omega_{\text{eff}} > \Gamma_{\text{eff}}. \quad (5.37)$$

Die Länge der Wechselwirkung für eine maximale Besetzung des angeregten Niveaus hängt von der Rabifrequenz ab. Nach einer Pulslänge von  $\Omega_{\text{eff}}t = \pi$  hat in einem verlustfreien Regime ein vollständiger Besetzungstransfer stattgefunden. Wenn der Besetzungstransfer im effektiven Zwei-Niveau-System schneller stattfindet als der Zerfall der Resonatormode, kann man jede beliebige Überlagerung der beiden Niveaus  $S_{1/2} |0\rangle$  und  $D_{5/2} |1\rangle$  erzeugen. Daraus ergibt sich die zweite Bedingung für den Prozess:

$$\Omega_{\text{eff}} > \kappa. \quad (5.38)$$

Ist die Rabifrequenz kleiner als  $\kappa$ , dann ist der Zerfall der Resonatormode schneller als die Besetzung des  $D_{5/2}$  - Niveaus. Die Emissionszeit ist dann nicht mehr durch die Emission durch die Spiegel limitiert, sondern durch die Zeitskala des Besetzungstransfers. Durch Einsetzen der Gleichungen 3.6 und 5.36 in die Ungleichungen 5.37 und 5.38 ergeben sich die Randbedingungen für das Verhältnis Rabifrequenz zu Verstimmung:

$$\frac{\kappa}{g_{32}} < \frac{\Omega_{12}}{\Delta_{12}} < \frac{4g_{32}}{\Gamma_{\text{Sp}}}. \quad (5.39)$$

Mit den Werten, die im vorigen Abschnitt abgeschätzt wurden, und  $\Gamma_{\text{Sp}} = 2\pi \times (22.98 \pm 0.063)$  MHz [58] ergeben sich die Schranken zu:

$$0.027 < \frac{\Omega_{12}}{\Delta_{12}} < 0.26 \quad (5.40)$$

mit der zusätzlichen Bedingung für die Rabifrequenz:  $\Omega_{12} > \Gamma_{\text{Sp}}$ .

### 5.2.2 Analyse des Ramanprozesses

In der Abbildung 5.5 wurden die am Prozess hauptsächlich beteiligten Niveaus dargestellt. Die obere Graphik zeigt den Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeit der Niveaus  $S_{1/2}$ ,  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ ,  $|D_{5/2} |0\rangle$ . Die beiden Niveaus  $S_{1/2}$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$

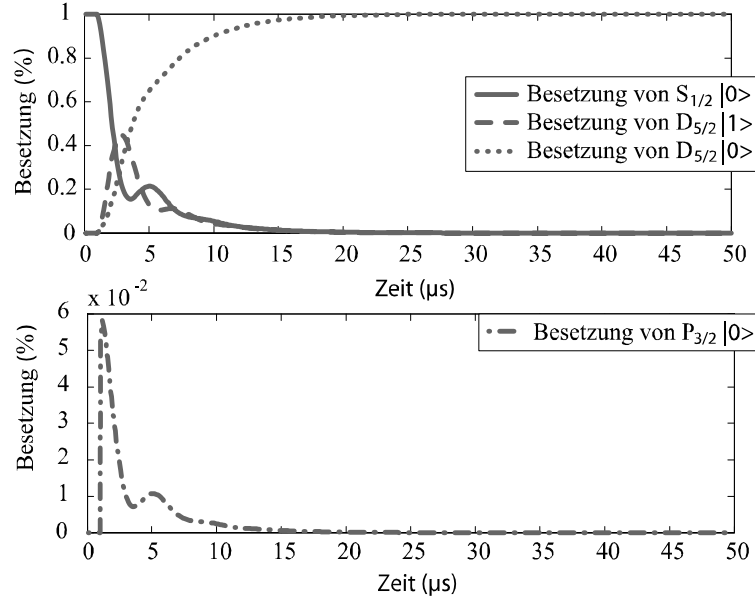


Abbildung 5.5: Zeitlicher Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeiten für einige ausgewählte Niveaus. Die obere Graphik zeigt die Niveaus  $S_{1/2}$ ,  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ ,  $D_{5/2} |0\rangle$ , die untere Graphik das Niveau  $P_{3/2}$ . Das Verhältnis zwischen  $\Omega_{12}$  und  $\Delta_{12}$  liegt bei 0.16, die Kopplung des Resonators  $g$  beträgt  $2\pi \times 1.5$  MHz. Damit ergibt sich eine effektive Rabifrequenz von  $2\pi \times 0.24$  MHz. Die effektive Spontanemission beträgt  $2\pi \times 0.14$  MHz. Pro Kurve werden 500 Punkte berechnet, mit einer Schrittweite von  $0.1 \mu\text{s}$ .

sind durch den Ramanprozess miteinander gekoppelt. Wird das Photon aus dem Resonator emittiert, zerfällt der Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  in den Zustand  $|D_{5/2} |0\rangle$ , und das System hat seinen Endzustand erreicht. Die Besetzungswahrscheinlichkeit der einzelnen Niveaus entsprechen den jeweiligen Diagonalelemente der Dichtematrix. Die untere Graphik zeigt die Besetzung des Niveaus  $P_{3/2}$ .

Wie aus dem vorigen Abschnitt zu entnehmen ist, spielt für den Fall  $\Omega_{12} > \Gamma_{\text{Sp}}$  nur das Verhältnis zwischen  $\Omega_{12}$  und  $\Delta_{12}$  eine Rolle. Für den dargestellten Fall liegt dieses bei 0.16. Die Kopplung des Resonators  $g$  beträgt  $2\pi \times 1.5$  MHz und die Resonatorzerfallszeit  $\kappa = 2\pi \times 40$  kHz. Mit diesen Werten ergibt sich eine effektive Rabifrequenz  $\Omega_{\text{eff}} = 2\pi \times 0.24$  MHz, im Gegensatz dazu beträgt die effektive Spontanemission  $2\pi \times 0.14$  MHz.

Zu Beginn der Simulation befindet sich die gesamte Besetzung im Niveau  $S_{1/2}$  (durchgezogene Linie). Sobald der Laser mit einer Wellenlänge von 393 nm mit der richtigen Intensität auf das Ion gestrahlt wird, wird der Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  (strichlierte Linie) besetzt. Es gibt zwei mögliche Prozesse, damit das System diesen Zustand verlässt. Das Ion kann erneut in den Grundzustand  $S_{1/2}$ , über das Niveau  $P_{3/2}$  zerfallen, oder das Photon wird aus dem Resonator emittiert. Im ersten Fall wird der Prozess von vorn wiederholt, im zweiten Fall ist ein erneutes Anregen aus dem Niveau  $D_{5/2}$  nicht möglich, da keine Energie mehr vorhanden ist, um das Ion in den Zustand  $P_{3/2}$  zu heben. Der letzte Zustand ( $|D_{5/2} |0\rangle$ ) wird durch die gepunktete Linie dargestellt. Die Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes  $D_{5/2} |0\rangle$  addiert sich aus dem Anteil der spontan emittierten Photonen und jenen die durch den Resonator emittiert werden. Die Besetzung des  $P_{3/2}$ -Niveaus (gepunktete Linie in der unteren Graphik) ist ungefähr proportional zur Besetzung des  $S_{1/2}$

$\Omega_{12}/\Delta_{12}$	0.03	0.16	0.3
$\Omega_{\text{eff}}$ (MHz)	0.045	0.24	0.45
$\Gamma_{\text{eff}}$ (MHz)	0.0048	0.14	0.48
$P_{\text{em}}$ (%)	97.6	85.8	64.6
$t_{\text{em}}$ ( $\mu\text{s}$ )	34.7	17.8	14.1
$\beta$ (%)	77.5	32.4	14.208

Tabelle 5.2: Emissionswahrscheinlichkeit, Emissionszeit und Güte für die in der oberen Grafik gezeigten Prozesse. Für eine Interpretation siehe Text.

- Niveaus. Wegen der großen Verstimmung ist die Besetzung des  $P_{3/2}$  - Niveaus klein, und das Niveau zerfällt wesentlich schneller als es angeregt wird. Aus diesem Grund ändert sich die Besetzung des  $P_{3/2}$  - Niveaus instantan mit der Änderung des  $S_{1/2}$  - Niveaus.

Die Emissionsrate, ein Photon aus dem Resonator zu bekommen, ist proportional zur Besetzung des  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ -Niveaus. Der Proportionalitätsfaktor ist  $2\kappa$ . Die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  (siehe Gleichung 5.18) für ein Photon aus dem Resonator entspricht der Fläche unter der Kurve von  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  mal  $2\kappa$ . Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  (Gleichung 5.20) umfasst jenes Zeitfenster bei der die Emissionsrate 1% vom maximalen Wert erreicht hat, mit anderen Worten liegen die Grenzen somit bei 1% der maximalen Besetzungswahrscheinlichkeit des Niveaus  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ . Als Verlust werden diejenigen Photonen bezeichnet, die vom Ion gestreut werden, aber nicht in den Resonator gelangen. Die Verlustrate ist proportional zur Besetzung des  $P_{3/2}$  Niveaus, mit der Zerfallskonstanten  $\Gamma_{\text{Sp}}$  als Proportionalitätsfaktor. Die Güte  $\beta$  für den Prozess lässt sich nicht direkt aus dem oberen Diagramm ablesen. Sie ist das Verhältnis der Emissionsrate eines Photons durch den Resonator zur gesamten Emissionsrate. Dabei ergibt sich die gesamte Emissionsrate aus der Summe der Ein-Photonen Emissionsrate und der Verlustrate.

In der Abbildung 5.6 sind für verschiedene effektive Ramanfrequenzen die zeitliche Entwicklung der oben erwähnten Niveaus dargestellt. In der linken Spalte werden die Niveaus  $S_{1/2}$ ,  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ ,  $|D_{5/2}|0\rangle$  dargestellt, in der rechten Spalte das Niveau  $P_{3/2}$ . Für alle Graphiken ist die Rabi-frequenz  $\Omega_{12}$  gleich  $2\pi \times 10$  MHz, die Kopplung des Resonators  $g_{32} = 2\pi \times 1.5$  MHz und die Resonatorzerfallszeit  $\kappa$  beträgt 40 kHz. Die Zerfallskonstanten sind jene für  $\text{Ca}^+$  Ionen.

Die Verstimmung wurde derart gewählt, dass die effektive Rabi-frequenz  $\Omega_{\text{eff}}$  im ersten Fall ungefähr gleich der Resonatorzerfallskonstanten  $\kappa$  entspricht, im zweiten Fall größer als  $\kappa$  und größer als die effektive Zerfallskonstante  $\Gamma_{\text{eff}}$  ist, und im dritten Fall dann in etwa gleich wie  $\Gamma_{\text{eff}}$  ist. Das Verhältnis von  $\Omega_{12}$  zu  $\Delta_{12}$  beträgt demnach von oben nach unten 0.03, 0.16 und 0.3. Die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Photon durch den Resonator, die Emissionszeit für ein Photon und die Güte des Prozesses wurden in der Tabelle 5.2 für die drei effektiven Rabi-frequenzen zusammengestellt.

Bei einer kleinen effektiven Rabi-frequenz hängt die Emissionszeit stark von dieser ab. Ist das Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  besetzt, wird das Photon sofort aus dem Resonator emittiert, noch bevor das Ion wieder in das Niveau  $S_{1/2}$  gebracht werden kann. Die Wahrscheinlichkeit das Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  zu besetzen, ist aber wegen der kleinen Rabi-frequenz klein, sodass der gesamte Prozess langsam abläuft. Andererseits ist die Besetzung des Niveaus  $P_{3/2}$  äußerst gering. Die starke Unterdrückung der Spontanemission führt zu einer hohen gesamten Besetzungswahrscheinlichkeit des Niveaus  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  und somit zu einer hohen Emissionswahrscheinlichkeit für ein Photon. Wird die effektive Rabi-frequenz wesentlich größer als  $\kappa$  gewählt, sollte die Besetzung zwischen den Niveaus  $S_{1/2}$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  ein paar Mal oszillieren, bevor das Photon aus dem Resonator

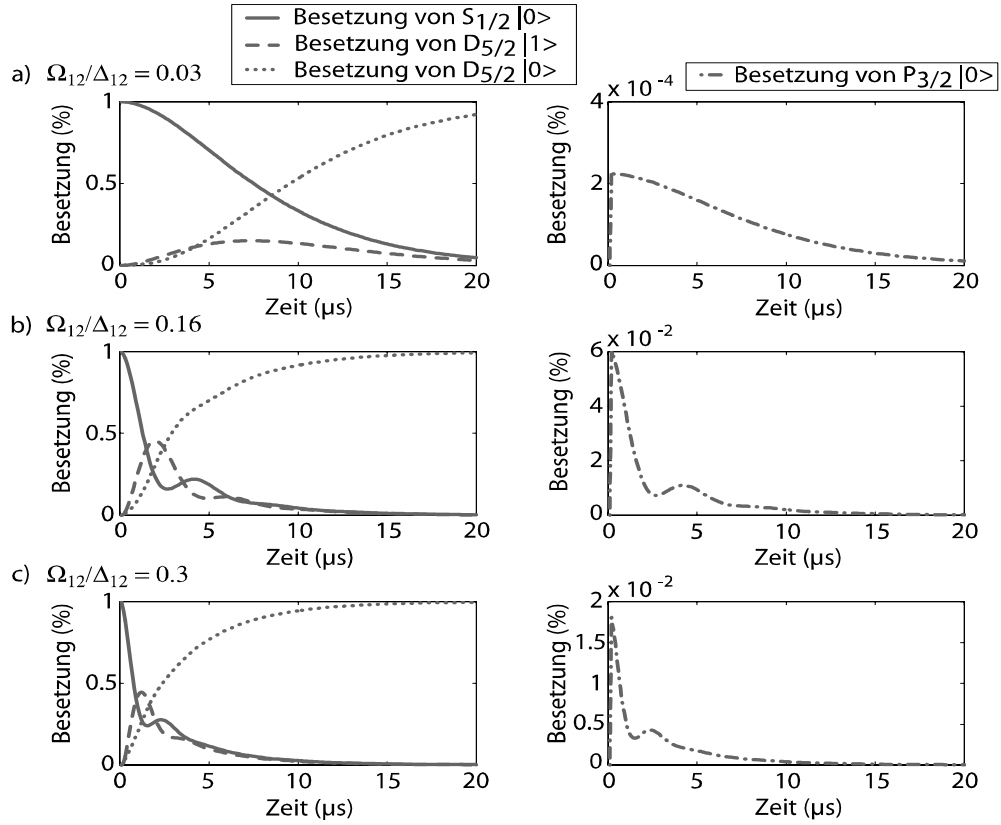


Abbildung 5.6: Zeitliche Entwicklung für verschiedene Ramanfrequenzen. Die Kopplung des Lasers an das Atom beträgt  $2\pi \times 10$  MHz, die Kopplung des Resonators beträgt  $2\pi \times 1.5$  MHz. Durch Variieren der Verstimmung lässt sich die effektive Rabi-Frequenz einstellen.  $\Omega/\Delta$  beträgt für die obersten beiden Grafiken 0.03, für die mittlere 0.16 und für die unterste 0.3. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon zu emittieren, die Emissionszeit und die Güte des Prozesses können der Tabelle 5.2 entnommen werden.

emittiert wird. Dies ist aber nur gültig, wenn  $\Omega_{\text{eff}}$  größer als  $\Gamma_{\text{eff}}$  ist [30]. Betrachtet man die mittlere Graphikzeile aus der Abbildung 5.6, kann man eine Schwingung erkennen, die allerdings stark gedämpft ist. Berechnet man aus dem  $2\pi$  Intervall die Rabi-Frequenz, dann ergibt sich eine leichte Diskrepanz zur erwarteten effektiven Rabi-Frequenz. Diese entstammt aus der nicht mehr erfüllten Näherung für die adiabatische Elimination. Wegen der höheren effektiven Spontanemission ist auch die Besetzungswahrscheinlichkeit des Niveaus  $P_{3/2}$  größer. Dadurch werden mehr Photonen spontan aus dem Niveau  $P_{3/2}$  emittiert. Dies führt zu einer niedrigeren Güte und zu einer geringeren Ein-Photonen Emissionswahrscheinlichkeit.

### 5.3 Adiabatischer Prozess

Beim adiabatischen Prozess wird das Ion in einem Dunkelzustand, also in einer Überlagerung zweier Grundzustände präpariert. Schafft man eine adiabatische Änderung ohne den Dunkelzustand zu verlassen, wird während des gesamten Prozesses kein Verlustphoton emittiert. In dieser Arbeit besteht der Dunkelzustand aus dem Grundniveau  $S_{1/2}$  und

dem metastabilen Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$ . Der Quadrupolübergang zwischen  $D_{5/2}$  und  $S_{1/2}$  hat eine Lebensdauer von 1.05s und kann im Vergleich zum viel schnelleren Transferprozess in der Größenordnung von einigen  $\mu\text{s}$  bis zu einigen 100  $\mu\text{s}$  als stabil betrachtet werden. Damit man während des gesamten Prozesses im Dunkelzustand bleibt, muss der Besetzungstransfer langsam im Vergleich zur Aufspaltung der Energieeigenwerte sein. Die Energieeigenwerte wurden in Kapitel 3.3 für das Drei-Niveau-Atom berechnet.

### 5.3.1 Adiabatische Bedingung

Der Abstand der Energieeigenwerte beträgt

$$|w^\pm - w^0| \quad (5.41)$$

mit der gleichen Notation wie in Abschnitt 3.3. Daraus ergibt sich die größte Aufspaltung, wenn die Verstimmung der beiden Kopplungsfrequenzen zu den atomaren Übergängen verschwindet. Die Stärke der Resonatorkopplung an das Atom stellt ein Maß für die Aufspaltung der Energieniveaus dar, speziell da die Rabifrequenz des Lasers am Beginn des Transferprozesses Null ist. Je weiter die Eigenwerte voneinander entfernt sind, desto schneller kann sich das Verhältnis zwischen den Besetzungen ändern. Setzt man in die Formel 3.10

$$\dot{\theta} < |w^\pm - w^0| \quad (5.42)$$

die Werte des Hamiltonoperators mit  $\Delta_{12} = \Delta_{23} = 0$ , konstantem  $g_{32}$  und  $\Omega_{12}(t) = \Omega_{12}f(t)$ , mit  $f(t)$  einer beliebigen zeitabhängigen Funktion mit einem Wertebereich von  $[0..1]$ , ergibt sich für die adiabatische Bedingung:

$$\dot{f}(t) < \frac{(4g_{32}^2 + \Omega_{12}^2 f(t)^2)^{3/2}}{4g_{32}\Omega_{12}}. \quad (5.43)$$

Der Dunkelzustand lässt sich schreiben als

$$|a^0\rangle = \cos\theta |S_{1/2}, m_j = -1/2|0\rangle - \sin\theta |D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle \quad (5.44)$$

Daraus ergibt sich die Rate, mit der der Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  besetzt wird zu:

$$R = \cos\theta \cdot \dot{\theta}, \quad (5.45)$$

und ein vollständiger Besetzungstransfer kann nur erfolgen, wenn der Besetzungswinkel  $\tan\theta = \Omega_{12}/2g_{32} = \infty$  wird. Daher muss für diesen Fall die Kopplung des Resonator ausgeschaltet werden. Wird die Rabifrequenz des Laserstrahles jedoch wesentlich größer als die Kopplung durch den Resonator, wird ebenfalls ein annähernder Besetzungstransfer erreicht. Ist die Rabifrequenz 20 mal größer als die Kopplung des Resonators, entspricht dies einer Besetzung des Niveaus  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  von 99.5 %. Da es für das Experiment von Vorteil ist den Resonator auf einer konstanten Länge zu halten, wird  $g_{32}$  deshalb konstant gehalten.

Für die Simulation wurde die zeitabhängige Funktion folgendermaßen gewählt [56]:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^2(at), \quad \text{für } 0 < at < \frac{\pi}{2} \\ f(t) &= 0 \quad t < 0 \\ f(t) &= 1 \quad t > \frac{\pi}{2a} \end{aligned} \quad (5.46)$$

mit  $a = \pi/2\tau$ , dabei entspricht  $\tau$  der Anstiegsdauer der Rabifrequenz. Wenn  $\Omega_{12} > g_{32}$  findet ein fast vollständiger Besetzungstransfer in einer Zeit  $t < \tau$  statt. Für diesen Fall

kann der Sinus entwickelt werden. In den folgenden Rechnungen wird immer nur die erste Ordnung des Sinus mitgenommen.

Die Besetzungszeit für das Endniveau ergibt sich aus  $\sin\theta(t) = 1$ . Durch Einsetzen erhält man für die Besetzungszeit folgende Ungleichung:

$$t_{Bes} > \sqrt{\frac{8\tau^2 g_{32}}{\pi^2 \Omega_{12}}}. \quad (5.47)$$

Je kleiner das Verhältnis  $g/\Omega$  ist, desto kleiner wird auch die Dauer für einen vollständigen Besetzungstransfer.

Setzt man in die Gleichung 3.10 die zeitliche Entwicklung, die in der Gleichung 5.46 definiert wurde, ein, kann man die adiabatische Bedingung abschätzen. Die linke Seite ist maximal, wenn der Sinus gleich eins ist. Der maximale Wert gleich  $\pi/2\tau$ . Die rechte Seite hat ihr Minimum bei  $f(t) = 0$ , was sich leicht nachrechnen lässt, und ist in diesem Fall von der Größe  $2g^2/\Omega$ . Damit ergibt sich für die variablen Parameter  $\Omega$  und  $\tau$  die Bedingung:

$$\frac{\Omega_{12}}{\tau} < \frac{4}{\pi} g_{32}^2 \approx 2.8 \cdot 10^{12}. \quad (5.48)$$

Ein etwas anderer Zugang zur Berechnung der Parameter  $\Omega$  und  $\tau$  ergibt sich durch Einsetzen der Funktion  $f(t)$  in die adiabatische Bedingung, mit der Näherung, dass man sich in dem Bereich  $2g_{32} > \Omega_{12} \sin^4\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)$  befindet. Damit ergibt sich folgende Ungleichung für die adiabatische Bedingung

$$\frac{\Omega_{12}}{\tau^2} < \frac{4g_{32}^2}{\pi^2 t} = \frac{2g_{32}^3}{\pi^2}, \quad (5.49)$$

wobei für  $t$  die Besetzungszeit eingesetzt wurde.

### 5.3.2 Gefundene Relationen der Größen

Der Besetzungsanstieg  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  des Niveaus erfolgt mit einer Rate  $\cos\theta \cdot \dot{\theta}$ . Soll der Besetzungstransfer schneller geschehen als der Zerfall aus dem Resonator, damit das emittierte Photon die Information der Überlagerung behält, muss diese Rate größer sein, als die Resonatorzerfallsrate  $\kappa$ . Erneut werden die oben erwähnten Näherungen gemacht, und man erhält mit einer Emissionszeit  $t = \sqrt{8g_{32}\tau^2/(\pi^2\Omega_{12})}$ , die Bedingung:

$$\frac{\Omega_{12}}{\tau^2} > 2\kappa^2 g_{32} \approx 5 \times 10^{14} \quad (5.50)$$

Vergleicht man diesen Wert mit jenem für die adiabatische Bedingung, so ergibt sich ein großes Fenster für die Wertepaare von  $\Omega_{12}/\tau^2$ . Der Vergleich mit der Simulation offenbart allerdings, dass die oben abgeschätzte adiabatische Bedingung eine äußerst schwache Einschränkung darstellt. Für annehmbare Werte der gesuchten Größen (siehe nächstes Kapitel) muss man das Verhältnis von  $\Omega_{12}/\tau^2$  um einige Größenordnungen verringern. Die Diskrepanz zwischen der Abschätzung und der Simulation entstammt aber auch der Tatsache, dass die spontane Emission bei den Berechnungen vernachlässigt wurde. Neben der adiabatischen Bedingung gibt es eine zweite Bedingung, nämlich dass die Kopplung des Lasers und des Resonators größer als die spontane Emissionsrate sind.

In Abbildung 5.7 wurde für einen Satz von Anfangsparametern die zeitliche Entwicklung dargestellt. Die Grafik 5.7d zeigt den Anstieg der Rabi-Frequenz des Lasers 393 nm und die konstante Kopplungsstärke des Resonators. In Grafik 5.7a werden die Besetzungen des Anfangszustandes  $S_{1/2} |0\rangle$  und die Besetzung von  $D_{5/2} |0\rangle$  und  $D_{5/2} |1\rangle$  dargestellt. Für

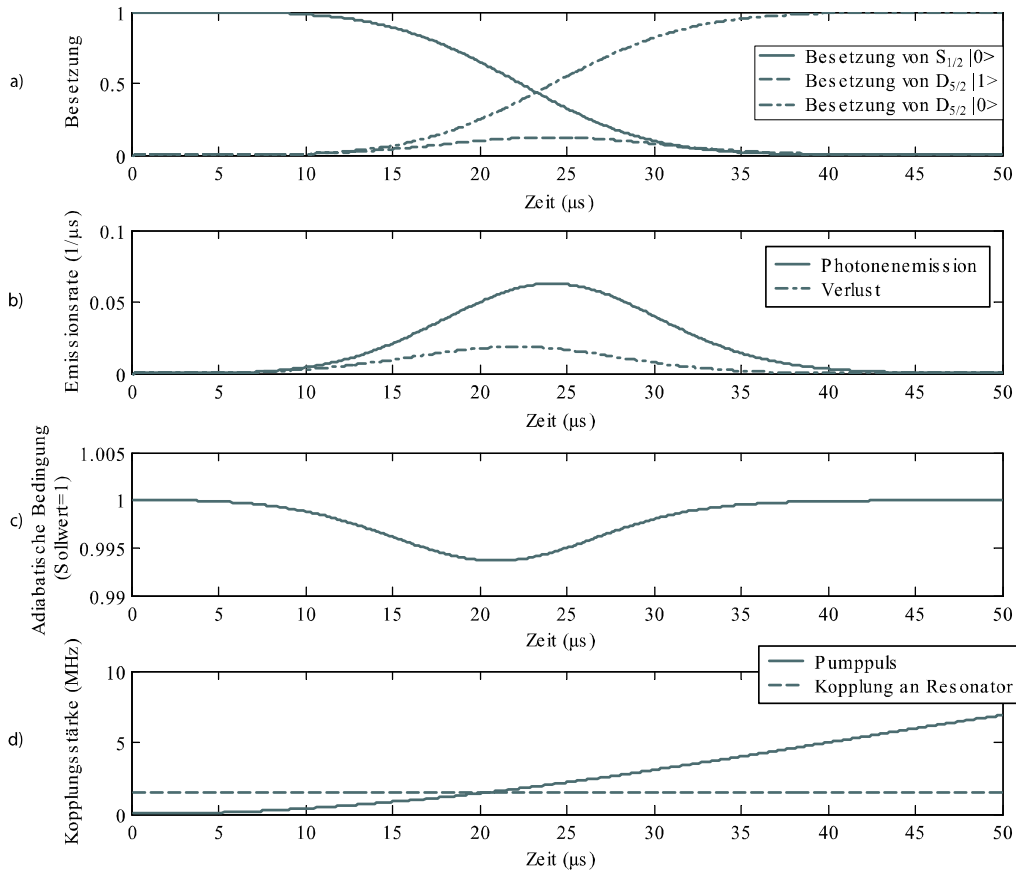


Abbildung 5.7: Besetzungstransfer durch einen adiabatischen Prozess. Die oberste Grafik zeigt den zeitlichen Verlauf der Besetzungen. Gestartet wird im Niveau  $S_{1/2}$ . Die Abweichung vom Dunkelzustand wird in der dritten Grafik veranschaulicht und beträgt an der größten Stelle  $7 \times 10^{-3}$ . Der zeitliche Verlauf des Lasers und des Resonators wird im letzten Bild dargestellt.



steigende Rabi-Frequenz ändert sich der Besetzungswinkel  $\theta$  zwischen den beiden Zuständen  $S_{1/2} |0\rangle$  und  $D_{5/2} |1\rangle$ , die Besetzung von  $S_{1/2} |0\rangle$  wird adiabatisch in den Zustand  $D_{5/2} |1\rangle$  transferiert. Der Zustand  $D_{5/2} |1\rangle$  zerfällt mit einer Rate von  $2\kappa$  in den Endzustand  $D_{5/2} |0\rangle$ . Die Grafik 5.7b zeigt die Emissionsraten aus dem Resonator (durchgezogene Linie) und aus dem Niveau  $P_{3/2}$  (punkt-strichlierte Linie). Das Niveau  $P_{3/2}$  wird durch nichtadiabatische Prozesse besetzt. Diese treten auf, wenn die Änderung der Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  zu schnell erfolgt. Ein Maß für die Nichtadiabaticität ist die Projektion des Zustandes des Systems auf den Dunkelzustand (siehe Grafik 5.7c). Die Parameter  $(\Omega_{12}, g, \kappa)$  in Abbildung 5.7 sind  $2\pi \times (10, 1.5, 0.04)$  MHz, und die Anstiegsdauer der Laserintensität beträgt  $\tau = 80 \mu\text{s}$ . Mit diesen Werten ergibt sich eine Photonenemission von  $P_{\text{em}} = 97.9\%$ , eine Güte von  $\beta = 77.7\%$  und eine Emissionszeit von  $t_{\text{em}} = 38.3 \mu\text{s}$ .

Betrachtet man die Grafiken 5.7 b-d, wird deutlich, dass eine zeitabhängige Resonator-Kopplung wenig Sinn macht, da das Photon viel schneller aus dem Resonator emittiert wird, als sich die Laserintensität ändert. Die Änderung der Laserintensität wird durch die adiabatische Bedingung beschränkt und kann aus diesem Grund nicht beliebig schnell erfolgen. Eine theoretische Möglichkeit, den Besetzungstransfer zu beschleunigen, ist die Erhöhung der Kopplungsstärke. Diese wird in Abschnitt 6.1.6 näher beschrieben.

Für eine gegebene Kopplungsstärke  $g_{32}$  und festes  $\kappa$  hängt das Ergebnis ( $P_{\text{em}}, t_{\text{em}}, \beta$ ) nur mehr von der Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  und der Zeitspanne  $\tau$  ab. Wegen der langsamen Erhöhung der Laserintensität liegt es nahe, den Sinus zu entwickeln. Das erste Glied der Reihe ist proportional zu  $\Omega_{12}/\tau^2$ . Es zeigt sich, dass die gesuchten Werte  $P_{\text{em}}, t_{\text{em}}$  und  $\beta$  von diesem Verhältnis  $\Omega_{12}/\tau^2$  abhängen.



# Kapitel 6

## Ergebnisse

In diesem Kapitel werden der Ramanprozess und der adiabatische Prozess miteinander verglichen. In einem ersten Schritt werden die gesuchten Parameter in einem idealen System berechnet. In einem zweiten Schritt werden die Linienbreite des Lasers, eine inhomogene Verbreiterung der Resonatorlinienbreite und Abweichungen von der Resonanzbedingung in die Rechnung mit einbezogen. Dadurch ergeben sich realistischere Werte für die beiden Prozesse. Im dritten Teil wird einer der beiden Prozesse ausgewählt, und die Pulssequenz mit diesem Prozess wiederholt. Des Weiteren wird die Intensitätskorrelationsfunktion für verschiedene Wiederholungsraten berechnet.

### 6.1 Vergleich von Ramanresonanz und adiabatischem Prozess

Die physikalische Interpretation des Ramanprozesses und des adiabatischen Prozesses ist unterschiedlich. In beiden Fällen werden die drei Niveaus eines  $\Lambda$ -Systems miteinander gekoppelt. Ein Laser  $\Omega_{12}$  koppelt das Grundniveau  $|1\rangle$  mit dem angeregten Niveau  $|2\rangle$ . Die Kopplung zwischen dem Niveau  $|2\rangle$  und dem Niveau  $|3\rangle$  erfolgt durch einen optischen Resonator  $g_{32}$  (dabei wurde dieselbe Notation wie im vorhergehenden Abschnitt verwendet). Die Verstimmung des Lasers  $\Omega_{12}$  bzw. des Resonators  $g_{32}$  ist  $\Delta_{12}$  bzw.  $\Delta_{23}$ . Im Ramanprozess ist  $\Delta_{12} > \Omega_{12}$ , wodurch das Niveau  $|2\rangle$  kaum besetzt wird. Die hohe Laserintensität  $\Omega_{12}$  induziert eine Energieverschiebung  $\lambda_{1+}$  (siehe Kapitel 5.2) des angeregten Niveaus. Strahlt der Resonator resonant zwischen dem durch den AC-Stark Effekt verschobenen Niveau und dem Niveau  $|3\rangle$  ein, wird die Besetzung kohärent vom Niveau  $|1\rangle$  in das Niveau  $|3\rangle$  transferiert. Das Drei-Niveau-System kann somit als effektives Zwei-Niveau-System betrachtet werden. Die Besetzung oszilliert zwischen den Niveaus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  mit einer effektiven Rabi-Frequenz  $\Omega_{\text{eff}} = g_{32}(\Omega_{12}/\Delta_{12})$ , siehe Kapitel 5.2.

Setzt man  $\Delta_{12} = \Delta_{23}$ , kann man, für das gekoppelte Drei-Niveau-System, einen neuen Satz von Energieeigenwerten und Eigenvektoren berechnen. Ein Zustand  $a^0$  wird als Überlagerung des Grundniveaus  $|1\rangle$  und des metastabilen Niveaus  $|3\rangle$  gebildet, enthält aber nicht den Zustand  $|2\rangle$ . Betrachtet man ein kartesisches Koordinaten System, bei dem die drei Zustände  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  und  $|3\rangle$  den Koordinatenachsen entsprechen, dann bewegt sich der Zustand  $a^0$  in der Ebene, die durch die Niveaus  $|1\rangle$  und  $|3\rangle$  aufgespannt ist. Am Beginn der Wechselwirkung liegt der Zustand  $a^0$  parallel zur Achse  $|1\rangle$ . Durch Ändern der Kopplungsstärken kann man den Zustand  $a^0$  um  $90^\circ$  innerhalb der  $|1\rangle$  -  $|3\rangle$  Ebene drehen, sodass der Zustand  $a^0$  am Ende der Wechselwirkung parallel zur Achse  $|3\rangle$  liegt. Dieser Prozess muss dabei langsam genug erfolgen, damit sich das Ion immer in dem Zustand  $a^0$  befindet,

und nicht den Zustand  $|2\rangle$  besetzt. Man kann sich den Prozess wie einen Kreisel vorstellen, dessen Rotationsachse zu Beginn des Prozesses waagrecht liegt, und schnell um diese Achse rotiert. Möchte man die Achse des Kreisels um  $90^\circ$  drehen, muss man dies langsam genug machen, damit sich der Drehimpuls, herforderufen durch die Rotation um die eigene Achse, mitdreht. Wenn man die Achse zu schnell dreht, zeigen die Achse des Kreisels und sein Drehimpuls nicht mehr in dieselbe Richtung, und der Kreisel beginnt zu schlingern. Im Falle des Atoms ist der gewünschte Zustand immer parallel zur Achse des Kreisels, die beiden verlustreichen Zustände enthalten die Achse  $|2\rangle$ . Wenn nun durch zu schnelles Ändern der Kreiselachse der Drehimpuls nicht mehr parallel zu dieser verläuft, wird der Zustand  $|2\rangle$  besetzt, das heißt, es wird das Niveau  $P_{3/2}$  besetzt, und zerfällt spontan, wodurch die Güte des Prozesses verschlechtert wird.

Im Experiment möchte man mit einer großen Wiederholungsrate genau ein Photon pro Anregungspuls aus dem Resonator erhalten. Für die Analyse der beiden Prozesse werden die folgenden Größen berechnet: 1) Die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{em}$  (definiert in Gleichung 5.18) gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der pro Anregungspuls ein Photon über den Übergang  $\Delta m = +1$  aus dem Resonator emittiert wird. 2) Mit der Emissionszeit  $t_{em}$  (definiert in Gleichung 5.20) wird die Zeitdauer angegeben, die benötigt wird, um das Photon aus dem Resonator zu emittieren. 3) Die Güte  $\beta$  ist in Gleichung 5.21 definiert. Die Güte gibt das Verhältnis der Photonen, die durch den Resonator emittiert werden, zur Gesamtzahl an emittierten Photonen an.

Für den Prozess sind einige Freiheitsgrade vorhanden. Es kann die Laserstärke  $\Omega_{12}$  variiert werden, die Verstimmung  $\Delta_{12}$  des Lasers zum Niveau  $P_{3/2}$  ist ebenfalls frei wählbar. Die Verstimmung  $\Delta_{23}$  des Resonators vom atomaren Übergang ist durch die Wahl des Prozesses festgelegt. Beim Ramanprozess muss  $\Delta_{23} = \Delta_{Ramres}$  gelten, wobei die Resonanzbedingung  $\Delta_{Ramres}$  in Gleichung 5.34 berechnet wurde. Beim adiabatischen Prozess müssen die beiden Verstimmungen gleich groß sein:  $\Delta_{12} = \Delta_{23}$ . Ein dritter Freiheitsgrad ist die zeitliche Änderung der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$ . In der Simulation wird ein Puls verwendet, der für Zeiten kleiner als der Startzeit Null ist, dann mit dem Quadrat der Sinusfunktion ansteigt, und wenn er seinen maximalen Wert erreicht hat, konstant bleibt (siehe Gleichung 5.46). Beim adiabatischen Prozess ist diese Anstiegszeit des Laserpulses von entscheidender Bedeutung.

Durch den experimentellen Aufbau sind die Resonatorkopplung  $g_{32} = 2\pi \times 1.5$  MHz und die Verlustrate aus dem Resonator  $\kappa = 2\pi \times 40$  kHz festgelegt. Die Resonatorkopplung kann durch Verschieben der Stehwelle verringert werden. Im Folgenden wird immer die maximale Kopplung zur Berechnung von  $P_{em}$ ,  $t_{em}$  und  $\beta$  verwendet. Das angelegte Magnetfeld wird normal zur Resonatorachse betrachtet, wodurch der Übergang  $\Delta m = 0$  unterdrückt wird (Abbildung 4.4). Das angelegte Magnetfeld hat eine Stärke von  $B = 4$  G.

### 6.1.1 Idealer Ramanprozess

Beim Ramanprozess ist die Laserfrequenz weit von der atomaren Übergangsfrequenz entfernt,  $\Delta_{12} > \Omega_{12}$ , aber die Verstimmung erreicht nicht annähernd den Wert des optischen Übergangs. Entfernt man das Niveau  $P_{3/2}$  durch adiabatische Elimination, erhält man ein effektives Zwei-Niveau-System mit einer effektiven Rabifrequenz  $\Omega_{eff} = g_{32}(\Omega_{12}/\Delta_{12})$ . Die spontane Emissionsrate aus dem Niveau  $P_{3/2}$  beträgt  $\Gamma_{eff} = \Gamma_{Sp}(\Omega_{12}/2\Delta_{12})^2$  (siehe Kapitel 5.2).

In Abbildung 6.1 wurden die Photonenemission  $P_{em}$ , die Emissionszeit  $t_{em}$  und die Güte  $\beta$  als Funktion der Rabifrequenz und der effektiven Ramanrabifrequenz aufgetragen. Verwendet wird ein Konturdiagramm, um die Abhängigkeit der drei Größen ( $P_{em}$ ,  $t_{em}$  und  $\beta$ ) sowohl von der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$ , als auch von dem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  zu erhalten. Die effektive Ramanrabifrequenz, das heißt, die effektive Kopplung zwischen dem  $S_{1/2}$  und dem

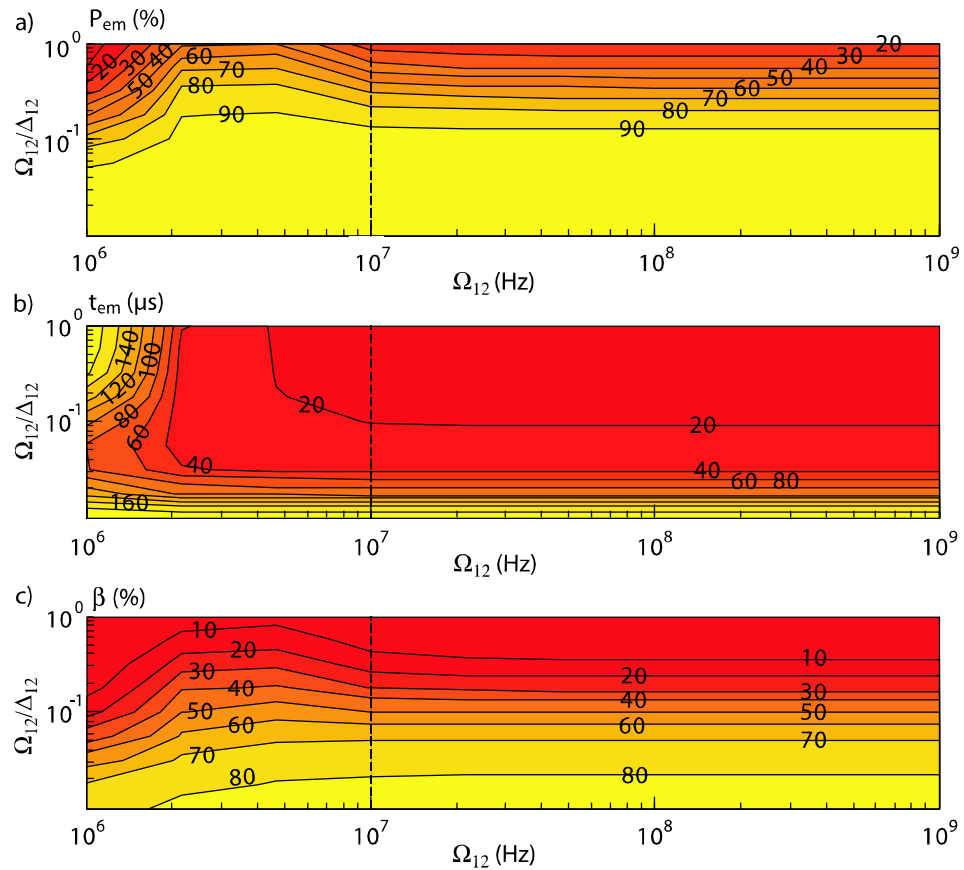


Abbildung 6.1: Abhängigkeit der Photonemission  $P_{em}$ , der Emissionszeit  $t_{em}$  und der Güte  $\beta$  von der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$  und der Ramanrabifrequenz  $\Omega_{eff} \sim \Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Die effektive Rabifrequenz  $\Omega_{eff}$  zwischen  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$  ist proportional zu  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Der Proportionalitätsfaktor entspricht der Kopplung des Resonators an das Ion. Für eine genaue Interpretation des Ergebnisses siehe den Text. Rote Bereiche indizieren kleine Werte, gelbe Bereiche große Werte. Die Emissionszeit (Grafik b) reicht von  $20 \mu$ s für große Raman-Rabifrequenzen bis zu  $200 \mu$ s für kleine effektive Rabifrequenzen. Der Vergleich mit den beiden anderen Bildern macht deutlich, dass für kleine Emissionszeiten  $t_{em}$  sowohl die Photonemission  $P_{em}$  als auch die Güte  $\beta$  schlecht sind (20% bzw. 10%).

$D_{5/2}$  Niveaus, ist  $\Omega_{\text{eff}} = g_{32}(\Omega_{12}/\Delta_{12})$ . Abbildung 6.1a zeigt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ . Die Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Photons liegt zwischen 20 % bis zu einem Wert größer als 90 %. Die Bereiche gleicher Emissionswahrscheinlichkeiten wurden durch Linien miteinander verbunden und diese mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit in Prozent beschriftet. Im hellgelben Bereich ist die Emissionswahrscheinlichkeit größer als 90 %. Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  wird in der Abbildung 6.1b dargestellt. Für die gewählte Laserintensität und Verstimmung liegt diese zwischen  $20 \mu\text{s}$  und  $200 \mu\text{s}$ . Es wurden Prozesse mit gleicher Zeitdauer durch Linien verbunden. Die Beschriftungen der Linien entsprechen den Emissionszeiten in  $\mu\text{s}$ . Die Abbildung 6.1c zeigt die Güte  $\beta$ . Rote Bereiche stehen für eine schlechte Güte, das bedeutet, die Wahrscheinlichkeit für spontan emittierte Photonen ist groß. Im hellgelben Bereich ist die Güte größer als 80 %. Die Beschriftung der Konturlinien gibt die Güte in Prozent wieder.

Betrachtet man die Abbildung 6.1b, erkennt man, dass sich  $t_{\text{em}}$  für ein festes Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  für große Rabifrequenzen  $\Omega_{12} > 10 \text{ MHz}$  nicht ändert. Für kleinere Rabifrequenzen vergrößert sich  $t_{\text{em}}$ , wenn  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  konstant bleibt. Ändert man bei konstanter Laserintensität  $\Omega_{12}$  (z.B.:  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$ , dies entspricht der strichlierten Linie) die Verstimmung  $\Delta_{12}$ , ändert sich die Emissionszeit. Für kleine Verstimmungen  $\Delta_{12} \approx \Omega_{12}$  ist  $t_{\text{em}} < 20 \mu\text{s}$  am Kleinsten. Vergrößert man die Verstimmung, läuft der Photonenemissionsprozess langsamer ab, und die Emissionszeit steigt.

Die Photonenemissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  in Abbildung 6.1a zeigt für  $\Omega_{12} > 10 \text{ MHz}$  dasselbe Verhalten wie die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$ .  $P_{\text{em}}$  ist von dem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  abhängig, nicht aber von der jeweiligen Rabifrequenz  $\Omega_{12}$ . Fixiert man  $\Omega_{12}$  auf einer Stärke, ändert sich  $P_{\text{em}}$ , wenn man die Verstimmung  $\Delta_{12}$  variiert. Für kleine Verstimmungen  $\Delta_{12} \approx \Omega_{12}$  ist  $P_{\text{em}} \approx 20 \%$  klein. Die Emissionswahrscheinlichkeit steigt, wenn man die Verstimmung  $\Delta_{12}$  erhöht. Hält man  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  konstant und reduziert die Laserintensität  $\Omega_{12}$ , dann erhöht sich  $P_{\text{em}}$  ab einer Rabifrequenz von  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$  etwas, wird  $\Omega_{12} < 2 \text{ MHz}$ , dann sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit.

Abbildung 6.1c zeigt die Güte  $\beta$  des Ramanprozesses. Die Güte verhält sich ähnlich wie  $P_{\text{em}}$ . Ab einer Rabifrequenz  $\Omega_{12} > 10 \text{ MHz}$  ist  $\beta$  für ein festes Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  unabhängig von der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$ . Bei konstantem  $\Omega_{12}$  steigt die Güte, wenn die Verstimmung vergrößert wird. Reduziert man bei konstantem  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  die Rabifrequenz  $\Omega_{12}$ , bleibt  $\beta$  bis zu einer Intensität  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$  konstant. Bei weiterer Reduktion der Leistung erkennt man für  $\Omega_{12}/\Delta_{12} > 0.05$  einen Anstieg der Güte, wenn man  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  konstant hält. Ist das Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.05$ , sinkt  $\beta$  für kleinere Intensitäten  $\Omega_{12} < 10 \text{ MHz}$ .

Für große Rabifrequenzen ( $\Omega_{12} > 10 \text{ MHz}$ ) hängen die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  nur vom Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  ab. Ist die Rabifrequenz größer als die spontane Emissionsrate  $\Omega_{12} > \Gamma_{\text{Sp}}$ , ist die zeitliche Entwicklung des Systems bei konstantem  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  für alle  $\Omega_{12}$  gleich. Für die weitere Analyse bedeutet dies, dass man sich eine genügend große Rabifrequenz wählen muss und dann durch Ändern der Verstimmung alle Werte für die gesuchten Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  erhält. In der Abbildung 6.2 wurden diese Größen für verschiedene  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  bei konstanter Rabifrequenz  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$  aufgetragen. Dies entspricht einem Schnitt durch das Konturdiagramm (Abbildung 6.1) entlang der strichlierten Linie. In der Abbildung 6.2 wurde neben den Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  auch die maximale Besetzung von  $P_{3/2}$  dargestellt.  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  (Abbildung 6.2a und c) sind für kleine Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.01$  konstant. Ab einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.04$  sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  für kleiner werdende Verstimmungen. Ist die Verstimmung in der Größenordnung der Rabifrequenz  $\Delta_{12} = \Omega_{12}$ , dann beträgt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}} = 22 \%$ .  $\beta$  sinkt ab einem Verhältnis von  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.01$ , und die Güte liegt bei  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 1$  bei  $\beta = 2.2 \%$ . Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  (Abbildung 6.2b) beträgt bei einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.001$   $t_{\text{em}} = 2.5 \times 10^4 \mu\text{s}$ . Verkleinert man die Verstimmung  $\Delta_{12}$ , sinkt  $t_{\text{em}}$  exponentiell. Bei

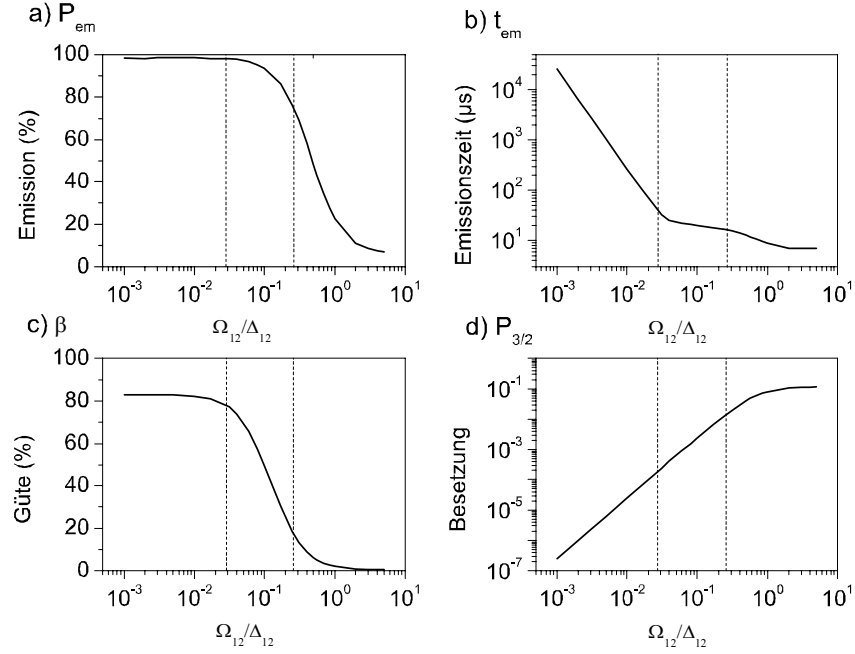


Abbildung 6.2: Photonenemission  $P_{em}$ , Emissionszeit  $t_{em}$ , Güte  $\beta$  und Besetzung des  $P_{3/2}$ -Niveaus als Funktion von  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Die Beschreibung der Kurven erfolgt im Text.

einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.04$  flacht die Kurve etwas ab. Bei  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 2$  erreicht die Emissionszeit ihren kleinsten Wert ( $t_{em} = 7 \mu s$ ). Weiteres Verkleinern der Verstimmung führt zu keiner weiteren Verkürzung des Emissionsprozesses. Die maximale Besetzung von  $P_{3/2}$  ist in Abbildung 6.2d gezeichnet. Die Besetzung liegt bei  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.001$  bei  $2.5 \times 10^{-7}$ . Die Besetzung von  $P_{3/2}$  steigt exponentiell für größere  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Bei einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 1$  liegt die maximale Besetzung bei 10 %.

Bei einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.26$  ist die effektive Rabi-Frequenz (Gleichung 5.35) gleich der effektiven Spontanemission (Gleichung 5.36)  $\Omega_{eff} = \Gamma_{eff}$  (rechte strichlierte Linien in den Grafiken 6.2 a-d). Für kleinere Verstimmungen  $\Delta_{12}$  überwiegt die spontan Emission  $\Gamma_{eff} > \Omega_{eff}$ . In diesem Bereich wird das Niveau  $P_{3/2}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit besetzt. Dies führt zu einer Anhäufung von spontan emittierten Photonen und damit zu einer Verschlechterung der Güte  $\beta$ . Die effektive Rabi-Frequenz ist größer als die Resonator-Zerfallsrate ( $\Omega_{eff} > 0.39 \text{ MHz} > \kappa = 0.04 \text{ MHz}$ ). Die Emissionszeit  $t_{em}$  ist nur von der Zerfallsrate  $\kappa$  des Resonators abhängig (Abbildung 6.2b). Vergrößert man  $\Delta_{12}$ , dann wird  $\Gamma_{eff} < \Omega_{eff}$  (in den Grafiken 6.2a-d der Bereich links von der rechten strichlierten Linien). Im effektiven Zwei-Niveau-System kann in diesem Bereich ein fast kompletter Besetzungstransfer zwischen den beiden Niveaus  $|S_{1/2}, m_j = -1/2|0\rangle$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  erfolgen. Bei  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.028$  ist  $\Gamma_{eff} \approx 0.1 \times \Omega_{12}$  (linke strichlierte Linie in den Grafiken 6.2 a-d). In der Abbildung 6.2a erkennt man, dass  $P_{em}$  ab einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.028$  einen konstanten Wert annimmt ( $P_{em} = 98.5\%$ ). Die Güte  $\beta$  erreicht bei einem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.01$  einen Wert von  $\beta = 82.29\%$ , und bleibt konstant, wenn die Verstimmung

weiter vergrößert wird. Durch das Vergrößern der Verstimmung werden  $\Omega_{\text{eff}}$  und  $\Gamma_{\text{eff}}$  kleiner. Bei einem Verhältnis von  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.028$  ist die effektive Rabifrequenz gleich der Resonator-Zerfallskonstanten  $\Omega_{12} = \kappa$ . Vergrößert man die Verstimmung weiter, dann wird  $\Omega_{12} < \kappa$ . Die Abbildung 6.2b zeigt das starke Ansteigen der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$ , wenn  $\Omega_{12} < \kappa$  wird (linker Bereich der Grafik). In diesem Bereich wird das Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$  langsamer besetzt, als das Photon aus dem Resonator emittiert werden kann.

Die Kooperativität für die gewählten Parameter ist  $C \approx 2.43$ . Daraus ergibt sich ein Purcellfaktor von

$$\bar{F} \approx 5.86. \quad (6.1)$$

Der Anteil der Photonen, die in den Resonator gestreut werden, kann mit der Formel

$$\beta = \frac{2C}{2C + 1} = 0.829 \quad (6.2)$$

berechnet werden. Dieses Ergebnis stimmt mit dem maximalen Wert ( $\beta_{\text{max}} = 82.3\%$ ) des Simulationsprogrammes recht gut überein. Im Experiment muss man einen Kompromiss zwischen der Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  und der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  finden. Im Bereich zwischen den beiden Linien in den Grafiken 6.2 a-d ist die Emissionszeit relativ gering ( $25 \mu\text{s} > t_{\text{em}} > 15 \mu\text{s}$ ). Die Emissionswahrscheinlichkeit beträgt in diesem Bereich  $98\% > P_{\text{em}} > 76\%$ , und die Güte liegt bei  $77\% > \beta > 18\%$ .

Es wurden auch die Abhängigkeiten der Größen von einer zeitlich variablen Rabifrequenz  $\Omega_{12}$  untersucht. Lässt man die Laserintensität von Null starten und vergrößert  $\Omega_{12}$  mit der Zeit, dann wird die Emissionszeit langsamer,  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  lassen sich aber nicht verbessern. Aus diesem Grund wurde der Anstieg von  $\Omega_{12}$  kleiner als  $0.1 \mu\text{s}$  gewählt.

### 6.1.2 Idealer adiabatischer Prozess

Im adiabatischen Prozess müssen die Verstimmungen des Lasers  $\Delta_{12}$  und des Resonators  $\Delta_{23}$  gleich groß sein,  $\Delta_{12} = \Delta_{23}$ . Die Aufspaltung der Energieeigenwerte für das gekoppelte Drei-Niveau-System ist am Größten für  $\Delta_{12} = \Delta_{23} = 0$  (Gleichung 3.8). Aus diesem Grund werden vorerst die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  für resonante Kopplung des Laserlichtes und des Resonators an die jeweiligen Übergänge berechnet.

Die Abbildung 6.3 zeigt die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  und die Projektion des System-Zustandes auf den Dunkelzustand  $a^0$  (Abschnitt 5.1.3). Diese Größen wurden als Funktion der Laserintensität  $\Omega_{12}$  und der Anstiegsdauer  $\tau$  berechnet. Der Parameter  $\xi = \log(\Omega_{12}/\tau^2)$  wurde empirisch gefunden. Für einen konstanten Parameter  $\xi$  ergeben sich über große Bereiche von  $\Omega_{12}$  und  $\tau$  gleiche Werte für die gesuchten Größen. Die Rabifrequenz  $\Omega_{12}$  variiert zwischen  $1 \text{ MHz}$  und  $10^5 \text{ MHz}$ , damit der gewählte Parameter zwischen  $15 < \xi < 17$  bei einer Anstiegsdauer  $3 \times 10^{-5} \text{ s} < \tau < 10^{-3}$  variiert. In der Abbildung 6.3a ist die Photonenemissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  aufgetragen. Die Linien verbinden Punkte mit gleicher Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ , die Beschriftung der Linien gibt  $P_{\text{em}}$  in Prozent an. Verlängert man die Anstiegsdauer  $\tau$  bei gleichbleibendem Parameter  $\xi$ , wandert man also parallel zur Abszissenachse von links nach rechts, verkleinert sich zunächst  $P_{\text{em}}$  (Änderung ist kleiner als  $1\%$ ). Ist die Anstiegsdauer groß genug ( $\tau > 10^{-4} \text{ s}$ ), ist  $P_{\text{em}}$  unabhängig von einer weiteren Erhöhung von  $\tau$ . Entlang der Ordinatenachse bleibt  $\tau$  konstant, und  $\xi$  kann durch Variation der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$  geändert werden. Reduziert man  $\Omega_{12}$  und damit  $\xi$ , wird die Emissionswahrscheinlichkeit größer.

Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  ist in Abbildung 6.3b aufgetragen. Rote Flächen sind Bereiche mit kleinem  $t_{\text{em}} < 20 \mu\text{s}$ , gelbe Bereiche indizieren lange Emissionszeiten  $t_{\text{em}}$  (diese befinden sich in der linken unteren Ecke). Vergrößert man  $\tau$  bei gleichbleibendem  $\xi$ , reduziert sich die Emissionszeit. Bewegt man sich entlang der Ordinatenachse von unten nach oben, verkürzt



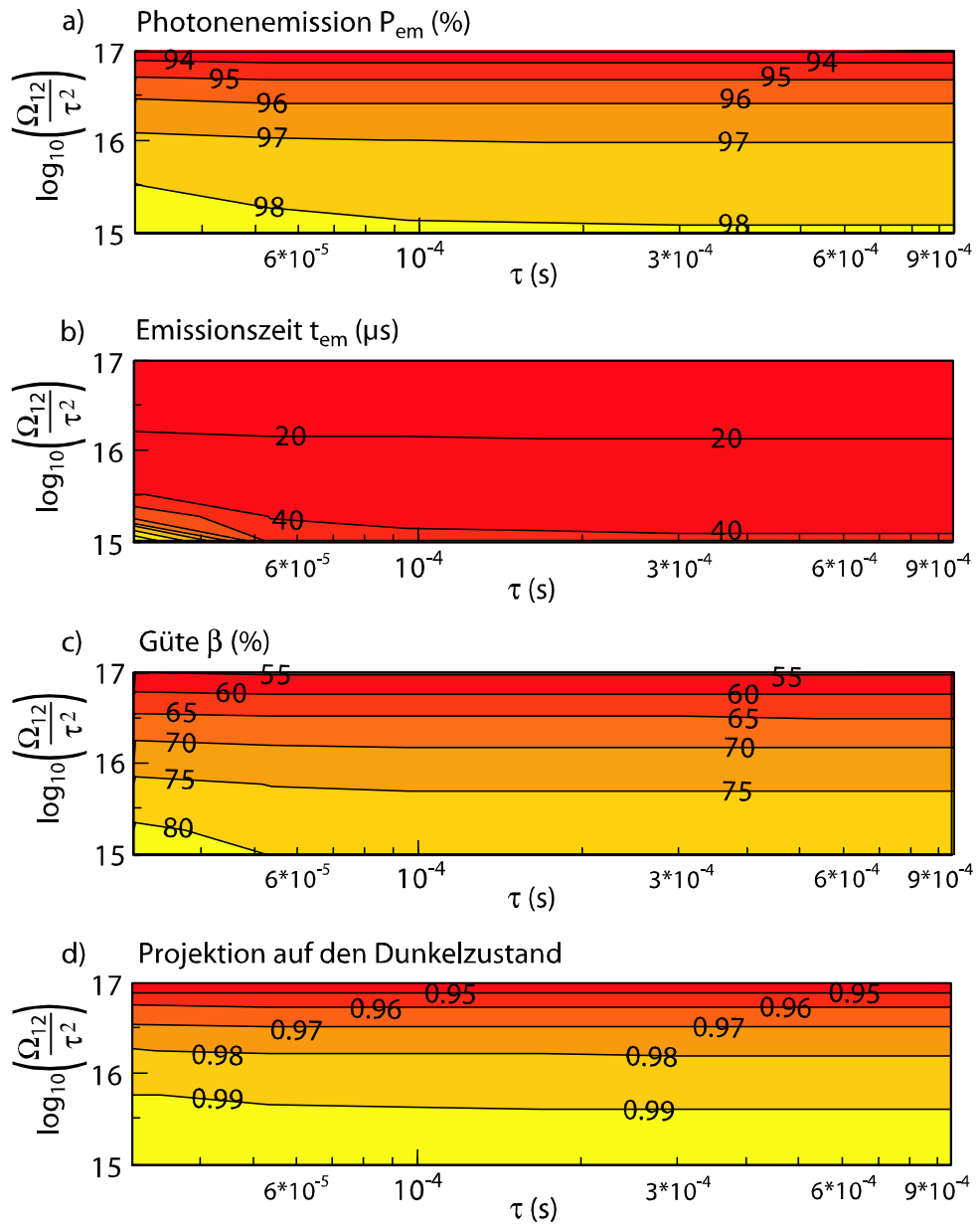


Abbildung 6.3: Abhängigkeit der gesuchten Größen (Photoemission, Emissionszeit, Güte und Abweichung vom Dunkelzustand) für verschiedene Anstiegszeiten und verschiedene  $\xi$ . Verwendet wurde das adiabatische Regime, das heißt, die Verstimmungen vom mittleren Niveau sind exakt gleich groß. In dem verwendeten Beispiel wurde die Verstimmung gleich Null gewählt.

sich die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$ . Abbildung 6.3c zeigt die Güte  $\beta$  für den adiabatischen Prozess. Die Güte  $\beta$  schwankt in dem ausgewählten Bereich zwischen 55 % und 80 %. Punkte mit gleichem  $\beta$  wurden durch Linien miteinander verbunden. Für nebeneinander liegende Kurven ändert sich die Güte um 5 %. Die Güte zeigt ein ähnliches Verhalten wie  $P_{\text{em}}$ . Vergrößert man die Anstiegsdauer  $\tau$  bei konstantem  $\xi$ , verschlechtert sich zunächst  $\beta$  etwas, bis die Güte ab einer Anstiegsdauer  $\tau > 10^{-4}$  s konstant bleibt. Hält man  $\tau$  fest, und vergrößert die Steigung  $\xi$ , dann sinkt die Güte.

In der Abbildung 6.3d ist die Projektion des System-Zustandes auf den Dunkelzustand  $a^0$  dargestellt. Diese Größe ist ein Maß für die Qualität des adiabatischen Prozesses, siehe Kapitel 5.3.1. Für kleine  $\tau$  und kleine  $\xi$  ist die Projektion am Größten. Vergrößert man  $\tau$  bei gleichbleibender Steigung  $\xi$ , dann wird die Projektion schlechter. Ab einer Anstiegsdauer  $\tau > 10^{-4}$  s bleibt die Projektion konstant. Vergrößert man  $\xi$  und bleibt auf einer Linie parallel zur Ordinatenachse, verringert sich die Projektion auf den Dunkelzustand  $a^0$ , das heißt, die Besetzung der atomaren Zustände folgen dem Dunkelzustand nicht mehr so gut.

Aus den Abbildungen 6.3 a-d erkennt man, dass für lange Anstiegsdauern  $\tau > 10^{-4}$  s, das Ergebnis nur von dem Parameter  $\xi$  abhängt. Abbildung 6.4 zeigt  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  und  $B_{\text{adiab}}$ , die Abweichung des atomaren Zustandes vom Dunkelzustand  $a^0$ . Diese Größen wurden bei einer Rabi-Frequenz von  $\Omega_{12} = 10$  MHz für verschiedene  $\xi$  berechnet. Die Anstiegsdauer  $\tau$  variiert zwischen  $\tau = 10^{-1}$  s für  $\xi = 9$  und  $\tau = 3 \times 10^{-8}$  s für  $\xi = 22$ . Abbildung 6.4a zeigt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ . Für kleine  $\xi < 15$  (Bereich links von der ersten strichlierten Linie) ist die Emission konstant  $P_{\text{em}} \approx 98$  %. Vergrößert man den Parameter  $\xi$ ,  $15 < \xi < 21$ , verkleinert sich  $P_{\text{em}}$ . Wird der Parameter  $\xi > 21$ , erreicht die Emissionswahrscheinlichkeit ein zweites Plateau  $P_{\text{em}} \approx 56$  %.

In der Abbildung 6.4b ist die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  aufgetragen. Für kleine  $\xi$  ist die Emissionszeit groß  $t_{\text{em}} \approx 10^4 \mu\text{s}$ . Mit steigendem  $\xi$  fällt die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  exponentiell ab und erreicht für ein  $\xi > 18$  einen konstanten Wert. Die Güte  $\beta$  (Abbildung 6.4c) verhält sich ähnlich wie  $P_{\text{em}}$ , die Kurve ist aber etwas nach links verschoben. Bis zu einem Parameter  $\xi = 14$  ist  $\beta > 80$  %. Für ein größeres  $\xi$  sinkt die Güte, bis  $\beta$  für  $\xi > 21$  wiederum einen konstanten Wert hat  $\beta \approx 8$  %. Die Abweichung vom Dunkelzustand  $B_{\text{adiab}}$  ist für kleine  $\xi$  am Kleinsten. In diesem Bereich folgt das Ion dem Dunkelzustand  $a^0$  relativ gut. Vergrößert man  $\xi$ , steigt  $B_{\text{adiab}}$  exponentiell an. Für ein  $\xi > 21$  nähert sich die Abweichung langsam 1 an. Bei einem Wert von eins ist der Dunkelzustand nicht mehr besetzt.

In Kapitel 5.3.1 wurde für die adiabatische Bedingung folgende Einschränkung gefunden (Gleichung 5.48):

$$\frac{\Omega}{\tau^2} < \frac{2}{\pi} g_{32}^2 \approx 2 * 10^{18}.$$

In den Grafiken 6.4 a-d wird dieser Bereich durch die rechte strichlierte Linie begrenzt. Für  $\xi < 18.3$  sollte die adiabatische Bedingung erfüllt sein. Es zeigt sich, dass für einen Parameter  $\xi = 18.3$  die Abweichung vom Dunkelzustand  $B_{\text{adiab}} = 30$  % beträgt. Die anderen Größen ergeben sich für dieses  $\xi$  zu:  $P_{\text{em}} = 77$  %,  $t_{\text{em}} = 11.8 \mu\text{s}$  und  $\beta = 20$  %. Verringert man  $\xi$ , wird die adiabatische Bedingung immer besser erfüllt. Bei einem  $\xi = 15$  ist die Abweichung vom Dunkelzustand nur mehr  $B_{\text{adiab}} = 0.5$  %. Bei diesem  $\xi$  ist die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}} = 98$  %, und die Güte liegt bei  $\beta = 78$  %. Die Emissionszeit steigt allerdings auf  $t_{\text{em}} = 44 \mu\text{s}$ . Verringert man  $\xi$  weiter, sodass auch die Güte einen konstanten Wert annimmt  $\beta = 82$  %, ist die Emissionszeit  $t_{\text{em}} > 100 \mu\text{s}$ . In der Gleichung 5.48 wurde angenommen, dass die maximale Übergangsrates (Gleichung 5.45) gleich der maximalen Aufspaltung der Eigenzustände ist. Man sieht, dass die Übergangsrates wesentlich kleiner sein muss als die Aufspaltung der Zustände. Die Kopplung des Resonators  $g_{32}$  ist in etwa gleich der Zerfallsrate für diesen Übergang. Daher zerfallen einige Elektronen spontan in den Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$ , ohne dass ein Photon in den Resonator emittiert wird. Dadurch

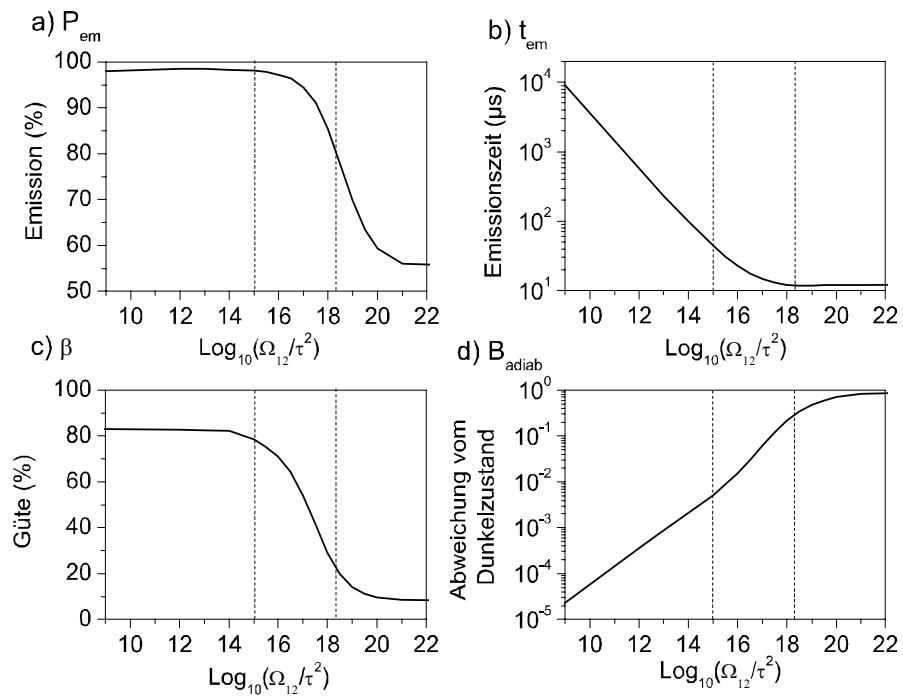


Abbildung 6.4: Photonenemission  $P_{em}$ , Emissionszeit  $t_{em}$ , Güte  $\beta$  und Abweichung vom Dunkelzustand für verschiedene  $\xi$ . Die gezeichneten Kurven gelten für den adiabatischen Prozess mit einer Kopplungsstärke des Resonators von  $2\pi \times 1.5$  MHz. Die Resonatorzerfallsrate ist gleich  $2\pi \times 40$  kHz. Die Diskussion der Kurve kann dem Text entnommen werden.

kann die Abweichung der Photonenemission  $P_{\text{em}} < 100\%$  erklärt werden. Die Kopplung des Resonators ist wesentlich kleiner als die Zerfallskonstante von  $P_{3/2}$  ( $g_{32} \ll \Gamma_{\text{Sp}}$ ). Aus diesem Grund ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ion in den Zustand  $S_{1/2}$  zerfällt, relativ hoch, und die Güte erreicht nur einen Wert von  $\beta \approx 82\%$ .

### 6.1.3 Realer Ramanprozess

In den beiden vorangegangenen Abschnitten wurden  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  für optimale experimentelle Bedingungen berechnet. Es wurden die atomaren Zerfallskanäle und der Zerfall des Resonators in die Rechnung mit einbezogen. Bei der experimentellen Durchführung treten aber noch andere Effekte auf, die zu einer Reduktion der Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  bzw. zu einer Verlängerung der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  führen können. In den nächsten beiden Abschnitten werden die Auswirkungen einiger experimenteller Unsicherheiten auf die gesuchten Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  diskutiert.

Ein Laser bei  $\lambda = 786$  nm wird mit dem Pound-Drever-Hall-Verfahren auf eine Frequenzschwankung kleiner als  $\delta_{393} < 10$  kHz stabilisiert [60]. Dabei erfolgt die Stabilisierung durch einen Hochfinesse Resonator mit einem sehr kleinen thermischen Ausdehnungskoeffizienten ( $\delta x \approx 10^{-5}$  m/K) [60]. Durch Frequenzverdopplung erhält man den Laser bei  $\lambda = 393$  nm, für die Kopplung zwischen  $S_{1/2}$  und  $P_{3/2}$ . Die Resonatorspiegel werden ebenfalls mit der Pound-Drever-Hall Methode stabilisiert. Ein Transferlaser bei  $\lambda = 780$  nm dient als Referenzsignal für den Abstand der Resonatorspiegel. Für das Erhalten des Fehlersignals wird der Laser  $\lambda = 780$  nm durch denselben Hochfinesse-Resonator wie der Laser  $\lambda = 786$  nm gestrahlt. Die dabei erreichte Stabilisierung des Resonators ist in der Größenordnung von  $\delta_{\text{inh}} = 5$  kHz [24]. Die Stabilisierung der beiden Laser durch denselben Hochfinesse-Resonator bewirkt, dass sich die beiden Laser in dieselbe Richtung verstimmen, wenn sich die Länge des Resonators durch äußere Einflüsse verändert.

Die Erfüllung der Resonanzbedingung für den jeweiligen Prozess kann ebenfalls einen Einfluss auf  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  haben. Für den Ramanprozess muss die Verstimmung des Resonators gleich  $\Delta_{23} = \Delta_{\text{Raman}}$  (Gleichung 5.34) sein. Die Abweichung von dieser Verstimmung wird durch den Parameter  $\delta_{\text{Ram}} = \Delta_{23} - \Delta_{\text{Raman}}$  im Simulationsprogramm berücksichtigt.

Abbildung 6.5 zeigt die Abhängigkeit der Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  von der Linienbreite  $\delta_{393}$  des Lasers  $\lambda = 393$  nm für verschiedene Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Das Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  wird durch Variieren der Verstimmung  $\Delta_{12}$  bei konstantem  $\Omega_{12} = 10$  MHz verändert. Die Linienbreite für den Laser  $\delta_{393}$  reicht von 0 Hz bis 10 MHz. Die inhomogene Verbreiterung des Resonators beträgt  $\delta_{\text{inh}} = 0$  Hz. In der Abbildung 6.5a ist die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  aufgetragen. Für ein konstantes Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  bleibt  $P_{\text{em}}$  bis zu einer Linienbreite  $\delta_{393} \leq 1$  kHz gleich. Vergrößert man die Linienbreite weiter, dann sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ . Bei kleiner Linienbreite  $\delta_{393}$  zeigt sich für  $P_{\text{em}}$  dieselbe Abhängigkeit von dem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  wie in Abbildung 6.1a für große Rabi-Frequenzen  $\Omega_{12} \geq 10$  MHz.  $P_{\text{em}}$  sinkt bei einer kleineren Linienbreite für ein kleineres Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . In der Abbildung 6.5b ist die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  dargestellt. Im dunkelroten Bereich ist  $t_{\text{em}} < 50 \mu\text{s}$ , im gelben Bereich beträgt  $t_{\text{em}} > 500 \mu\text{s}$ . Die Linien verbinden Punkte gleicher Emissionszeit, und die Änderung der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  benachbarter Linien beträgt  $50 \mu\text{s}$ . Für kleine Linienbreiten ist  $t_{\text{em}}$  nur von dem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  abhängig. Wird die Linienbreite größer, d.h.  $\delta_{393} > 1$  kHz, steigt die Emissionszeit wenn  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  konstant bleibt. Die Abhängigkeit der Emissionszeit von diesem Verhältnis ist für kleine Linienbreiten gleich wie in Abbildung 6.1a für große Rabi-Frequenzen  $\Omega_{12} \geq 10$  MHz. Für große Linienbreiten  $\delta_{393}$  und kleine  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  ist die Emissionszeit am größten. Die Güte  $\beta$  wird in Abbildung 6.5c dargestellt. Die Güte entspricht für kleine Linienbreiten dem Ergebnis aus Kapitel 6.1.1 für große Rabi-Frequenzen. Für kleine Werte von  $\Omega_{12}/\Delta_{12} \approx 0.02$  wird die Güte bis zu einer Linienbreite von 100 Hz konstant. Für größere Linienbreiten sinkt die Güte von

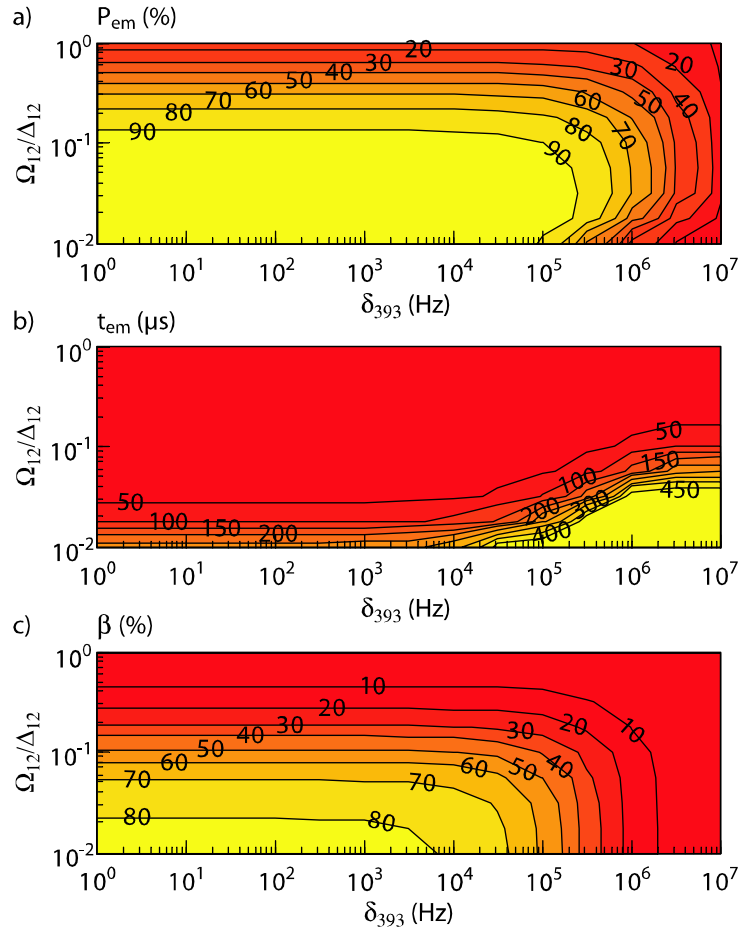


Abbildung 6.5: Realer Ramanprozess:  $P_{em}$ ,  $t_{em}$  und  $\beta$  als Funktion von  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  und der Linienbreite des Lasers  $\delta_{393}$ . Das Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  ist proportional zur effektiven Rabi-frequenz  $\Omega_{eff}$ .  $P_{em}$  und  $\beta$  wurden in % angegeben, die Emissionszeit  $t_{em}$  in  $\mu s$ . Rote Bereiche indizieren kleine Werte, gelbe Bereiche große Werte. Eine detaillierte Beschreibung der Grafiken erfolgt im Text.

$\beta > 80\%$  auf  $\beta < 10\%$ . Für kleinere Verstimmungen ist die Güte bis zu etwas größeren Linienbreiten konstant, zum Beispiel, ist bei einem Verhältnis von  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.4$   $\beta \approx 10\%$  bis zu einer Linienbreite  $\delta_{393} < 10\text{ kHz}$ , und die Güte sinkt erst für größere Linienbreiten auf unter  $10\%$ .

Dieselbe Abhängigkeit der Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  zeigt sich auch für die zusätzliche Linienbreite  $\delta_{\text{inh}}$  des stabilisierten Resonators. In einem weiteren Schritt wurden beide Linienbreiten bei einem konstantes Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  variiert. Die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  zeigen dabei für die gesamte Linienbreite  $\delta_{\text{ges}} = \sqrt{\delta_{393}^2 + \delta_{\text{inh}}^2}$  dasselbe Verhalten wie in Abbildung 6.5, wenn man die Linienbreite  $\delta_{393}$  durch die Linienbreite  $\delta_{\text{ges}}$  ersetzt.

In der Abbildung 6.6 sind die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  für verschiedene Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  und verschiedene Abweichungen aus der Ramanresonanz  $\delta_{\text{Ram}} = \Delta_{23} - \Delta_{\text{Raman}}$  aufgetragen. Die Rabifrequenz ist konstant bei  $\Omega_{12} = 10\text{ MHz}$ , und eine Änderung des Verhältnisses  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  erfolgt durch Variieren der Verstimmung  $\Delta_{12}$ . Für das aufgetragene Verhältnis  $0.01 < \Omega_{12}/\Delta_{12} < 1$  liegt die Verstimmung zwischen  $10\text{ MHz} < \Delta_{12} < 1\text{ GHz}$ ,  $\delta_{\text{Ram}}$  wurde von  $0\text{ Hz}$  bis  $10\text{ MHz}$  verändert. Die Linienbreiten sind  $\delta_{383} = \delta_{\text{inh}} = 0$ . Die Abbildung 6.6a zeigt die Emissionswahrscheinlichkeit für ein Photon aus dem Resonator  $P_{\text{em}}$ . Im gelben Bereich erreicht  $P_{\text{em}} > 90\%$ , im roten Bereich ist  $P_{\text{em}} < 10\%$ . Für kleine  $\delta_{\text{Ram}} < 10\text{ kHz}$  ist die Abhängigkeit von  $P_{\text{em}}$  von dem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  gleich wie in Abbildung 6.1a für  $\Omega_{12} = 10\text{ MHz}$  (strichlierte Linie). Für größere Abweichungen  $\delta_{\text{Ram}}$  sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit. Dabei sinkt  $P_{\text{em}}$  bei kleinen Verhältnissen  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  bei kleineren Abweichungen von der Resonanz  $\delta_{\text{Ram}}$  als für große Verhältnisse.

Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  ist in Abbildung 6.6b dargestellt:  $t_{\text{em}}$  reicht von  $t_{\text{em}} < 50\ \mu\text{s}$  (roter Bereich) bis zu  $t_{\text{em}} > 500\ \mu\text{s}$ . Die Emissionszeit ändert sich für benachbarte Linien um  $50\ \mu\text{s}$ . Für kleine Abweichungen zeigt sich wiederum dieselbe Abhängigkeit von der Verstimmung wie im idealen Ramanprozess (Abbildung 6.1b). Für Abweichungen  $\delta_{\text{Ram}} > 10\text{ kHz}$  steigt  $t_{\text{em}}$ , wenn  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  konstant gehalten wird, bis die Emissionszeit bei einem  $\delta_{\text{Ram}} \approx 2\text{ MHz}$  ein lokales Minimum hat. Bei dieser Abweichung ist die Raman-Resonanzbedingung für den Übergang  $\Delta m = +1$  zwischen dem Resonator und dem Laserstrahl erfüllt. Der Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -1/2|1\rangle$  wird deshalb stark besetzt und zerfällt in den Zustand  $|D_{5/2}, m_j = -1/2|0\rangle$ . Die Besetzung des Zustandes erfolgt dabei mit der effektiven Rabifrequenz  $\Omega'_{\text{eff}} = g_{52}(\Omega_{12}/\Delta_{12}) = \Omega_{\text{eff}}/\sqrt{10}$ . Wenn die Raman-Resonanzbedingung erfüllt ist, erfolgt sie in einer etwas längeren Zeit wie die Besetzung von  $|D_{5/2}, m_j = -5/2|1\rangle$ . Der Endzustand  $|D_{5/2}|0\rangle$  wird für alle resonanten Fälle schneller besetzt, weshalb sich auch die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  für den Übergang  $\Delta m = -1$  verkürzt. Abbildung 6.6c zeigt die Güte  $\beta$  als Funktion von  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  und  $\delta_{\text{Ram}}$ . Bei festem Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  ist die Güte für kleine  $\delta_{\text{Ram}}$  konstant. Ab einer Abweichung  $\delta_{\text{Ram}} > 1\text{ kHz}$  sinkt die Güte für kleine Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12} \approx 0.02$ . Bei größeren Verhältnissen sinkt die Güte bei etwas größeren Abweichungen  $\delta_{\text{Ram}}$ , bei  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.4$  sinkt die Güte für  $\delta_{\text{Ram}} > 10\text{ kHz}$ .

Die effektive Rabifrequenz ist  $\Omega_{\text{eff}} = g_{32} \times (\Omega_{12}/\Delta_{12})$ . Mit einer Kopplungsstärke von  $g_{32} = 1.5\text{ MHz}$  liegt die effektive Rabifrequenz zwischen  $0.015\text{ MHz} < \Omega_{\text{eff}} < 1.5\text{ MHz}$  für ein Verhältnis von  $0.01 < \Omega_{12}/\Delta_{12} < 1$ . Vergleicht man in den Abbildungen 6.5 a und c sowie in Abbildung 6.6 a und c die effektive Rabifrequenz mit  $\delta_{\text{ges}}$  und  $\delta_{\text{Ram}}$ , sieht man, dass  $\delta_{\text{ges}}, \delta_{\text{Ram}} < \Omega_{\text{eff}}$  gelten muss, damit  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  konstant bleiben. Die Emissionszeit ist für den Bereich  $\delta_{\text{ges}}, \delta_{\text{Ram}} < \Omega_{\text{eff}}$  am kleinsten (Abbildungen 6.5b und 6.6b).

### 6.1.4 Realer adiabatischer Prozess

Im Abschnitt 6.1.2 wurden die Verstimmungen  $\Delta_{12} = \Delta_{23} = 0$  gewählt. In diesem Abschnitt werden die Verstimmungen variiert, und die Auswirkung auf die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  untersucht. In einem ersten Schritt wird die Resonanzbedingung für den adiabatischen

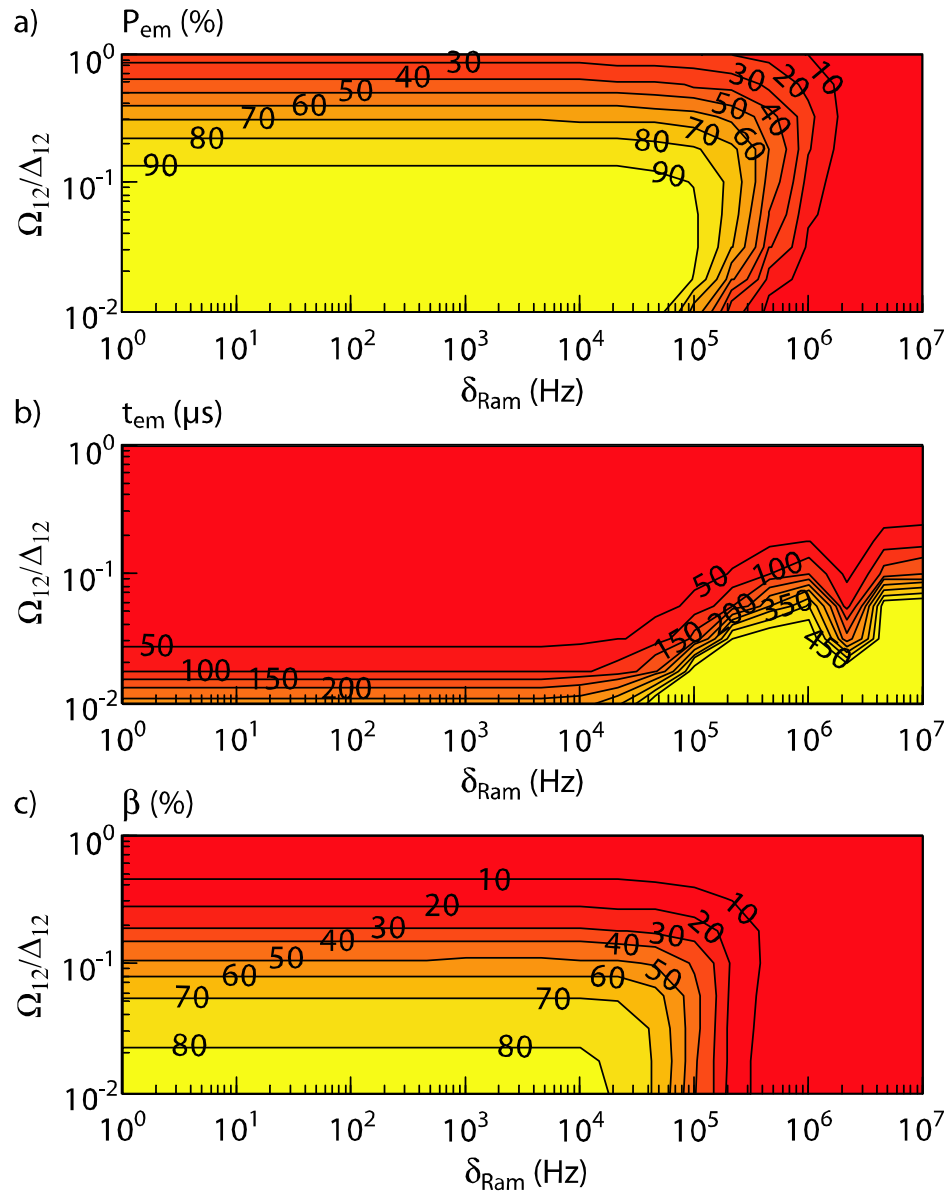


Abbildung 6.6: Realer Ramanprozess: Aufgetragen sind  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  für verschiedene  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  sowie Abweichungen aus der Ramanresonanz  $\delta_{\text{Ram}} = \Delta_{23} - \Delta_{\text{Raman}}$ . Die Photonenemissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  (Grafik a) ist im gelben Bereich  $P_{\text{em}} > 90\%$  und im roten Bereich  $P_{\text{em}} < 10\%$ . Die Emissionszeit (Grafik b) reicht von  $t_{\text{em}} < 50 \mu\text{s}$  (roter Bereich) bis zu  $t_{\text{em}} > 500 \mu\text{s}$  (gelber Bereich). Die Güte  $\beta$  liegt zwischen  $0\% < \beta < 90\%$ , wobei im gelben Bereich die Güte über  $80\%$  liegt und im roten Bereich unter  $10\%$  beträgt.

Prozess  $0 = \Delta_{23} - \Delta_{12}$  erfüllt und die beiden Verstimmungen gleich groß gewählt. Im zweiten Teil wird der Einfluss der Resonanzbedingung  $\delta_{\text{ad}} = \Delta_{23} - \Delta_{12}$  auf die gesuchten Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  untersucht. Dabei wird die Verstimmung  $\Delta_{12} = 0$  gesetzt und die Verstimmung des Resonators  $\Delta_{23}$  variiert.

In der Abbildung 6.7 sind die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  sowie die Projektion auf den Dunkelzustand als Funktion des Parameters  $\xi$  und der Verstimmung  $\Delta = \Delta_{12} = \Delta_{23}$  des Lasers und des Resonators dargestellt. Dabei wird die Resonanzbedingung für den adiabatischen Prozess erfüllt  $\delta_{\text{ad}} = 0$  Hz. Die gewählten Werte für diese Abbildung sind:  $\tau = 100 \mu\text{s}$ ,  $15 < \xi < 17 \Rightarrow 10 \text{ MHz} < \Omega_{12} < 1 \text{ GHz}$ . Die Verstimmung  $\Delta$  liegt zwischen  $10 \text{ kHz} < \Delta < 1 \text{ GHz}$ . Bei kleineren Verstimmungen  $\Delta < 10 \text{ kHz}$  ist die Abhängigkeit der gesuchten Größen von dem Parameter  $\xi$  gleich wie im idealen adiabatischen Prozess (Abbildung 6.3). Die Abbildung 6.7 zeigt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ .  $P_{\text{em}}$  ist im gelben Bereich größer als 90 %. Zwischen benachbarten Linien ändert sich  $P_{\text{em}}$  um 10 %. Vergrößert man die Verstimmung  $\Delta$  bei konstantem  $\xi$ , dann ändert sich die Emissionswahrscheinlichkeit bis zu einer Verstimmung von  $\Delta < 10 \text{ MHz}$  nicht. Bei großem  $\xi \approx 17$  sinkt  $P_{\text{em}}$  bei kleineren Verstimmungen ( $\Delta \approx 10 \text{ MHz}$ ), als bei  $\xi \approx 15$  ( $\Delta \approx 500 \text{ MHz}$ ). Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  ist in Abbildung 6.7b gezeichnet. Sie ändert sich für benachbarte Linien um  $20 \mu\text{s}$ . Für kleine Verstimmungen  $\Delta < 10 \text{ MHz}$  zeigt sich die gleiche Abhängigkeit der Emissionszeit von  $\xi$  wie in Abbildung 6.3b. In diesem Bereich ist die Emissionszeit unabhängig von der Verstimmung. Für größere Verstimmungen sinkt  $t_{\text{em}}$ , wenn man  $\xi$  konstant hält. Bei einer Verstimmung von  $\Delta = 1 \text{ GHz}$  und  $\xi = 15$  ist die Emissionszeit  $t_{\text{em}} > 200 \mu\text{s}$ . In der Abbildung 6.7c ist die Güte aufgetragen. Im gelben Bereich liegt die Güte  $\beta > 70 \%$ , im roten Bereich sinkt sie unter 10 %. Die Güte ist für Verstimmungen  $\Delta < 1 \text{ MHz}$  unabhängig von dieser. Bei großen  $\xi$  sinkt die Güte bei einer kleineren Verstimmung als für kleine  $\xi$ . Die Projektion auf den Dunkelzustand  $a^0$  wird in Abbildung 6.7d dargestellt. Die Projektion ist für Verstimmungen  $\Delta < 10 \text{ MHz}$  für alle dargestellten  $\xi$  größer als 0.9. Bei einer Verstimmung von  $\Delta = 10 \text{ MHz}$  sinkt die Projektion für  $\xi = 17$  unter 90 %. Für kleinere  $\xi$  vermindert sich die Projektion auf den Dunkelzustand erst bei etwas höheren Verstimmungen (für  $\xi = 15$  sinkt die Projektion für  $\Delta = 50 \text{ MHz}$  unter 90 %).

Das Ergebnis der Abbildung 6.7 wurde mit den Energieeigenwerten aus Gleichung 3.8 verglichen. Ist die konstante Resonatorkopplung größer als die Verstimmung, dann sind keine der drei Eigenwerte entartet. Wenn die Verstimmung  $\Delta$  größer als  $g_{32} = \Omega_{32}/2$  ist, sind für eine bestimmte Rabi-Frequenz  $\Omega_{12}$  zwei Eigenwerte entartet, wodurch auch einer der Zustände  $a^\pm$  besetzt werden kann [37]. Die Verstimmung muss im Experiment kleiner als die Resonatorkopplung sein  $|\Delta| < g_{32}$ .

Abbildung 6.8 zeigt die gesuchten Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  sowie die Projektion auf den Dunkelzustand  $a^0$  als Funktion des Parameters  $\xi$  und der Abweichung aus der Resonanzbedingung  $\delta_{\text{ad}}$ . Entlang der Abszisse ist die Abweichung  $\delta_{\text{ad}}$  aufgetragen, die Ordinatenachse enthält den Parameter  $\xi$ . In der Abbildung 6.8a ist die Photonenemission  $P_{\text{em}}$  dargestellt. Im Bereich der gelben Fläche ist  $P_{\text{em}} > 90 \%$ . Ab einer Verstimmung von  $\delta_{\text{ad}} = 100 \text{ kHz}$  fällt die Emissionswahrscheinlichkeit unter 90 %. Die Reduktion von  $P_{\text{em}}$  ist dabei fast unabhängig von der Steigung  $\xi$  (Kurven gleicher Emissionswahrscheinlichkeiten liegen fast parallel zur Ordinatenachse). Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  wird in Abbildung 6.8b dargestellt. Punkte gleicher Emissionszeiten sind durch Kurven miteinander verbunden. Der Abstand zwischen zwei Kurven entspricht  $10 \mu\text{s}$ . Für kleine Abweichungen  $\delta_{\text{ad}} < 100 \text{ kHz}$  ist  $t_{\text{em}}$  unabhängig von dieser. Wandert man parallel zur Abszisse zu einer größeren Abweichung  $\delta_{\text{ad}}$ , steigt die Emissionszeit ab  $\delta_{\text{ad}} \geq 100 \text{ kHz}$  leicht an. Vergrößert man die Steigung  $\xi$  bei gleicher Abweichung, verringert sich die Emissionszeit (siehe auch Abbildung 6.3b). Abbildung 6.8c zeigt die Güte  $\beta$ . Die Güte ist in Prozent angegeben. Im gelben Bereich ist  $\beta > 80 \%$ . Ist die Abweichung  $\delta_{\text{ad}} < 10^4 \text{ Hz}$ , dann verringert sich die Güte für größere Steigungen  $\xi$ .



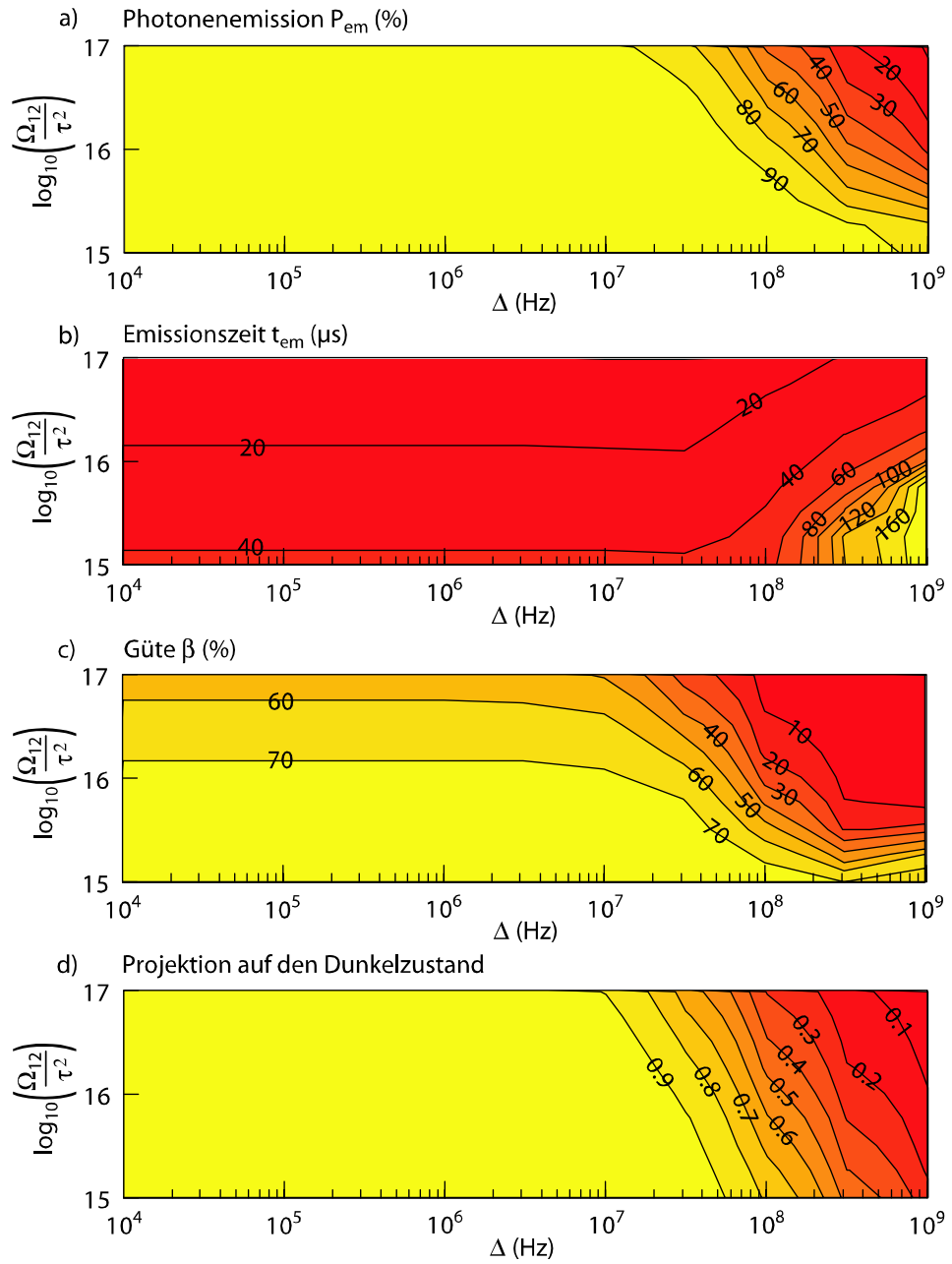


Abbildung 6.7: Realer adiabatischer Prozess: Abhängigkeit der Größen  $P_{em}$ ,  $t_{em}$  und  $\beta$  sowie die Projektion auf den Dunkelzustand von  $\xi$  und der Verstimmung  $\Delta$ . Die Verstimmung des Lasers und des Resonators sind gleich  $\Delta = \Delta_{12} = \Delta_{23}$ . Die Anstiegsdauer wurde konstant gehalten  $\tau = 10^{-4}$  s.

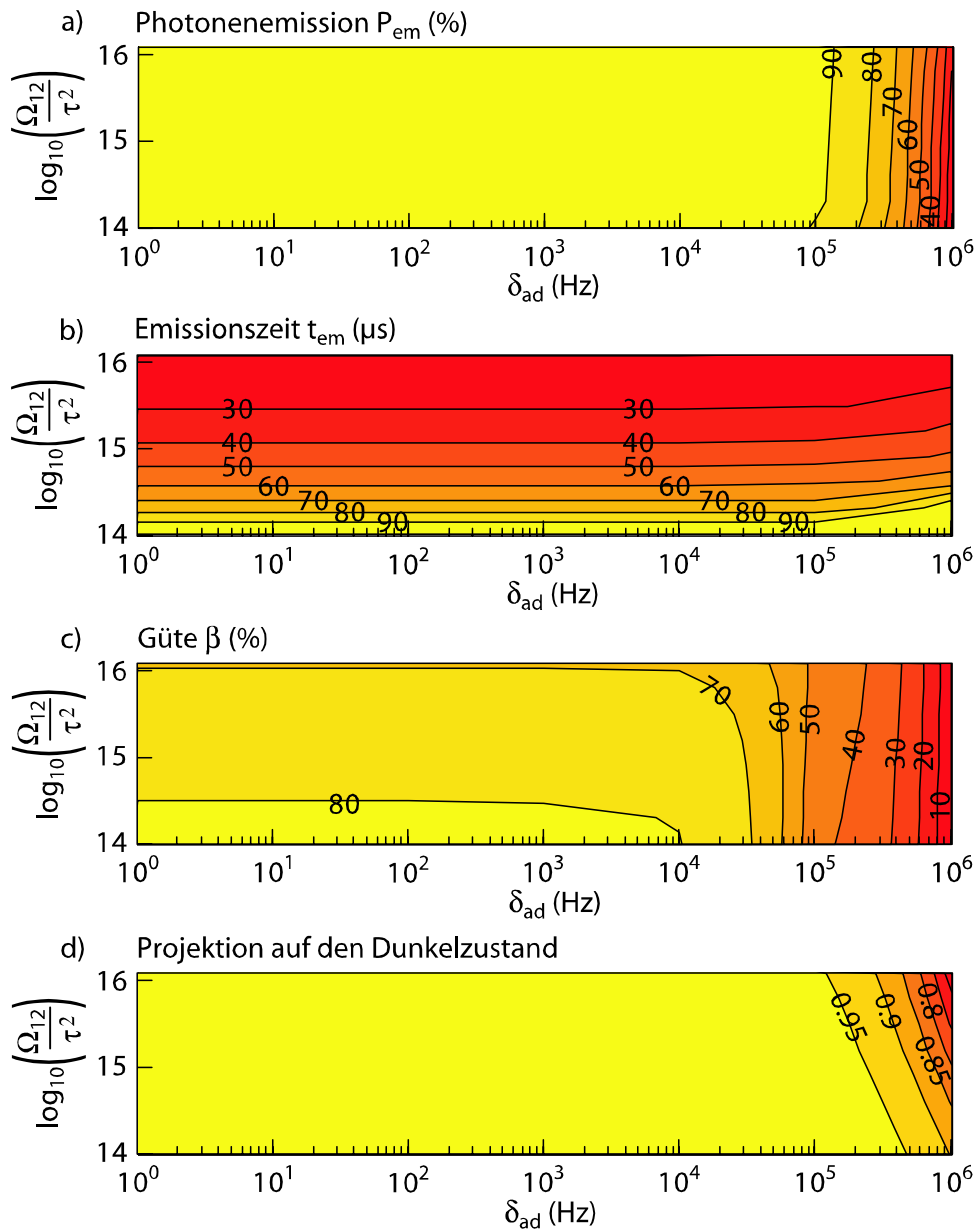


Abbildung 6.8: Realer adiabatischer Prozess: Photonenemission  $P_{em}$ , Emissionszeit  $t_{em}$ , Güte  $\beta$  und Abweichung vom Dunkelzustand als Funktion von  $\xi$  und der Verstimmung aus der Zwei-Photonenresonanz  $\delta_{ad} = \Delta_{23} - \Delta_{12}$ . Rote Bereiche stehen für kleine Werte, gelbe für große Werte.

Vergrößert man die Abweichung  $\delta_{\text{ad}} > 50 \text{ kHz}$ , verschwindet die Abhängigkeit der Güte von dem Parameter  $\xi$ . Durch weiteres Vergrößern der Abweichung  $\delta_{\text{ad}}$  sinkt die Güte unter  $\beta < 10\%$ . Die Projektion auf den Dunkelzustand  $a^0$  ist für den größten Bereich über 0.95 (gelbe Fläche in Abbildung 6.8d). Für große Abweichungen  $\delta_{\text{ad}} > 100 \text{ kHz}$  sinkt die Übereinstimmung des atomaren Zustandes mit dem Dunkelzustand. Die Projektion wird zum Einen kleiner, wenn man sich parallel zur Abszisse zu größeren Verstimmungen bewegt, zum Anderen wird sie kleiner, wenn man parallel zur Ordinatenachse  $\xi$  erhöht. Für den gewählten Ausschnitt ist die Projektion kleiner als 0.7 für  $\xi = 16$  und  $\delta_{\text{ad}} = 1 \text{ MHz}$ .

In der Abbildung 6.3a liegt  $P_{\text{em}} > 90\%$  für einen Parameter  $\xi < 16$ . Da in der Abbildung 6.8a 10% Schritte für die Konturlinien gewählt wurden ist die Abhängigkeit der Photonemission von  $\xi$  in Abbildung 6.8a nicht mehr ersichtlich. Dasselbe gilt für die Projektion auf den Dunkelzustand in der Abbildung 6.8d. Die Emissionszeit ist von einer Abweichung des Lasers sowie des Resonators von den atomaren Übergangsfrequenzen kaum betroffen (Abbildung 6.8c). Die Güte verschlechtert sich für große Abweichungen  $\delta_{\text{ad}} > 10 \text{ kHz}$  deutlich. Auch die Photonenemissionswahrscheinlichkeit sinkt stark, wenn die Abweichung zu groß ist  $\delta_{\text{ad}} > 100 \text{ kHz}$ .

Der adiabatische Prozess reagiert empfindlicher auf die Linienbreite des Lasers  $\delta_{393}$  und der zusätzlichen Linienbreite des Resonators  $\delta_{\text{inh}}$ . Für  $\delta_{393}, \delta_{\text{inh}} > 1 \text{ kHz}$  verringert sich  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  deutlich, und die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  verlängert sich etwas.

### 6.1.5 Auswahl des effektiveren Prozesses für das Experiment

Die Photonenemission  $P_{\text{em}}$  und die Güte  $\beta$  erreichen für den idealen Ramanprozess und den idealen adiabatischen Prozess dieselben Werte,  $P_{\text{em}} = 98\%$  bzw.  $\beta = 82.8\%$ . Für beide Prozesse wird  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  kleiner, wenn man eine Linienbreite des Lasers  $\delta_{393}$ , eine zusätzliche Linienbreite des Resonators  $\delta_{\text{inh}}$  und eine Abweichung aus der Resonanzbedingung  $\delta_{\text{Ram}}$  bzw.  $\delta_{\text{ad}}$  mit berücksichtigt. Im Experiment möchte man auch eine kleine Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  erreichen. Das experimentelle Ziel ist, in einer möglichst kurzen Zeit  $t_{\text{em}}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Photon aus dem Resonator zu bekommen.

Die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  für den Ramanprozess sind für genügend große Rabifrequenzen  $\Omega_{12} \geq 10 \text{ MHz}$  nur abhängig vom Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ , für feste Werte von  $\delta_{393}$ ,  $\delta_{\text{inh}}$  und  $\delta_{\text{Ram}}$ . Aus diesem Grund kann man  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  für diesen Bereich als Funktion der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  betrachten. Durch Variieren des Verhältnisses  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  ändert sich die Emissionszeit sowie  $P_{\text{em}}$  bzw.  $\beta$ , es ist aber nicht möglich,  $P_{\text{em}}$  konstant zu halten und die Emissionszeit beliebig zu verkürzen. Für den adiabatischen Prozess erreichen die Größen  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  einen maximalen Wert bei einer minimalen Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  für den Parameter  $\xi = \log(\Omega_{12}/\tau^2)$ . Eine Änderung der Rabifrequenz  $\Omega_{12}$  oder der Anstiegsdauer  $\tau$  beeinflussen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  nicht, wenn der Parameter  $\xi$  konstant gehalten wird. Die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  des Ramanprozesses und des adiabatischen Prozesses lassen sich vergleichen, wenn man die Wertepaare  $(t_{\text{em}}, P_{\text{em}})$  und  $(t_{\text{em}}, \beta)$  für beide Prozesse aufträgt.

In den Abbildungen 6.9 und 6.10 sind die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  und die Güte  $\beta$  als Funktion der Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  für den Ramanprozess und den adiabatischen Prozess aufgetragen. Die blauen Quadrate entsprechen den Wertepaaren der Ramanprozesse, und die roten Kreise den Wertepaaren der adiabatischen Prozesse. Die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$  und  $\beta$  wurden einmal für den idealen Fall berechnet (volle Symbole) und einmal für die realen Prozesse (offene Symbole). Die Rabifrequenz ist in allen vier Fällen konstant  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$ . In Abbildung 6.9 variiert die Verstimmung zwischen  $2 \text{ MHz} < \Delta_{12} < 10 \text{ GHz}$  für den Ramanprozess, für den adiabatischen Prozess überstreicht die Anstiegsdauer einen Bereich von  $1 \text{ ns} < \tau < 3.16 \text{ s}$ . Für den realen Ramanprozess und den realen adiabatischen Prozess wurden die experimentellen Unsicherheiten wie folgt gewählt:  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = \delta_{\text{Ram}} = \delta_{\text{ad}} = 10 \text{ kHz}$ .

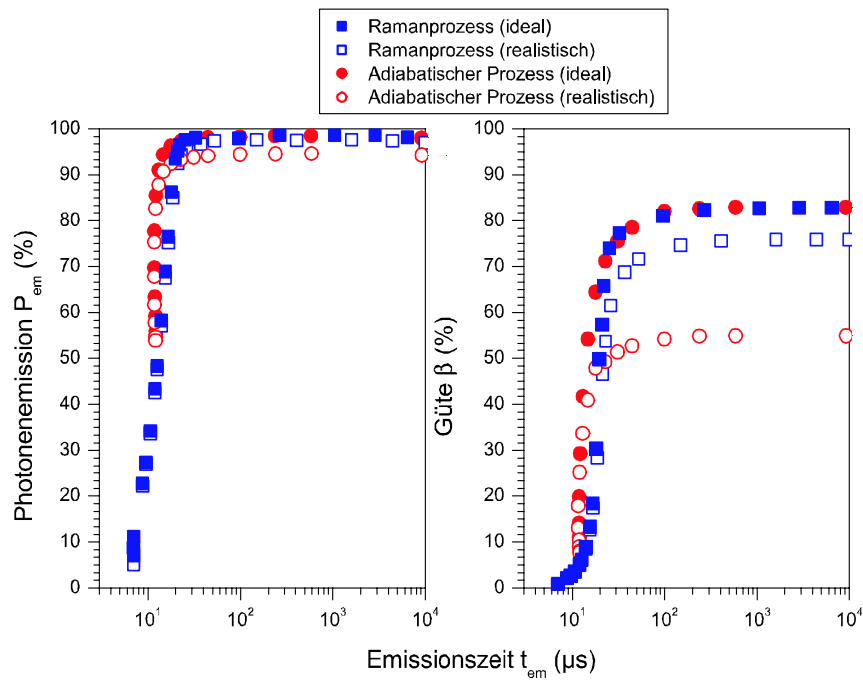


Abbildung 6.9: Aufgetragen sind die Wertepaare  $(t_{em}, P_{em})$  und  $(t_{em}, \beta)$  für die idealen und realen Raman- (blaue Quadrate) bzw. adiabatischen Prozesse (rote Kreise). Die Rabi-frequenz ist konstant bei  $\Omega_{12} = 10$  MHz. Für den realen Ramanprozess (offene Quadrate) und realen adiabatischen Prozess (offene Kreise) sind die experimentellen Unsicherheiten wie folgt angenommen:  $\delta_{393} = \delta_{inh} = \delta_{Ram} = \delta_{ad} = 10$  kHz.

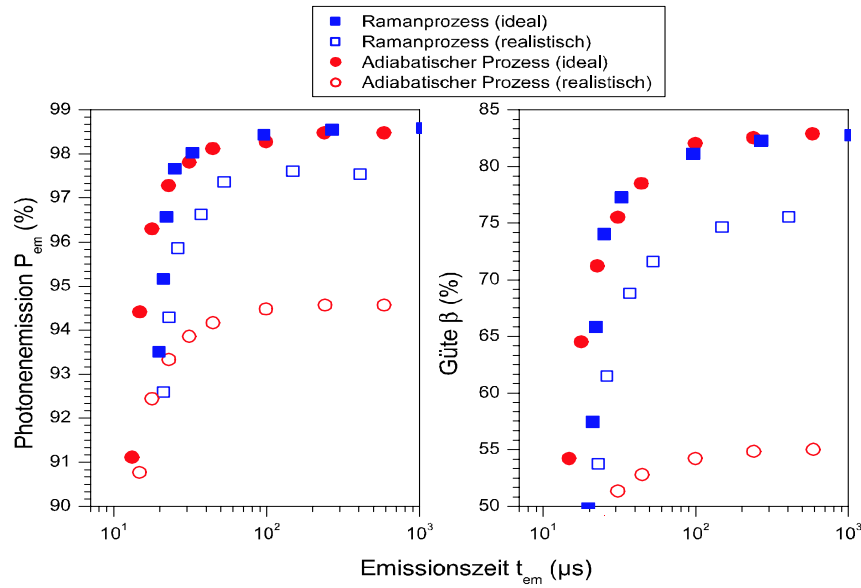


Abbildung 6.10: Ausschnitt aus Abbildung 6.9. Aufgetragen sind die Wertepaare  $(t_{\text{em}}, P_{\text{em}})$  und  $(t_{\text{em}}, \beta)$  für die idealen und realen Raman- (blaue Quadrate) bzw. adiabatischen Prozesse (rote Kreise). Die Rabi-Frequenz ist konstant bei  $\Omega_{12} = 10$  MHz. Für den realen Ramanprozess (offene Quadrate) und realen adiabatischen Prozess (offene Kreise) sind die experimentellen Unsicherheiten wie folgt angenommen:  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = \delta_{\text{Ram}} = \delta_{\text{ad}} = 10$  kHz.

Die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  ist in der rechten Abbildung 6.9 bzw. 6.10 dargestellt. Die minimale Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  für den Ramanprozess beträgt  $7 \mu\text{s}$ , bei einer Emissionswahrscheinlichkeit von  $P_{\text{em}} < 10\%$ . Für größere Emissionszeiten steigt die Emissionswahrscheinlichkeit und erreicht ab einer Emissionszeit von  $100 \mu\text{s}$  ein Plateau, beim idealen Ramanprozess beträgt das maximale  $P_{\text{em}} = 98.5\%$ , im realen Ramanprozess erreicht  $P_{\text{em}} = 97.5\%$  (Abbildung 6.10). Die Emissionswahrscheinlichkeit des adiabatischen Prozesses sinkt nicht unter  $50\%$  bei einer kleinsten Emissionszeit von  $12 \mu\text{s}$ . Bei größeren Emissionszeiten steigen  $P_{\text{em}}$  für den idealen und den realen adiabatischen Prozess gleich stark an. Das Plateau für  $P_{\text{em}}$  des realen adiabatischen Prozesses liegt bei einem kleineren Wert  $P_{\text{em}} = 94.6\%$  als für den idealen adiabatischen Prozess von  $P_{\text{em}} = 98.5\%$  (Abbildung 6.10). Die beiden adiabatischen Fälle sind für  $P_{\text{em}} < 90\%$  schneller, bei gleicher Emissionswahrscheinlichkeit, als die Ramanprozesse.  $P_{\text{em}}$  des realen Ramanprozesses ist etwas größer als  $P_{\text{em}}$  des realen adiabatischen Prozesses.

Für kurze Emissionszeiten  $t_{\text{em}} < 7 \mu\text{s}$  verschwindet die Güte des Ramanprozesses. Für längere Emissionszeiten  $t_{\text{em}} > 10 \mu\text{s}$  hingegen steigt die Güte rasch an. Dabei sind die Wertepaare  $(t_{\text{em}}, \beta)$  für den idealen und den realen Ramanprozess bis zu einer Güte  $\beta < 50\%$  identisch. Für größere Emissionszeiten erreicht die Güte für den realen Prozess nicht mehr die Güte des idealen Prozesses bei derselben Emissionszeit  $t_{\text{em}}$ . Die maximale Güte wird für eine Emissionszeit  $t_{\text{em}} > 200 \mu\text{s}$  erreicht. Für den idealen Ramanprozess beträgt die Güte  $\beta = 82.8\%$ , für den realen Prozess erreicht die Güte  $\beta = 75.8\%$ . Die kleinste Güte für den adiabatischen Prozess beträgt  $\beta = 8\%$  bei einer Emissionszeit  $t_{\text{em}} = 11 \mu\text{s}$ . Für kleine Werte  $\beta < 30\%$  und kurze Emissionszeiten  $t_{\text{em}} < 13 \mu\text{s}$  ist der ideale adiabatische Prozess identisch mit dem realen adiabatischen Prozess. Für größere Emissionszeiten erreicht die Güte des realen Prozesses kleinere Werte als im idealen Fall. Für  $t_{\text{em}} > 200 \mu\text{s}$  erreicht

die Güte für beide Fälle ein Plateau. Die maximale Güte beträgt für den idealen Fall  $\beta = 82.8\%$  (gleicher Wert wie für den idealen Ramanprozess), und  $\beta = 55\%$  für den realen adiabatischen Prozess (Abbildung 6.10). Bei kleinen Güten  $\beta < 50\%$  wird dieselbe Güte für den adiabatischen Prozess schneller erreicht als für den Ramanprozess.

Im Bereich kleiner Emissionszeiten  $t_{\text{em}} < 25 \mu\text{s}$  ist die effektive Rabifrequenz  $\Omega_{\text{eff}}$  größer als die Resonatorzerfallskonstante  $\kappa$ . Mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit kann, das in den Resonator emittierte Photon, vom Ion erneut absorbiert werden, bevor das Photon aus dem Resonator emittiert wird. Durch diese Absorption verlängert sich der Emissionsprozess, wodurch die längere Emissionszeit von  $P_{\text{em}}$  und  $\beta$  für den Ramanprozess erklärt werden können.

Der Ramanprozess entspricht nach wie vor einem effektiven Zwei-Niveau-System. Die zusätzlichen Dämpfungen des Besetzungstransfers spielen erst dann eine Rolle, wenn sie in der Größenordnung der effektiven Rabifrequenz  $\Omega_{\text{eff}}$  liegen. Sind die Linienbreiten  $\delta_{393}$  und  $\delta_{\text{inh}}$  bzw. die Verstimmung aus der Ramanresonanz  $\delta_{\text{Ram}}$  kleiner als die effektive Kopplung der beiden Niveaus, dann ist der wesentliche Dämpfungsterm durch die effektive Spontanemission  $\Gamma_{\text{eff}}$  gegeben. Die Linienbreite entspricht einer Unsicherheit in der Frequenz des Lasers  $\Omega_{393}$ . Für den adiabatischen Prozess bedeutet dies, dass die Zwei-Photonenresonanz nicht mehr für das gesamte Lasrefeld erfüllt wird. Dies führt zu einer Besetzung des Niveaus  $P_{3/2}$  [37] und wegen des erhöhten spontanen Zerfalls zu einer Verschlechterung der Güte  $\beta$ . Der adiabatische Prozess reagiert etwas empfindlicher auf die experimentellen Unsicherheiten, wie der Linienbreite für den Laser  $\delta_{393}$ , der zusätzlichen Linienbreite des Resonators  $\delta_{\text{inh}}$  sowie der Abweichung aus der Resonanzbedingung  $\delta_{\text{ad}}$  als der Ramanprozess. Aus diesem Grund wurde für die weitere Arbeit der Ramanprozess ausgewählt.

### 6.1.6 Abhängigkeit der Größen $P_{\text{em}}$ , $t_{\text{em}}$ und $\beta$ von der Kopplungsstärke

Die maximale Güte für den idealen Ramanprozess und den idealen adiabatischen Prozess erreicht  $\beta = 82.8\%$ . Die Güte kann auch durch die Formel 6.2 berechnet werden. Schreibt man diese Formel etwas um, erhält man:

$$\beta' = \frac{2g_{32}^2}{2g_{32}^2 + \kappa\Gamma_{\text{Sp}}}. \quad (6.3)$$

Wenn es gelingt, die Kopplungsstärke  $g_{32}$  zu erhöhen, dann wird  $\beta'$  besser. Für  $g_{32} \gg \kappa, \Gamma_{\text{Sp}}$  wird  $\beta' \Rightarrow 1$ .

Abbildung 6.11 zeigt die Größen  $P_{\text{em}}$ ,  $t_{\text{em}}$ ,  $\beta$  und die maximale Besetzung von  $P_{3/2}$  des Ramanprozesses als Funktion des Verhältnisses  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  für verschiedene Kopplungsstärken  $g_{32}$ . Die Rabifrequenz ist für alle Kurven  $\Omega_{12} = 10 \text{ MHz}$ , und es wurde weiters der ideale Fall angenommen, das heißt,  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = \delta_{\text{Ram}} = \delta_{\text{ad}} = 0 \text{ Hz}$ . Die Verstimmung  $\Delta_{12}$  reicht von  $10 \text{ MHz} < \Delta_{12} < 10 \text{ GHz}$ . Die Kopplungsstärke beträgt  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\} \text{ MHz}$  für {schwarzes Quadrat, roter Kreis, grünes Dreieck, blaues Dreieck auf Spitze, cyan Raute}.

In der Abbildung 6.11a ist die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  aufgetragen. Für kleine Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.05$  bleibt  $P_{\text{em}}$  konstant. Abhängig von der Kopplungsstärke  $g_{32}$  sinkt die Emissionswahrscheinlichkeit für größere Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . Für die größte Kopplungsstärke  $g_{32} = 10 \text{ MHz}$  ist für den ausgewählten Bereich keine Verminderung der Emissionswahrscheinlichkeit bemerkbar. Die maximale Emissionswahrscheinlichkeit ist für  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\} \text{ MHz}$  gleich  $P_{\text{em}} = \{93.5, 96.7, 99.5, 99.7, 99.9\} \%$ . Die Emissionszeit ist in Abbildung 6.11b dargestellt. Bei kleinen Verhältnissen  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.1$  sinkt die Emissionszeit für größere Kopplungen  $g_{32}$ . Für ein Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12} > 0.1$  steigt die Emissionszeit für größere Kopplungsstärken. Bei einer hohen Kopplungsstärke treten

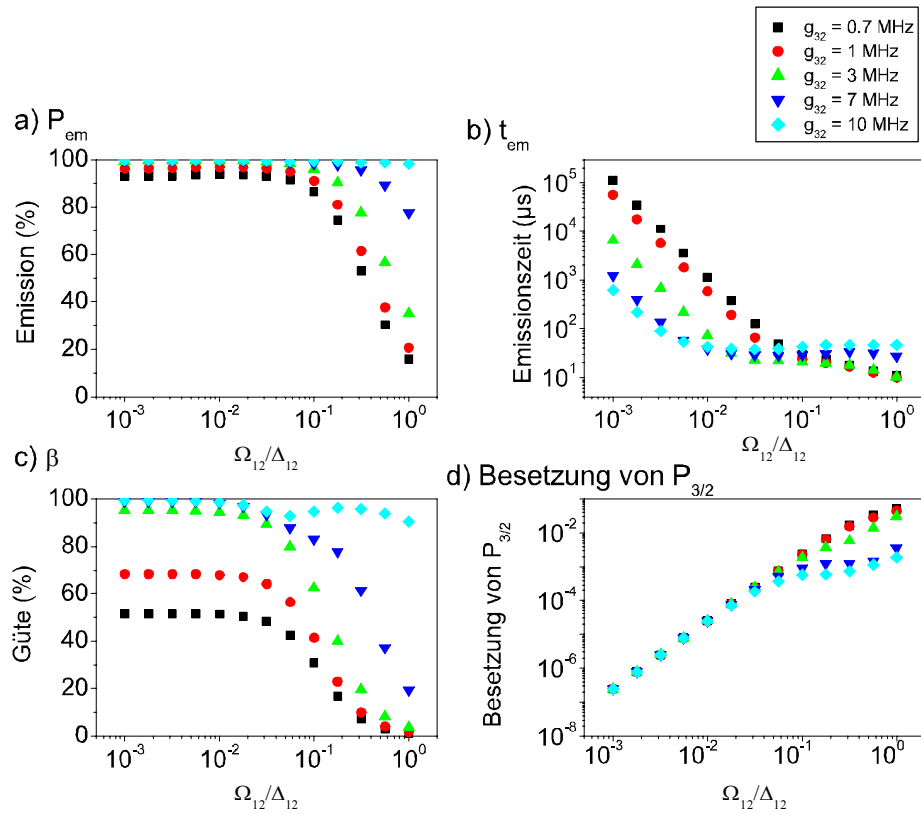


Abbildung 6.11: Ramanprozess für verschiedene Kopplungen. Aufgetragen sind die Photonenemissionswahrscheinlichkeit  $P_{em}$ , die Emissionszeit  $t_{em}$ , die Güte  $\beta$  und die Besetzung des  $P_{3/2}$  - Niveaus.

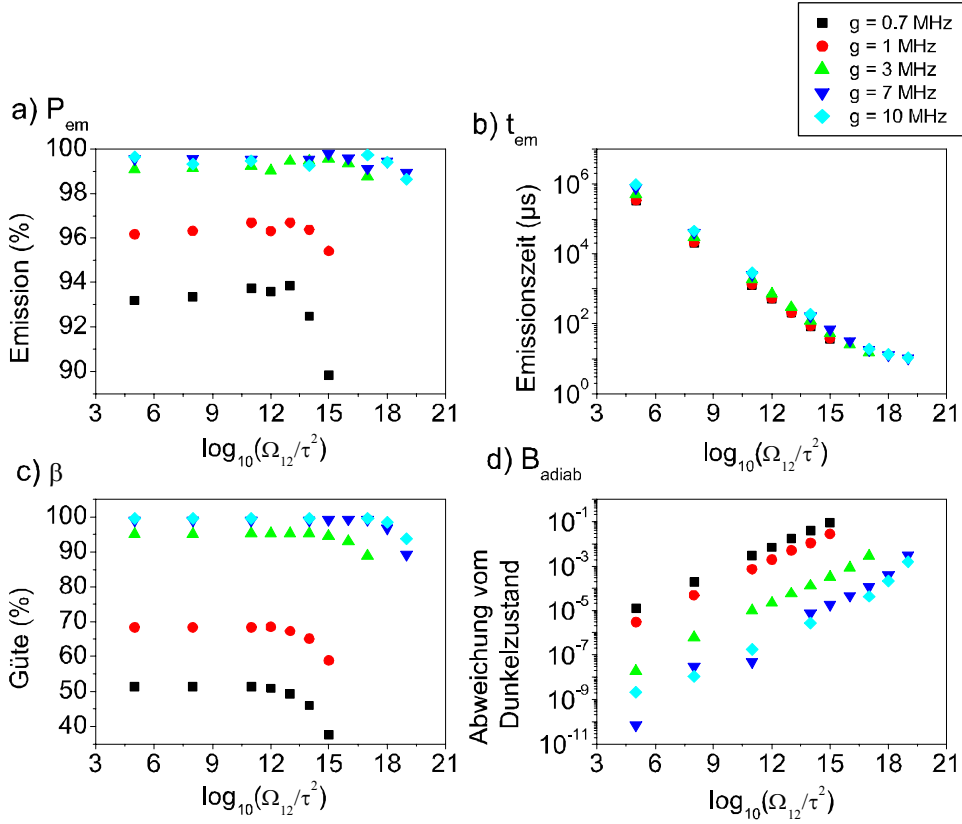


Abbildung 6.12: Adiabatischer Prozess bei verschiedenen Kopplungsstärken. Aufgetragen sind die Emissionswahrscheinlichkeit in den Resonator  $P_{em}$ , die Emissionszeit  $t_{em}$ , die Güte  $\beta$  und die Abweichung vom Dunkelzustand  $B_{adiab}$ .

Rabioszillationen zwischen den beiden Niveaus  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$  auf, wodurch die Emissionszeit verlängert wird. In der Abbildung 6.11c wird die Güte  $\beta$  dargestellt. Für größere Kopplungsstärken steigt die Güte. Die maximale Güte für  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\}$  MHz ist  $\beta = \{51, 68, 95, 98, 99.5\}$  %. Nach der Gleichung 6.3 ergeben sich die Werte für  $\beta' = \{55, 69.7, 95.7, 99.2, 99.6\}$  % für die Kopplungsstärken  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\}$  MHz. In der Abbildung 6.11d wurde die maximale Besetzung von  $P_{3/2}$  dargestellt. Für kleine Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12} < 0.1$  ist die Besetzung von  $P_{3/2}$  für alle Kopplungsstärken  $g_{32}$  identisch. Bei größeren Verhältnissen, steigt die Besetzung von  $P_{3/2}$  für große Kopplungsstärken  $g_{32}$  nicht so schnell an.

Die Abbildung 6.12 zeigt die gesuchten Größen  $P_{em}$ ,  $t_{em}$ ,  $\beta$  und  $B_{adiab}$ , die Abweichung vom Dunkelzustand, für den adiabatischen Prozess. Die gesuchten Größen sind als Funktion des Parameters  $\xi = \log(\Omega_{12}/\tau^2)$  für verschiedene Kopplungsstärken  $g_{32}$  aufgetragen. Die Rabifrequenz liegt konstant bei  $\Omega_{12} = 10$  MHz, und es wurde der ideale adiabatische Fall betrachtet  $\delta_{393} = \delta_{inh} = \delta_{Ram} = \delta_{ad} = 0$  Hz. Die Kopplungsstärke für die verschiedenen



Kurven {schwarz, rot, grün, blau, cyan} beträgt  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\}$  MHz.

Die Emissionswahrscheinlichkeit ist in Abbildung 6.12a dargestellt. Für große Kopplungsstärken steigt die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$ . In dem dargestellten Bereich von  $\xi$  ist für  $g_{32} \geq 7$  MHz die Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}} > 99\%$  für alle  $\xi$ . Die maximalen Werte von  $P_{\text{em}} = \{93.5, 96.5, 99, 99.5, 99.6\}\%$  für  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\}$  MHz. Die Emissionswahrscheinlichkeit erreicht für den adiabatischen Prozess ähnliche Werte wie für den Ramanprozess. Die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  wird in Abbildung 6.12b gezeichnet. Für große  $\xi$  ist die Emissionszeit unabhängig von der Kopplungsstärke  $g_{32}$ . Bei kleineren  $\xi$  wird die Emissionszeit  $t_{\text{em}}$  für größere Kopplungen bei gleichem  $\xi$  länger. Bei einem  $\xi = 5$  ist die Emissionszeit für  $g_{32} = 0.7$  MHz um einen Faktor 3 kürzer als für  $g_{32} = 10$  MHz. Bei einem  $\xi = 15$  ist die Emissionszeit noch um einen Faktor 2 kürzer für  $g_{32} = 0.7$  MHz als für  $g_{32} = 10$  MHz. Die Abhängigkeit der Güte von der Kopplungsstärke ist in Abbildung 6.12c dargestellt. Die maximale Güte erreicht für  $g_{32} = \{0.7, 1, 3, 7, 10\}$  MHz Werte von  $\beta = \{51.4, 68.3, 95, 99.5, 99.5\}\%$ . Diese Werte entsprechen den Werten der Güte des Ramanprozesses für dieselben Kopplungsstärken. In der Abbildung 6.12d ist  $B_{\text{adiab}}$  dargestellt. Das System bleibt für größere Kopplungen bei gleichem  $\xi$  besser im Dunkelzustand.

Die Photonenemission  $P_{\text{em}}$  und die Güte  $\beta$  erreichen für den adiabatischen Prozess und den Ramanprozess bei gleicher Kopplungsstärke  $g_{32}$  dieselben Maximalwerte.

## 6.2 Einzelphotonenpuls

Die Einzelphotonenquelle wird im Experiment verwendet, um mit einer möglichst hohen Wiederholungsrate pro Zyklus genau ein Photon aus dem Resonator zu bekommen. In den vorangegangenen Kapitel wurde das Augenmerk auf die Erzeugung eines einzelnen Photons gerichtet, um die experimentell zugänglichen Parameter für einen optimalen Prozess zu wählen. In diesem Abschnitt wird der Puls mehrmals wiederholt. Dazu muss die Besetzung in den Anfangszustand zurückgeführt werden, was durch optisches Pumpen erfolgt. Im Anfangszustand befindet sich kein Photon im Resonator. Aus diesem Grund wird durch das Einstrahlen des Lasers  $\Omega_{12}$  maximal ein Photon im Resonator erzeugt. Durch das Rückpumpen des atomaren Zustands in den Grundzustand und erneutem Einstrahlen des Lasers  $\Omega_{12}$ , ist es möglich, dass sich zwei Photonen im Resonator befinden.

Für ein System mit experimentellen Unsicherheiten, wie der Linienbreite des Lasers  $\delta_{393}$ , die zusätzliche Linienverbreiterung des Resonators  $\delta_{\text{inh}}$  und der Abweichung aus der Resonanzbedingung  $\delta_{\text{Ram}}$  bzw.  $\delta_{\text{ad}}$ , liefert der Ramanprozess eine höhere Emissionswahrscheinlichkeit  $P_{\text{em}}$  und Güte  $\beta$ . Aus diesem Grund wird für die Hintereinanderausführung der Ramanprozess verwendet.

### 6.2.1 Rückpumpmechanismus

Von entscheidender Bedeutung für die Hintereinanderausführung ist der Anteil der Zeeman-komponenten des Endzustandes (Abbildung 5.2). Wenn sich das System am Ende eines Zyklus mit großer Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Zeemankomponenten befindet, werden durch den Rückpumpimpuls beide Zeemankomponenten des  $S_{1/2}$  - Niveaus besetzt, und man braucht einen relativ langen Laserpuls, der das System in den Zustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  pumpt.

Für  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  kleiner als 0.3 ist die Besetzung des Endzustandes im Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  größer als 99% (siehe Abbildung 6.13). Für ein effektives Besetzen des ausgewählten Niveaus  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  muss die Verstimmung von der Resonanzbedingung kleiner sein als die effektive Rabi-Frequenz  $\delta_{\text{Ram}} < \Omega_{\text{eff}}$  (vergleiche Abbildung 6.6).

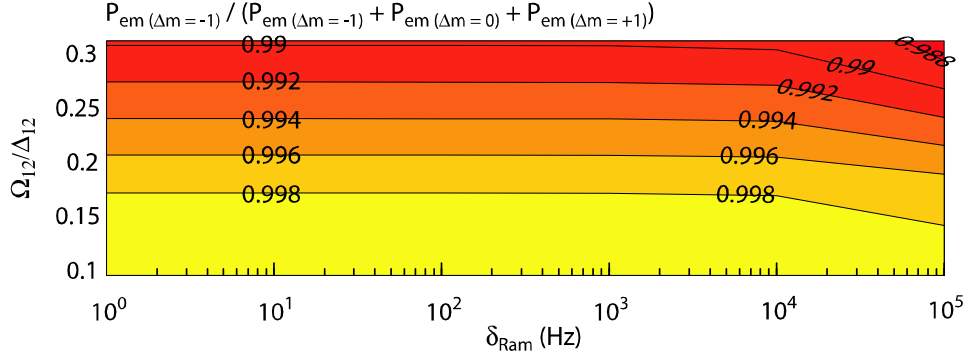


Abbildung 6.13: Anteil an  $\Delta m = -1$  Licht im Resonator. Die Laserlinienbreite und die Resonatorlinienbreite sind  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = 2\pi \times 10$  kHz. Die Rabifrequenz ist  $2\pi \times 10$  MHz.

Das Magnetfeld kann in zwei unterschiedliche, charakteristische Richtungen zeigen: Zum Einen kann das Magnetfeld in Richtung der Resonatorachse gelegt werden. Dies hat den Vorteil, dass nur zirkular polarisiertes Licht in Richtung des Resonators emittiert werden kann, und somit der Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $|D_{5/2}, m_j = -3/2\rangle$  mit  $\Delta m = 0$  unterdrückt wird (siehe Abbildung 4.4). Der Nachteil dieser Anordnung besteht darin, dass alle Präparationsstrahlen mit zirkularpolarisiertem Licht ebenfalls durch den Resonator gestrahlt werden müssen. Zum Anderen kann das Magnetfeld normal zur Resonatorachse gelegt werden. In diesem Fall kann die Kopplungsstärke für alle drei Dipolübergänge maximal sein, vorausgesetzt der Resonator ist komplett zylindersymmetrisch.

Abbildung 6.14 zeigt die Abhängigkeit der Emissionswahrscheinlichkeit vom Verhältnis  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  für verschiedene Magnetfeldrichtungen. Das Magnetfeld liegt einmal parallel zur Resonatorachse  $B = B_{\parallel}$  und einmal normal zur Resonatorachse  $B = B_{\perp}$ . Das zugrundeliegende  $\Lambda$ -System besteht aus den Zuständen  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$ ,  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  und  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$ . In der Abbildung 6.14 wurden neben dem Übergang von  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  nach  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  mit  $\Delta m = -1$  auch die Übergänge von  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  nach  $|D_{5/2}, m_j = -3/2\rangle$  mit  $\Delta m = 0$  und von  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$  nach  $|D_{5/2}, m_j = -1/2\rangle$  mit  $\Delta m = +1$  berücksichtigt. Die Rabifrequenz ist konstant bei  $\Omega_{12} = 100$  MHz, die Linienbreite des Lasers, die zusätzliche Linienbreite des Resonators sowie die Abweichung von der Resonanzbedingung betragen  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = \delta_{\text{Ram}} = 10$  kHz. Die Verstimmung wird zwischen  $1 \text{ GHz} < \Delta_{12} < 10 \text{ GHz}$  gewählt. Liegt das Magnetfeld normal zur Resonatorachse, verschwindet die Kopplung  $g_{42} = 0$  für den Übergang mit  $\Delta m = 0$ .

In Abbildung 6.14a ist die Emissionswahrscheinlichkeit für den Übergang  $\Delta m = -1$  aufgetragen. Für kleine Verhältnisse  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$  sind die Emissionswahrscheinlichkeiten identisch  $P_{\text{em}}(B_{\parallel}) = P_{\text{em}}(B_{\perp})$ . Bei einem Verhältnis von  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.1$  ist  $P_{\text{em}}(B_{\parallel})$  um etwa 1% größer als für  $P_{\text{em}}(B_{\perp})$ . Für den Übergang  $\Delta m = 0$  ist  $P_{\text{em}}(B_{\parallel}) = 0$  (Abbildung 6.14b). Die Emissionswahrscheinlichkeit für den Übergang  $\Delta m = 0$  bei  $B_{\perp}$  ist  $P_{\text{em}}(B_{\perp}) = 0.15\%$  für  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.01$  und  $P_{\text{em}}(B_{\perp}) = 0.6\%$  für  $\Omega_{12}/\Delta_{12} = 0.1$ . Für den Übergang  $\Delta m = +1$  ist die Emissionswahrscheinlichkeit unabhängig von der Magnetfeldrichtung  $P_{\text{em}}(B_{\perp}) = P_{\text{em}}(B_{\parallel})$  für alle  $\Omega_{12}/\Delta_{12}$ . In jenem Bereich, in dem die Emissionswahrscheinlichkeit für  $\Delta m = -1$  maximal ist, kann die Emissionswahrscheinlichkeit für die Übergänge  $\Delta m = 0$  und  $\Delta m = +1$  für beide Magnetfeldrichtungen vernachlässigt werden.

Die Besetzung des Niveaus  $D_{5/2}$  kann durch optisches Pumpen in den Zustand  $S_{1/2}$  übergeführt werden. Dazu strahlt man einen breitbandigen Laser  $\Omega_{854}$  mit  $\lambda = 854$  nm von der

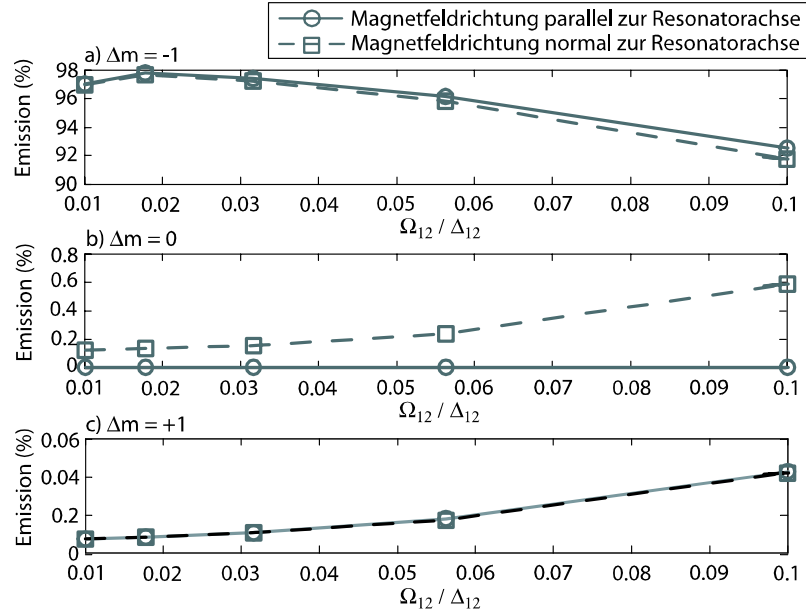


Abbildung 6.14: Emissionswahrscheinlichkeiten in den Resonator für die einzelnen Dipolübergänge und verschiedene Magnetfeldrichtungen. Die Linienbreite des Lasers und des Resonators beträgt  $2\pi \times 10$  kHz, die Abweichung von der Raman-Resonanzbedingung beträgt  $\delta_{\text{Ram}} = 10$  kHz.

Seite ein (Abbildung 6.15b). Der Laser  $\Omega_{854}$  wird dabei resonant auf den Übergang eingestrahlt, um die Pumpgeschwindigkeit zu maximieren. Das besetzte Niveau  $P_{3/2}$  zerfällt mit einem Verhältnis von 17,6:1 in die Niveaus  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$ . Die spontane Emission aus dem  $P_{3/2}$  Niveau nach  $D_{5/2}$  kann nicht in den Resonator strahlen, da dieser beim Ramanprozess weit verstimmt ist, und dadurch die spontane Emission unterdrückt wird. Damit trägt die spontane Emission beim Rückpumpen nicht zur Photonenemission bei. Durch die fast vollständige Besetzung des Niveaus  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  wird das Niveau  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  mit über 95% besetzt. Die Dauer des Rückpumpimpulses hängt von der Intensität von  $\Omega_{854}$  ab. Je intensiver der Laser  $\Omega_{854}$  den Übergang anregt, desto schneller ist das Niveau  $D_{5/2}$  entleert. Die Besetzung des Zustandes  $|S_{1/2}, m_j = +1/2\rangle$  wird durch einen zirkular polarisierten Laser ( $\sigma^-$ ), der Wellenlänge  $\lambda = 397$  nm, in den Zustand  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$  transferiert. Während des Rückpumpimpulses und der Präparation wird der Laser bei  $\lambda = 393$  nm abgeschaltet.

### 6.2.2 Hintereinanderausführung der Pumppulse

Zur Berechnung der Intensitätskorrelationsfunktion benötigt man zumindest drei Fockzustände  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ . Behält man in der numerischen Berechnung die sieben Niveaus bei, so vergrößert sich die Dimension der Dichtematrix von bisher 64 auf  $(3 \times 7)^2 = 441$ . Dadurch wird die Rechnung extrem langsam. Aus dem Studium der Besetzung der einzelnen Zeeman-Niveaus des  $D_{5/2}$  Zustandes wird deshalb folgende Näherung durchgeführt: Es wird im weiteren Experiment nur mehr das niedrigste Zeeman-Niveau  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  betrachtet. Das  $D_{3/2}$  Niveau wird durch adiabatische Elimination entfernt. Dadurch erhält man in dieser Näherung ein Drei-Niveau-System. Zusätzlich zur Vakuummode  $|0\rangle$  werden

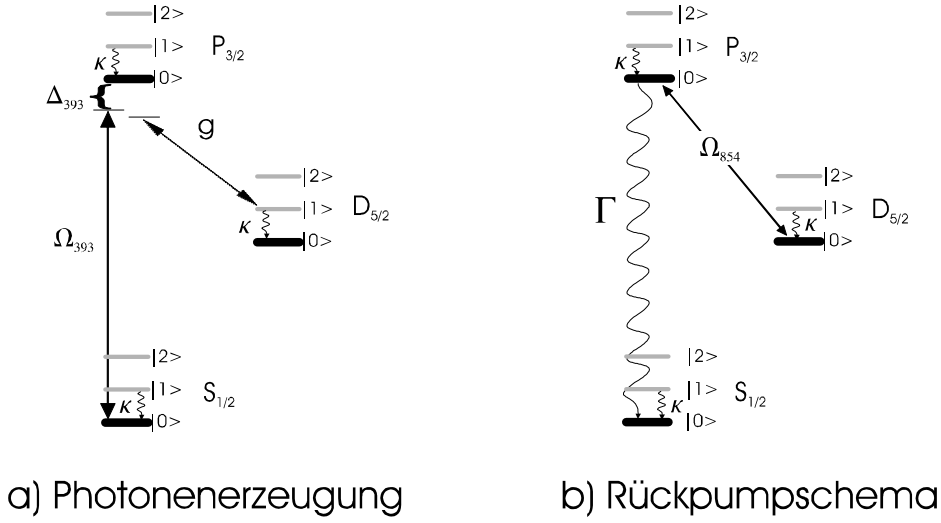


Abbildung 6.15: Niveauschema für die Hintereinanderausführung. Gezeigt sind die drei atomaren Niveaus  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$ ,  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$ ,  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  und die drei Fockzustände  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$ .

auch die beiden Fockzustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  mitgenommen.

In der Abbildung 6.15 sind die drei atomaren Niveaus  $|S_{1/2}, m_j = -1/2\rangle$ ,  $|P_{3/2}, m_j = -3/2\rangle$ ,  $|D_{5/2}, m_j = -5/2\rangle$  sowie die drei Fockzustände  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  aufgetragen. Der Laser  $\Omega_{393}$  mit  $\lambda = 393$  nm koppelt die Niveaus  $S_{1/2}$  und  $P_{3/2}$  mit gleichem Modenzustand miteinander. Der Resonator wiederum koppelt das Niveau  $D_{5/2}$  mit einem Modenzustand von  $|n+1\rangle$  mit dem Niveau  $P_{3/2}$  mit einem Fockzustand  $|n\rangle$ . Der Rückpumplaser  $\Omega_{854}$  koppelt die Niveaus  $D_{5/2}$  und  $P_{3/2}$  ohne Änderung des Fockzustandes. Eine Änderung der Resonatormode erfolgt nur durch die Kopplung des Resonators, nicht aber durch den Rückpumplaser.

Für die Zerfallsraten wurden jene der ausgewählten Zeeman-Niveaus verwendet. Die Resonatormode kann nur schrittweise seinen Photonenzustand verändern. Es ist nicht möglich, dass der Zustand  $|2\rangle$  direkt in den Vakuumzustand zerfällt. Die Zerfallsrate aus dem Resonator ist  $\kappa = 40$  kHz. Die Kopplungsstärke  $g$  entspricht der Kopplungsstärke  $g_{32}$  aus dem vorangegangenen Abschnitt  $g = g_{32} = 1.5$  MHz. Details zur Rechnung können dem Programm in Anhang A.2 entnommen werden.

### 6.2.3 Korrelationsfunktion

Eine Kontrollmöglichkeit, die quantenmechanischen Eigenschaften der Quelle festzustellen, stellt die Durchführung eines Hanbury Brown und Twiss [29] Experiments dar. Dabei wird die Intensitätskorrelationsfunktion für die emittierten Photonen ermittelt. Im Experiment wird die Zeit  $\tau$  gemessen, die zwischen der Detektion zweier Photonen verstreicht, und daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass man zur Zeit  $t + \tau$  ein Photon misst, wenn zur Zeit  $t$  ein Photon detektiert wurde.

Die Intensitätskorrelationsfunktion, oder Korrelationsfunktion zweiter Ordnung, ist definiert durch [31]:

$$G^2(\tau) = \langle E^-(t)E^-(t+\tau)E^+(t+\tau)E^+(t) \rangle. \quad (6.4)$$

Die normierte Form der Korrelationsfunktion schreibt sich mit den Erzeugungs- und Ver-

nichtungsoperatoren des Feldes  $a^\dagger$ ,  $a$  in der Normalordnung als [31]:

$$g^2(\tau) = \frac{\langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle}{\langle a^\dagger(t)a(t) \rangle \langle a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau) \rangle}. \quad (6.5)$$

Für ein klassisches Feld ist der Erwartungswert, zwei Photonen zur gleichen Zeit zu messen, immer größer als Eins. Handelt es sich bei der Lichtquelle um eine quantenmechanische Quelle, kann die Korrelationsfunktion für gleichzeitiges Auftreffen der Photonen am Detektor kleiner als eins werden:

$$g^2(0) < 1. \quad (6.6)$$

Die Korrelationsfunktion lässt sich mit dem Quanten-Regressions-Theorem [61] berechnen. Dabei erfolgt die Lösung der Intensitätskorrelationsfunktion durch Lösen der optischen Bloch Gleichung. Die numerische Lösung des Problems erfolgt durch zweimaliges Berechnen des Erwartungswertes [31]:

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau)a(t) \rangle &= \\ Sp\{a^\dagger(t)a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau)a(t)\rho(t)\} &= Sp\{a^\dagger(t+\tau)a(t+\tau)\rho_t(t+\tau)\}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Photon zu detektieren, erhält man durch Berechnen des Erwartungswertes  $\langle a^\dagger a \rangle = Sp\{a^\dagger a \rho\}$ . Startet man das System mit der Dichtematrix  $\rho_t = \rho_P(t) = a^\dagger(t)a(t)\rho$  und lässt es bis zu einer Zeit  $t+\tau$  entwickeln, erhält man die Dichtematrix  $\rho_t(t+\tau)$ . Durch neuerliches Anwenden der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren auf die Dichtematrix  $\rho_t(t+\tau)$  erhält man den Erwartungswert  $G^2(t, t+\tau)$ . Berechnet man für verschiedene Zeiten  $t$  die Korrelationsfunktion, so kann man das Ergebnis über alle  $G^2(t, t+\tau)$  mitteln und erhält somit die unnormierte Korrelationsfunktion  $G^2(\tau)$ . Normiert wird die Korrelationsfunktion durch die mittlere Intensität an einem Detektor zum Quadrat, das heißt, durch die gemittelte Wahrscheinlichkeit, zur Zeit  $t$  ein Photon zu messen.

Abbildung 6.16 zeigt die zeitliche Entwicklung des 9-Niveau-Systems. Verwendet wurde der Ramanprozess mit einer Rabinfrequenz  $\Omega_{393} = 10$  MHz. Die Verstimmung des Lasers vom atomaren Niveau beträgt  $\Delta_{393} = 333$  MHz. Die Kopplungsstärke des Resonators beträgt  $g = 1.5$  MHz, die Verstimmung  $\Delta_{Res}$  wird entsprechend der Ramanresonanzbedingung gewählt und bleibt während der gesamten Sequenz konstant. Die Resonatorzerfallsrate ist  $\kappa = 40$  kHz. Der Rückpumplaser strahlt mit einer Stärke von  $\Omega_{854} = 100$  MHz auf das Ion. Die verwendeten experimentellen Unsicherheiten für das Systems wurden mit  $\delta_{393} = \delta_{inh} = \delta_{Ram} = 10$  kHz angenommen. Die Abszisse der Grafiken a-e zeigt die Zeit  $t$  mit der Startzeit  $t = 0$ , die Zeit  $\tau$  der Grafik f entspricht der Zeitdifferenz zwischen der Detektion zweier Photonen.

In der Abbildung 6.16a ist die Besetzung der atomaren Niveaus aufgetragen. Das System wird im Zustand  $S_{1/2}$  (durchgezogene Linie) präpariert. Nach dem Einschalten des Lasers  $\Omega_{393}$  wird das Niveau  $D_{5/2}$  (strichlierte Linie) besetzt. Die Besetzung des Niveaus  $P_{3/2}$  ist kaum sichtbar. Die maximale Besetzung von  $P_{3/2} = 2.2 \times 10^{-4}$  (vergleiche auch Kapitel 5.2.2). In der Abbildung 6.16b sind die Emissionsraten für die spontane Emission von  $P_{3/2}$  und die Photonenemission aus dem Resonator aufgetragen. Die Abbildung 6.16c zeigt die Besetzung der Fockzustände  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$ . Die maximale Besetzung des Fockzustandes  $|2\rangle$  erreicht  $\rho(|2\rangle)_{max} = 6.35 \times 10^{-6}$ . Damit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für die Emission von zwei Photonen zur gleichen Zeit von  $P(|2\rangle) = 2.2 \times 10^{-5}$ . In der Abbildung 6.16d werden die Kopplungsstärken der Laser und des Resonators wiedergegeben. Der Laser  $\Omega_{393}$  koppelt mit einer Stärke von 10 MHz mit dem Ion. Nach  $50 \mu s$  wird dieser Laser abgeschaltet und, nach einer Pause von  $0.5 \mu s$ , der Rückpumplaser  $\Omega_{854}$  für  $1 \mu s$  angeschaltet. Nach einer

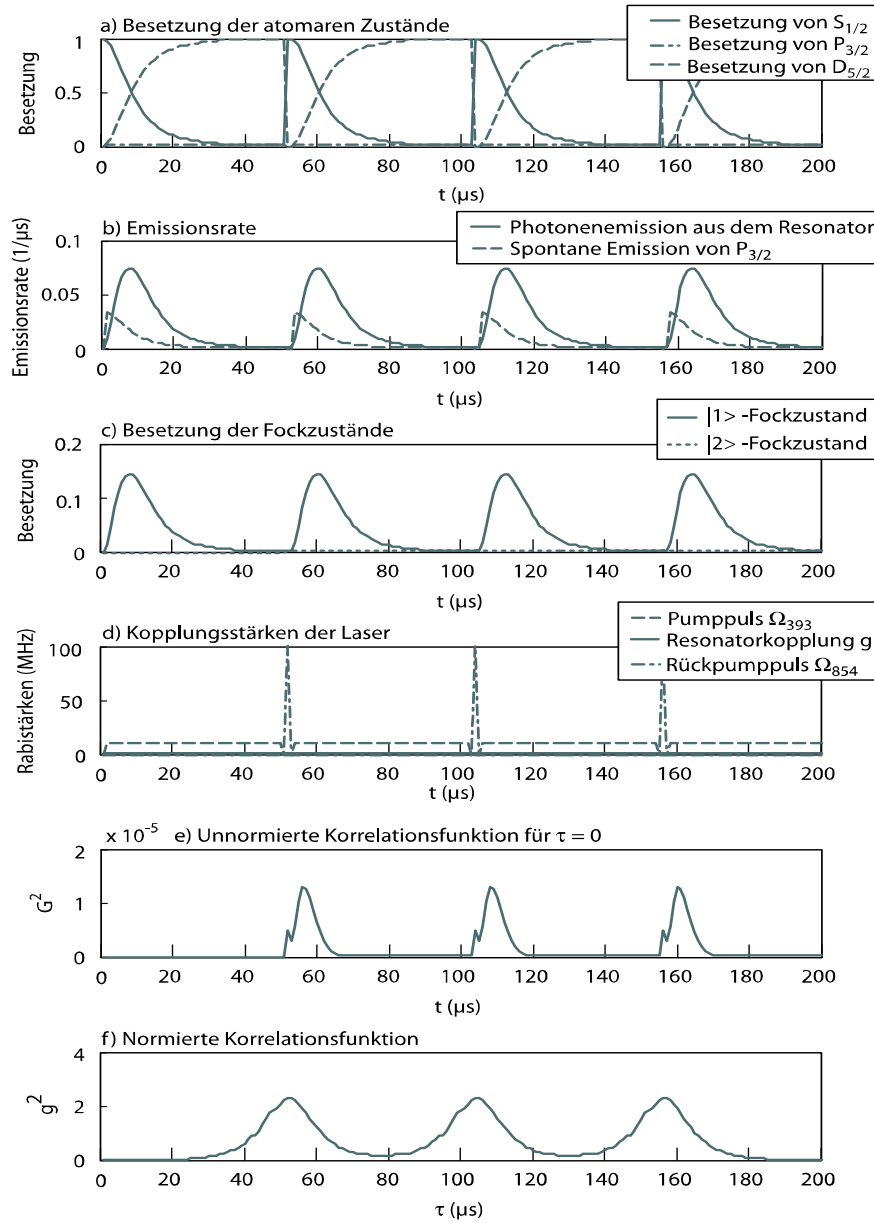


Abbildung 6.16: Zeitliche Entwicklung der atomaren Zustände (Grafik a) und der Fockzustände (Grafik b). In den Grafiken a-e ist die zeitliche Entwicklung mit einem Starterereignis bei  $t = 0$  aufgetragen. Die Abszisse der Grafik f enthält die Zeitdifferenz  $\tau$  zwischen der Detektion zweier Photonen.

	Pulslänge	$P_{\text{em}}$ (%)	$\beta$ (%)	$P( 2\rangle)$	$g_{\text{min}}^2$	$g_{\text{max}}^2$	Wiederholungsrate ( $s^{-1}$ )
a	12 $\mu s$	58	73	$7 \times 10^{-4}$	0.84	1.19	$8.3 \times 10^4$
b	22 $\mu s$	89.1	77.1	$2.7 \times 10^{-3}$	0.75	1.32	$4.5 \times 10^4$
c	32 $\mu s$	96.3	77.5	$6.9 \times 10^{-3}$	0.51	1.73	$3.13 \times 10^4$
d	42 $\mu s$	97.5	77.6	$4.1 \times 10^{-4}$	0.31	1.91	$2.4 \times 10^4$
e	52 $\mu s$	98.5	77.6	$5 \times 10^{-5}$	0.21	2.37	$1.9 \times 10^4$
f	72 $\mu s$	98.6	77.6	$3 \times 10^{-6}$	0.08	3.08	$1.4 \times 10^4$

Tabelle 6.1: Pulslänge, Emissionswahrscheinlichkeit pro Puls  $P_{\text{em}}$ , Güte  $\beta$ , Emissionswahrscheinlichkeit für zwei Photonen zur selben Zeit pro Puls  $P(|2\rangle)$ , Lokales Minimum  $g_{\text{min}}^2$  und Maximum  $g_{\text{max}}^2$  der Intensitätskorrelationsfunktion

weiteren Pause von 0.5  $\mu s$  wird der Laser  $\Omega_{393}$  erneut auf das Ion eingestrahlt. Der Resonator bleibt während des gesamten Experiments konstant bei  $g = 1.5$  MHz.

In der Abbildung 6.16e ist die Wahrscheinlichkeit, zwei Photonen zur gleichen Zeit ( $\tau = 0$ ) zu messen, aufgetragen. Die Wahrscheinlichkeit steigt mit dem Einsetzen des Rückpumpimpulses und sinkt anschließend mit dem Zerfall eines Photons aus dem Resonator. Die Intensitätskorrelationsfunktion in der Abbildung 6.16f zeigt die Wahrscheinlichkeit, ein Photon zur Zeit  $\tau$  zu messen, wenn zur Zeit  $t$  ein Photon gemessen wurde. Aus der Grafik 6.16b wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon in den Resonator emittiert, ersichtlich. Diese ist bei ungefähr 10  $\mu s$  am Größten. Dadurch verschiebt sich der Startpunkt der Intensitätskorrelationsfunktion etwas nach links. Die Periode der Maxima ist gleich dem Abstand der Emissionsratenmaxima. Das erste Minimum der Intensitätskorrelationsfunktion ist exakt null, da zu Beginn das System im Vakuumzustand präpariert ist. Die Größen der weiteren Minima sind abhängig von der Pulslänge bzw. vom Abstand der Rückpumpimpulse.

In der Abbildung 6.17 sind für verschiedene Pulslängen die Besetzung der atomaren Niveaus und die Intensitätskorrelationsfunktion aufgetragen. Die Kopplungsstärken  $\{\Omega_{393}, g, \Omega_{854}\}$  betragen  $\{10, 1.5, 10\}$  MHz, die Resonatorzerfallsrate  $\kappa = 40$  kHz und die Verstimmung des Lasers  $\Omega_{393}$  ist  $\Delta_{393} = 333$  MHz. Die experimentellen Unsicherheiten sind  $\delta_{393} = \delta_{\text{inh}} = \delta_{\text{Ram}} = 10$  kHz. Die Pulslänge addiert sich aus der Einstrahldauer für den Laser  $\Omega_{393}$ , der Einstrahldauer des Rückpumpasers von 1  $\mu s$  und einer Wartezeit von 1  $\mu s$ , bevor der Laser  $\Omega_{393}$  das Ion erneut anregt.

In der linken Spalte der Abbildung 6.17 ist die Besetzung der atomaren Niveaus gezeichnet. Die Besetzung von  $S_{1/2}$  (durchgezogene Linie) ist zu Beginn der Wechselwirkung  $P(S_{1/2}) = 1$ . Wird der Laser  $\Omega_{393}$  eingestrahlt, nimmt die Besetzung langsam ab, bis sie beim Wechsel der Laser wieder auf 1 ansteigt. Die Besetzung von  $D_{5/2}$  (punktierte Linie) vergrößert sich durch die Kopplung von  $\Omega_{393}$  langsam und verschwindet, wenn der Pumpaser  $\Omega_{854}$  eingestrahlt wird. Die Besetzung von  $P_{3/2}$  erreicht maximal  $2.2 \times 10^{-4}$ , weshalb dieses Niveau nicht gezeichnet wurde. In der rechten Spalte wurde die Intensitätskorrelationsfunktion für die jeweiligen Pulslängen abgebildet. Die Abszisse gibt den zeitlichen Abstand der beiden detektierten Photonen wieder. Für  $g^2(\tau) = 1$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein zweites Photon zur Zeit  $\tau$  zu detektieren, unabhängig vom ersten Photon. Für  $g^2(\tau) > 1$  steigt die Wahrscheinlichkeit, ein zweites Photon mit einem zeitlichen Abstand  $\tau$  zum ersten Photon zu detektieren. Für  $g^2(\tau) < 0$  sinkt diese Wahrscheinlichkeit.

Die Pulslängen in der Abbildung 6.17 betragen  $\{12, 22, 32, 42, 52, 72\}$   $\mu s$  für die Grafiken  $\{a, b, c, d, e, f\}$ . Wie schon in der Abbildung 6.16f ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Photonen zur Zeit  $\tau = 0$  emittiert werden, gleich null, da das System zu Beginn im Vakuumzustand präpariert wurde. Die Größen der weiteren Minima der Intensitätskorrelationsfunktion  $g_{\text{min}}^2$  wurden in Tabelle 6.1 aufgetragen. In der Tabelle 6.1 wurden außerdem die Pulslänge, die Emissionswahrscheinlichkeit pro Anregungspuls  $P_{\text{em}}$  und die Güte  $\beta$  auf-

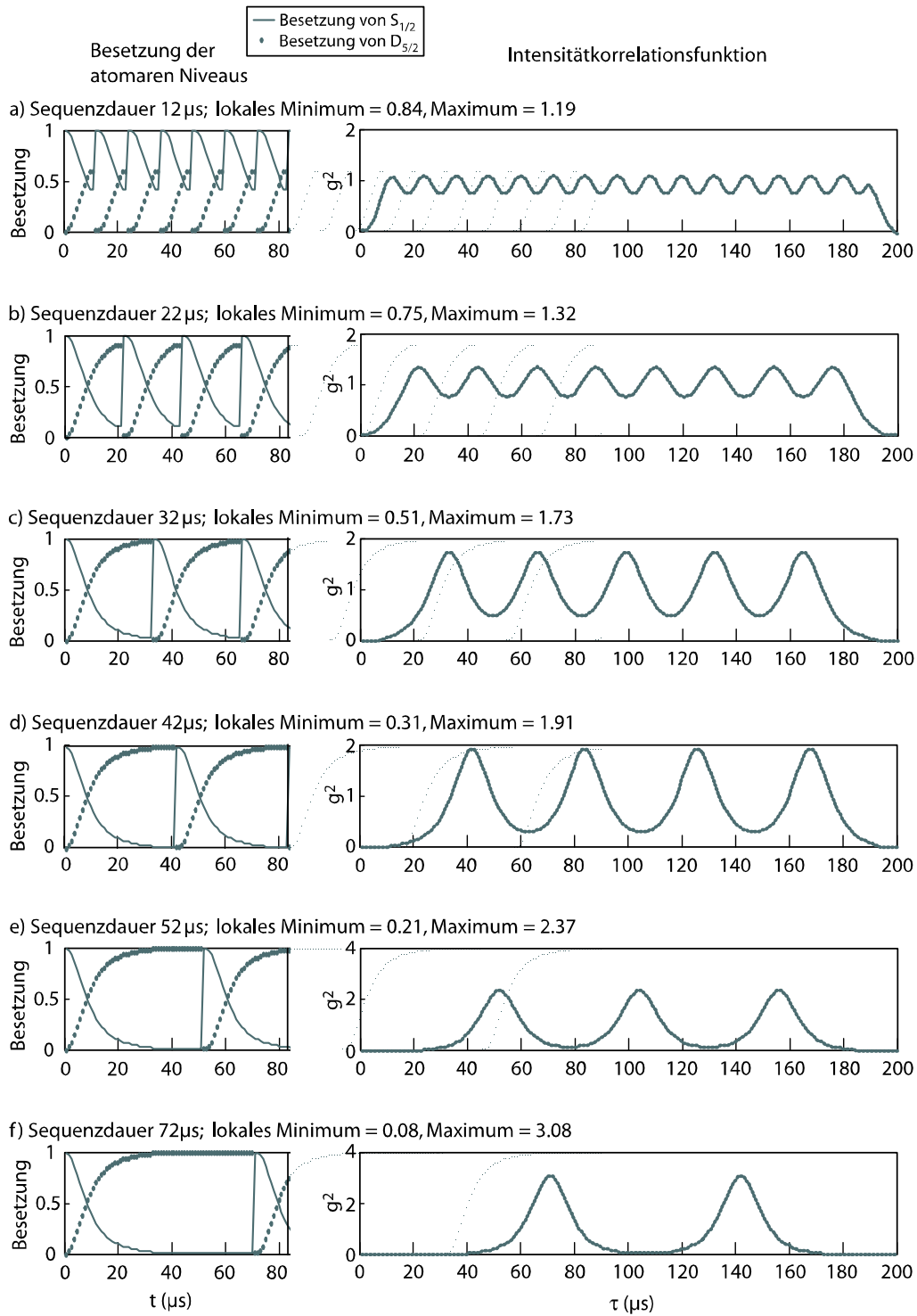


Abbildung 6.17: Besetzung der atomaren Niveaus und die Intensitätskorrelationsfunktion für verschiedene Pulslängen.



gelistet. Weiters findet man auch die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen zur gleichen Zeit aus dem Resonator emittiert werden  $P(|2\rangle)$  sowie die Maxima der Intensitätskorrelationsfunktion  $g_{\text{max}}^2$ . Für kurze Pulslängen liegen die  $g_{\text{min}}^2$  und  $g_{\text{max}}^2$  nahe bei eins. Vergrößert man die Pulslänge, nähert sich  $g_{\text{min}}^2 \rightarrow 0$  an während  $g_{\text{max}}^2$  ansteigt.

In der letzten Spalte in Tabelle 6.1 wurde die Wiederholungsrate für die jeweilige Pulslänge berechnet. Je länger die Pulslänge, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Photonen im Resonator befinden, aber gleichzeitig reduziert sich auch die Wiederholungsrate für die Erzeugung einzelner Photonen.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung/Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde die Möglichkeit, ein gespeichertes Ion als Einphotonen-Quelle zu verwenden, analysiert. Der Berechnung wurde der Dichtematrixformalismus zugrundegelegt. Die Mastergleichung wurde in der Lindbladform geschrieben, damit die Spur der Dichtematrix immer erhalten bleibt. Die Lösung der Differenzialgleichung erhält man durch numerisches Integrieren und erfolgte in diesem Fall durch Berechnen der Matrizenexponentialfunktion. Dabei muss beachtet werden, dass sich der Exponent zeitlich verändert, und somit nur eine schrittweise Integration möglich ist. Die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix bildet die Grundlage für die Analyse und den Vergleich zweier unterschiedlicher Anregungsformen. Das Ziel des Experimentes ist, auf ein Startsignal hin einen Besetzungstransfer im Ion zu erzeugen, wodurch genau ein Photon, in einem begrenzten Zeitintervall, emittiert wird. Im Kalziumion wird der Übergang zwischen  $S_{1/2}$  und  $P_{3/2}$  als Startsignal verwendet, die Emission von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$  ergibt das gewünschte Photon. Dieses koppelt durch einen optischen Resonator an die Außenwelt.

Man erzeugt einen Besetzungstransfer zwischen den Niveaus  $S_{1/2}$  und  $D_{5/2}$  über das  $P_{3/2}$  Niveau. Alle Übergänge sind dipolerlaubte Übergänge, wodurch eine schnelle Emissionszeit, die spontane Emissionsrate von  $P_{3/2}$  nach  $S_{1/2}$  bzw.  $D_{5/2}$  beträgt  $1,35 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$  bzw.  $9,9 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}$ , gewährleistet wird. Für jedes Starterereignis will man genau ein Photon mit immer der gleichen Frequenz erhalten, weshalb der Übergang von  $P_{3/2}$  nach  $D_{5/2}$  mit großer Effizienz nur in ein Zeeman-Niveau erfolgen darf. Die hohe Effizienz erreicht man durch den Resonator, der nur für ein Niveau die geforderte Resonanzbedingung erfüllt. Die Anregung zwischen dem Grundzustand  $S_{1/2}$  und dem Niveau  $P_{3/2}$  erfolgt durch einen Laser mit einer Wellenlänge von 393 nm, die Kopplung zwischen  $P_{3/2}$  und dem metastabilen Niveau  $D_{5/3}$  wird durch den Resonator erzielt. Gestartet wird immer im  $S_{1/2} m_j = -1/2$  Niveau. Erreicht das Ion den  $D_{5/2}$  Zustand und ist das Photon emittiert, bleibt das System in diesem Zustand bis ein Laser mit einer Wellenlänge von 854 nm das Ion optisch in den  $S_{1/2}$  Zustand pumpt. Der direkte Zerfall von  $D_{5/2}$  nach  $S_{1/2}$  ist für Dipolübergänge verboten und erfolgt auf einer Zeitskala von 1s, das heißt, viel langsamer als der eigentliche Prozess.

Eine weitere Forderung an den Besetzungstransfer stellt die Unterdrückung anderer Emissionsprozesse dar. Im Rahmen der Arbeit wurden zwei Prozesse verglichen, der Ramanprozess und der adiabatische Prozess. Beim Ramanprozess wird der Laser bei 393 nm stark gegenüber der atomaren Übergangsfrequenz verstimmt, damit das Niveau  $P_{3/2}$  kaum besetzt wird. Die hohe Intensität des Anregungslasers produziert eine AC - Stark Verschiebung des  $P_{3/2}$  Niveaus. Für den Fall großer Verstimmung kann man das Zwischenniveau  $P_{3/2}$  adiabatisch eliminieren und erhält somit ein effektives Zweiniveausystem. Die effektive

Rabifrequenz ergibt sich aus dem Produkt der beiden Rabifrequenzen durch die Verstimmung  $\Omega_{\text{eff}} = (\Omega_1\Omega_2/\Delta)$ . Damit die Anregung des effektiven Zwei-Niveau-Systems resonant erfolgt, muss die Frequenz des Resonators mit der Differenz zwischen dem erzeugten AC-Stark verschobenen  $P_{3/2}$  Niveau und dem  $D_{5/2}$  Niveau übereinstimmen. Die effektive spontane Emission ist proportional zur Besetzung des  $S_{1/2}$  Niveaus und lässt sich, durch  $\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma(\Omega/2\Delta)^2$  mit der Rabifrequenz  $\Omega$ , der Verstimmung  $\Delta$  und der spontanen Emissionsrate aus dem  $P_{3/2}$ -Niveau  $\Gamma$ , berechnen. In Analogie zum Zwei-Niveau-System ergibt sich ein vollständiger Besetzungstransfer, wenn die effektive Rabifrequenz wesentlich größer ist als die effektive Spontanemission  $\Omega_{\text{eff}} > \Gamma_{\text{eff}}$ . Durch die Kopplung des Resonators an den zweiten Übergang wird ein zweiter Emissionskanal eingebaut. Für einen vollständigen Besetzungstransfer ist es notwendig, dass die effektive Rabifrequenz  $\Omega_{\text{eff}}$  größer wird als  $\kappa$ , dem Zerfall aus dem Resonator,  $\Omega_{\text{eff}} > \kappa$ . In dem vorgestellten Beispiel ist dies aber nicht möglich, und die Emissionszeit somit von der Rabifrequenz begrenzt, nicht aber von der Finesse des Resonators. Beim adiabatischen Prozess muss die Zwei-Photonenresonanz zwischen dem Laser und dem Resonator erfüllt sein. In diesem Fall kann man das Ion in einem Dunkelzustand präparieren und durch Verändern der Laserleistung einen Besetzungstransfer erzielen. Der Dunkelzustand stellt eine Überlagerung des  $S_{1/2}$  Niveaus und des  $D_{5/2}$  Niveaus dar, das  $P_{3/2}$  Niveau ist in diesem Zustand nicht involviert. Bleibt man während der Wechselwirkungszeit immer im Dunkelzustand, kann das Niveau  $P_{3/2}$  nicht besetzt werden und somit zu keiner spontanen Emission beitragen. Damit dies gewährleistet wird, muss der Prozess langsam genug ablaufen. Die Änderung des Besetzungsverhältnisses muss wesentlich kleiner sein als die Aufspaltung der Energieniveaus.

Der Vergleich der beiden Prozesse zeigt, dass für den idealen Fall von verschwindender Laserlinienbreite und einem unendlich stabilem Resonator, beide Prozesse dieselbe Wahrscheinlichkeit für die Emission eines Photons liefern. Auch die Güte, definiert durch den Anteil an Photonen, die in den Resonator gestreut werden, an der Gesamtzahl der gestreuten Photonen, nähert sich für die beiden Prozesse dem gleichen Wert an, wenn für den Ramanprozess die effektive Spontanemission viel kleiner ist als die effektive Rabifrequenz, und wenn im adiabatischen Fall die adiabatische Bedingung gut erfüllt ist. Inkludiert man in die Rechnung die Linienbreiten des Lasers sowie des Resonators, erkennt man, dass der Ramanprozess stabiler abläuft als der adiabatische Prozess, das heißt, dass der Ramanprozess sowohl eine höhere Emissionswahrscheinlichkeit hat als auch eine höhere Güte liefert.

Für den Ramanprozess wurde mit realistischen Daten eine Hintereinanderausführung mehrerer Pulse simuliert, um eine Intensitätskorrelationsfunktion zu berechnen. Für verschiedene Sequenzlängen wurde  $g^2(\tau)$  gezeichnet. Man erkennt, dass für eine Sequenzlänge von  $50 \mu\text{s}$ , wobei in dieser Zeit auch der Rückpumpimpuls und die Präparation im richtigen Zeeman-Niveau des Niveaus  $S_{1/2}$  beachtet wurden, die Maxima und Minima deutlich größer bzw. kleiner als 1 sind. Dies bedeutet, dass die einzelnen Photonen zeitlich gut getrennt sind, und die Wahrscheinlichkeit zwei Photonen zur selben Zeit zu detektieren wesentlich kleiner als eins ist.

Die gefundenen Parameter für eine optimale Erzeugung einzelner Photonen werden derzeit verwendet, um den experimentellen Aufbau zu optimieren und mit dem Experiment die berechneten Ergebnisse zu überprüfen.

Eine Möglichkeit, die Effizienz des Prozesses zu erhöhen, stellt die Verwendung eines kleineren Resonators dar. Dies wird möglich, wenn man zum Fangen und Speichern der Ionen eine lineare Paulfalle bestehend aus mit Gold beschichteten Aluminiumoxydplättchen einsetzt. Eine solche Falle wird in der Arbeitsgruppe geplant und in Kürze zum Speichern von Ionen verwendet. Der Durchmesser dieser Falle wird im Bereich von einem Millimeter liegen, wodurch sich bei optimalen Verhältnissen das Resonatorvolumen um einen Faktor von 10 verkleinert, und somit die Kopplung an den Resonator um einen Faktor von 3 steigt.

Die Auswirkungen einer höheren Kopplung wurden ebenfalls in dieser Arbeit berechnet.

Die Simulation bestätigt, dass der Einsatz von gespeicherten Ionen zur Erzeugung eines Einphotonenpulses geeignet ist, und dass man mit dem geplanten Aufbau auch für gefangene Ionen in den Bereich der starken Kopplung gelangt. Dabei wurde gezeigt, dass sich mit diesem Aufbau eine Wiederholrate von  $2.5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$  erzeugen lässt.



# Anhang A

## Simulationsprogramm

### A.1 Besetzungstransfer

Im folgenden wird das verwendete Programm für den Ramanprozess wiedergegeben. Das Programm für den adiabatischen Transfer weicht im wesentlichen nur bei der Berechnung der Verstimmung des Resonators vom Ramanprozess ab, und wird deshalb hier nicht niedergeschrieben.

#### A.1.1 Raman - Programm für den Ramanprozess

```
clear
    global z
    abf=input('Pulsart (1 gauß, 2 sin^2 beide, 3 dreieckkon, 4 sin^2 laser, 5 verstimmung: raman-
    resonant,sonst kont) ');          %Wahl der Anstiegsfunktion
    prog='raman';
    Werte                                %Laden der Anfangsparameter Kapitel A.1.5
    D1=D1anf;
    D2=D2anf;
    ramrab=input('Verhältnis von Rabifrequenz12/Verstimmung12 = ');
    l=length(t);
    o2=o2anf;
    o4=o4anf;
    D3=D3anf;
    D1=oanf/ramrab;
    if abf == 1
        D2=D1+delta+oanf^2/(4*D1);
        o1= oanf*gausskon(t,verzpump,pulsdauer);
        cavity = cavityanf;
    elseif abf == 2
        D2=D1+delta+oanf^2/(4*D1);
        o1= oanf*sinq(t,verzpump,pulsdauer);
        cavity=cavityanf*cosq(t,verz854,pulsdauer);
    elseif abf ==3
        D2=D1+delta+oanf^2/(4*D1);
        o1 = oanf*dreieckkon(t,verzpump,pulsdauer);
        cavity = cavityanf;
```

```

elseif abf == 4;
D2=D1+delta+oanf^2/(4*D1);
o1= oanf*sinq(t,verzpump,pulsdauer);
cavity = cavityanf;
elseif abf == 5;
o1= oanf*sinq(t,verzpump,pulsdauer);
cavity = cavityanf;
D1=o1./ramrab;
D2=delta+(D1+sqrt(D1.^2+o1.^2))/2+2*cavity^2*((D1-sqrt(D1.^2+o1.^2))/(o1.^2));
else omega=o1(1)*ones(1,1);
end
if length(D3)<1, D3=D3(1)*ones(1,1); end
if length(o4)<1, o4=o4(1)*ones(1,1); end
if length(D1)<1, D1=D1(1)*ones(1,1); end
if length(o3)<1, o3=o3(1)*ones(1,1); end
if length(D2)<1, D2=D2(1)*ones(1,1); end
if length(o2)<1, o2=o2(1)*ones(1,1); end
if length(o1)<1, o1=o1(1)*ones(1,1); end
if length(cavity)<1, cavity=cavity(1)*ones(1,1); end

                                %HAUPTTEIL - Erzeugung und Berechnung der Dichtematrix
[CC,CC1,A1,A2,A3]=hamilton(L1,L2,kappa);                                %Hamiltonoperator Kapitel A.1.2
L=Liouville(CC,CC1,o1,cavity,o2,o3,o4,D1,D2,D3,B0);                    %Liouvilleoperator Kapitel A.1.3
zeitentwicklung                                                    %Zeitentwicklung Kapi-
tel A.1.4
%Berechnung der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für die Besetzung und Emission
niv2=max(ro4(z+2,:));
Photoemission1=2*pi*2*kappa*ro4(2*z+3,:);
Photoemission2=2*pi*2*kappa*(ro4(2*z+3,:)+ro4(3*z+4,:)+ro4(4*z+5,:));
% 2*pi entspricht der Umrechnung von Kreisfrequenzen in technische
% Frequenzen, 2*kappa entstammt der Definition von kappa.
Verlust1P=2*pi*A1*ro4(z+2,:);
Verlust2P=2*pi*A2*ro4(z+2,:);
Gesamt=2*pi*(A1+A2+A3)*ro4(z+2,:);
emr=real(Photoemission1);
%Wahrscheinlichkeit für die Emission von einem Photon
Pem1=sum(Photoemission1*dt)*100
Pem2=sum(Photoemission2*dt)*100
Verlust=sum(Gesamt*dt)*100 %Alle Spontanzerfälle eingerechnet
adiabbed=niv2;
ausgabe;

```

## A.1.2 Hamilton - Hamiltonoperator

```

function [CC,CC1,A1,A2,A3]=hamilton(L1,L2,kappa)
global i1 i2 E z A4 A5
% Erzeugen der zeitlich konstanten Terme des Liouvilleoperators.
% Es wurde ein Teil der Zeemankomponenten mit verwendet (berücksichtigt
% wurden die drei Zeemanniveaus von D 5/2 mj= - 5/2; -3/2; -1/2
% Dimension der Dichtematrix: 8*8
% Die 8 Zustände sind wie folgt verteilt:

```



```

% Zustand = Niveau
% S 1/2 mj = -1/2 = 1
% P 3/2 mj = -3/2 = 2
% D 5/2 mj = -5/2 = 3
% D 5/2 mj = -3/2 = 4
% D 5/2 mj = -1/2 = 5
% D 5/2 Vakuum-mode = 6
% D 3/2 = 7
% P 1/2 = 8
z=8;
sprintf('%d - Niveausystem',z);
E=eye(z);
b1=E(:,1);b2=E(:,2);b3=E(:,3);b4=E(:,4);b5=E(:,5);b6=E(:,6);b7=E(:,7);b8=E(:,8);
ii=(1:z)'*ones(1,z);
i1=reshape(ii',1,z^2);
i2=reshape(ii,1,z^2);
clear ii

%Zerfallskonstanten
A1=2.15e7; %1.35e8 Zerfallskonstante für den Übergang P 3/2 -> S 1/2 (393nm)/(2*Pi)
A2=1.57e6; %9.9e6 Zerfallskonstante für den Übergang P 3/2 -> D 5/2 (854nm)/(2*Pi)
A3=1.765e5; %1.1e6 Zerfallskonstante für P 3/2 -> D 3/2 (850 nm)/(2*Pi)
eps=1e-4; %ca. Raumwinkel für Zerfall in den Resonator (bei L=19,6mm Länge)
% Zerfälle von P 1/2
A4=2.07e7; %Zerfall nach S 1/2 /(2*pi)
A5=1.68e6; %Zerfall nach D 3/2 /(2*pi)
%Erzeugung der Operatoren für die dissipativen Prozesse
CC1=zeros(z^2,z^2);
C1=A1^0.5*b1*b2'; %Zerfallskonstante für P3/2 -> S1/2
% Der erste Faktor gibt den Anteil der Zerfallsrate für einen bestimmten
% Zeemankanal an.
Die folgenden drei Operatoren wurden im Programm mitverwendet, sind bei genauer Überlegung aber nicht
nötig, da diese Prozesse durch die Kopplung des Resonators an das Atom berücksichtigt werden [47].
C2=(2/3*eps*A2)^0.5*b3*b2'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-5/2 mit 1 mode in Resonator
C3=(4/15*eps*A2)^0.5*b4*b2'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-3/2 mit 1 mode in Resonator
C4=(1/15*eps*A2)^0.5*b5*b2'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-1/2 mit 1 mode in Resonator
C5=(2*L1)^0.5*b1*b1'; %Linienbreite von 393
C6=(2*L2)^0.5*(b3*b3'+b4*b4'+b5*b5'); %Stabilisierung des Resonators
C7=(2*kappa)^0.5*b6*b3'; %Resonator Zerfallskonstante
C12=(2*kappa)^0.5*b6*b4'; %Resonator Zerfallskonstante
C13=(2*kappa)^0.5*b6*b5'; %Resonator Zerfallskonstante
% Kappa times 2 because kappa is the decay of the field, and not of the
% intensity.
C8=((1-eps)*A2)^0.5*b6*b2'; %Zerfall von P 3/2 nach D 5/2
C9=A3^0.5*b7*b2'; %Zerfall von P 3/2 nach D 3/2
C10=A4^0.5*b1*b8'; % Zerfall von P 1/2 nach S 1/2
C11=A5^0.5*b7*b8'; % Zerfall von P 1/2 nach D 3/2
CC=C1'*C1 + C2'*C2 + C3'*C3 + C4'*C4 + C5'*C5 + C6'*C6 + C7'*C7+ C8'*C8 + C9'*C9
+ C10'*C10...
+ C11'*C11 + C12'*C12 + C13'*C13;
CC1=C1(i1,i1).*C1(i2,i2)+C2(i1,i1).*C2(i2,i2)...

```

```

+C3(i1,i1).*C3(i2,i2)+C4(i1,i1).*C4(i2,i2)...
+C5(i1,i1).*C5(i2,i2)+C6(i1,i1).*C6(i2,i2)...
+C7(i1,i1).*C7(i2,i2)+C8(i1,i1).*C8(i2,i2)...
+C9(i1,i1).*C9(i2,i2)+C10(i1,i1).*C10(i2,i2)...
+C11(i1,i1).*C11(i2,i2)+C12(i1,i1).*C12(i2,i2)...
+C13(i1,i1).*C13(i2,i2);

```

### A.1.3 Liouville - Liouvilleoperator

```

function L=Liouville(CC,CC1,l,o1,cavity,o2,o3,o4,D1,D2,D3,B0)
    global i1 i2 E z
    L=zeros(z^2,z^2,1);
    H=zeros(z,z,1);
    g52=cavity;
    g32=0*cavity*sqrt(2/5);
    g12=cavity*sqrt(1/10);
    % Niveaushiftung durch die Zeeman-Aufspaltung
    zee=6/5*0.2227*10^6*B0; % Landre-Faktor*mag.Magneton/Planckkonstante*B-feld Amplitu-
de/(2*pi)
    % Niveau 1: S 1/2
    % Niveau 2: P 3/2
    % Niveau 3: D 5/2 mj -5/2 1 mode
    % Niveau 4: D 5/2 mj -3/2 1 mode
    % Niveau 5: D 5/2 mj -1/2 1 mode
    % Niveau 6: D 5/2 0 mode
    % Niveau 7: D 3/2
    % Niveau 8: P 1/2
    for n=1:l
        H(:,n)=[ D1(n) o1(n)/2 0 0 0 o2(n)/2 0 0;...
        o1(n)/2 0 g52(n) g32(n) g12(n) o4(n)/2 0 0;...
        0 g52(n) D2(n) 0 0 0 0 0;...
        0 g32(n) 0 D2(n)-zee 0 0 0 0;...
        0 g12(n) 0 0 D2(n)-2*zee 0 0 0;...
        o2(n)/2 o4(n)/2 0 0 0 D3(n) 0 0;...
        0 0 0 0 0 o3(n)/2;...
        0 0 0 0 0 o3(n)/2 0 ]-i/2*CC;
        % Verstimmung von H(7,7) (D 3/2) fraglich, da keine Kopplung
        % vorhanden, außer der Restkopplung des Resonators, die aber wie eine Lorentzkurve abfällt.
        Hc(:,n)=H(:,n)';
        L(:,n) = -i*(H(i1,i1,n).*E(i2,i2)-Hc(i2,i2,n).*E(i1,i1))+CC1;
    end
    clear n;

```

### A.1.4 Zeitentwicklung

```

global z
    rodiag = diag([ro(1) ro(2) ro(3) 0 0 0 0],0);
    ro1=reshape(rodiag,z^2,1);
    ro4 = zeros(z^2,1);
    ro4(:,1)=ro1;
    dark(:,1)=[2*cavity(1) 0 -o1(1) 0 0 0 0]/sqrt(o1(1)^2 + 4*cavity(1)^2);

```

```

clear n
for n=2:length(t);
    ro4(:,n)=expm(2*pi*L(:,:,n)*dt)*ro4(:,n-1);
end
clear n
for n=1:length(t)
    roquadrat(:,n)=reshape(ro4(:,n),z,z);
    dark(:,n)=[2*cavity(n) 0 -o1(n) 0 0 0 0]'/sqrt(o1(n)^2 + 4*cavity(n)^2);
end

```

### A.1.5 Hilfsprogramme

#### Werte - Eingabe der Anfangsparameter

```

fprintf('Eingabe in technischen Frequenzen\n')
oanf=1e7;%input('Rabifrequenz = ');
cavityanf=1.5e6;%input('Kopplung an Cavity= ');
o2anf=0e6;%input('Rabifrequenz für Pi-Puls= ');
o3=1e6;
o4anf=0e6;%input('Rabifrequenz für Rückpump = ');
L1=1e4;%input('Laserlinienbreite (393nm)= ');
L2=1e4;%input('Laserlinienbreite (854nm)= ');
D1anf=0e7;%input('Verstimmung (s1/2->p3/2)= ');
D2anf=D1anf;%input('Verstimmung (p3/2->d5/2)= ');
D3anf=0;
delta=1;%input('Differenz der Verstimmungen=');
kappa=0e4;%input('Kappa= ');%4e4
tend=1000;%input('Zeitschritte (~1000)= ');
t0=[1:tend];
ro=[1 0 0];%input('Anfangsbesetzung= ');
dt=1e-7;%input('Zeitauflösung= ');
pulsdauer=1e-7;%input('Pulsdauer=');
verzump=0e-6;
verz854=0e-6;
t=t0*dt;
B0=4; % [Gauss] B-Feld am Ort des Atoms
o2=o2anf;

```

#### sinq - Sinusquadratfunktion

```

function y=sinq(t,verz,tau)
    for n=1:length(t)

        if t(n) < verz
            y(n) = 0;
        elseif t(n) >= verz
            if t(n) <= verz+tau
                y(n)=sin(pi/2*(t(n)-verz)/tau).^2;
            else
                y(n)=1;
            end
        end
    end

```

```
end
end
```

### ausgabe

```
% Anteil der Resonatormode an der Gesamtzahl der gestreuten Photonen
resonator1 = Pem1/(Pem2+Verlust)*100
resonator2 = Pem2/(Pem2+Verlust)*100
zeitdauer = 1%zeitspanne(t,Photoemission1)
grenze=log10(oanf/pulsdauer^2);
format long
aus=real([grenze Pem1 min(adiabbed) resonator1 zeitdauer])
save my_data.out aus -ASCII
format short
figure(1)
clf
set(0,'DefaultAxesLineStyleOrder',{'-',':','-.-','-.'})
set(0,'DefaultAxesColorOrder',[4,4,4])
subplot(611)
axis off
str(1,:)={prog ,abf};
str(2,:)={'Rabifrequenz/(2*pi): ',oanf};
str(3,:)={'Kopplung des Resonators/(2*pi): ',cavityanf};
str(4,:)={'Laser (393)/(2*pi): ',L1(1)};
str(5,:)={'Laser (854)/(2*pi): ',L2(1)};
str(6,:)={'Verstimmung Niveau 1/(2*pi): ',max(D1)};
str(7,:)={'Verstimmung Niveau 2/(2*pi): ',max(D2)};
str(8,:)={'Differenz der Verstimmungen (ohne raman): ',delta};
str(9,:)={'Kappa/(2*pi): ',kappa};
str(10,:)={'Zeiteinheit [s]',dt};
str(11,:)={'Pulsdauer',pulsdauer};
str(12,:)={'Emmission für sigma- in [%]',Pem1};
str(13,:)={'Gesam. Emis in Resonator [%]',Pem2};
str(14,:)={'Verlustphotonen in [%]',Verlust};
str(15,:)={'Güte nur sigma- [%]',resonator1};
str(16,:)={'Güte Resonator/Gesamtverlust [%]',resonator2};
str(17,:)={'Emissionszeit (1%-1%) [µs]',zeitdauer};
text(.00, .6,str(1:8,1),'FontSize',7);
text(.35, .6,str(1:8,2),'FontSize',7);
text(.51, .6,str(9:17,1),'FontSize',7);
text(.86, .6,str(9:17,2),'FontSize',7);
subplot(612);
plot(t,ro4(1,:),'-',t,ro4(z+2,:),'-.',t,ro4(2*z+3,:),'.',...
,t,ro4(5*z+6,:),':',t,ro4(6*z+7,:),'-.', 'MarkerSize',0.1);
legend('Besetzung von S 1/2','Besetzung von P 3/2 ','Besetzung von D 5/2 mode',...
'Besetzung von D 5/2 vacuum mode','Besetzung von D 3/2')
xlabel('Zeitachse')
ylabel('Besetzung')
subplot(616);
plot(t,o1,t,cavity,t,o4);
legend('Pumpimpuls','Kopplung an Resonator','Rückpumpimpuls 854')
```

```

%title('Pulsform')
xlabel('Zeitverlauf des Laserpulses')
ylabel('Rabifrequenz')
subplot(613);
plot(t,Photoemission1*10^-6,t,Verlust1P*10^-6,':',t,Photoemission2*10^-6,':',t,Verlust2P*10^-
6,'o',t,Gesamt*10^-6,'+', 'MarkerSize',0.1);
% Faktor 10^-6 damit die Rate in  $\mu\text{s}$  angegeben wird.
% Die Rate ist die Besetzung des jeweiligen Zustandes mal der
% Zerfallskonstante. -> sie gibt die Wahrscheinlichkeit für die
% Photonenemission pro Zeit an.
legend('Photoemission','Verlust von P 3/2 (393nm)','Verlust von P 3/2 (854)','Verlust')
xlabel('Zeit (s)')
ylabel('Emissionsrate in 1/ $\mu\text{s}$ ')
subplot(615)
plot(t,adiabbed)
ylabel('Adiabatische Bedingung, Sollwert = 1')
subplot(614)
plot(t,ro4(2*z+3,:),t,ro4(3*z+4,:),'.',t,ro4(4*z+5,:),'-.', 'MarkerSize',0.1)
xlabel('Zeit [s]')
ylabel('Besetzung D 5/2')
legend('Niveau mj=-5/2','Niveau mj=-3/2','Niveau mj=-1/2')

```

## A.2 Einphotonenpuls

### A.2.1 Photonenpuls

```

% Program zur Berechnung der Intensitätskorrelationsfunktion
clear
global z il i2
prog='raman'; %Verwendet wird der Ramanprozess
Werte %Einlesen der Anfangsbedingungen Kapitel A.2.5
Ds=Dsanf;
Dcav=Dcavanf;
% Erzeugung der Pulssequenz
[sequ,whr,anzpkt] = Pulssequenz(t,dauer,wartez,dt);
od5p=od5panf*sequ;
Dp1=sequ*max(Dcav);
ospsequ1 = ospanf*sinq(t,verzpump,pulsdauer);
ospsequ1 = [ospsequ1(1:ceil((wartez-verzpump)/dt)) zeros(1,floor(verzpump/dt))];
ospsequ1 = [ospsequ1 zeros(1,ceil(dauer/dt))];
ospsequ = [];
for n=1:(whr+1)
    ospsequ = [ospsequ1 ospsequ];
end
clear n
osp = ospsequ(1:length(t)); %Pulssequenz für 393 nm
cavity = cavityanf; % Pulssequenz für den Resonator
Ds=osp./ramrab; % Verstimmung des Lasers 393 nm
Dsr=max(Ds);
ospr=max(osp);

```

% Der Resonator bleibt auf einer bestimmten Länge gelocked. Verschwindet der Pumplaser (393 nm) verschwindet auch seine induzierte AC-Stark-Verschiebung. Es existiert keine zwei Phontonresonanz mehr. Außerdem ist der Resonator weit gegen den atomaren Übergang Verstimmt => kein Licht wird in den Reonstor gestreut. Verstimmung des Resonators.

```
%Berechnung der Resonatorverstimmung
Dcav=delta+(Dsr+sqrt(Dsr^2+ospr^2))/2+cavity.^2*((Dsr-sqrt(Dsr^2+ospr^2))/(2*ospr^2));
Dp1=sequ*max(Dcav);
if length(Ds)<1, Ds=Ds(1)*ones(1,1); end
if length(osp)<1, osp=osp(1)*ones(1,1); end
if length(Dp1)<1, Dp1=Dp1(1)*ones(1,1); end
if length(od5p)<1, od5p=od5p(1)*ones(1,1); end
if length(Dcav)<1, Dcav=Dcav(1)*ones(1,1); end
if length(cavity)<1, cavity=cavity(1)*ones(1,1); end
```

%Hauptteil - Erzeugung und Berechnung der Dichtematrix

```
[CC,CC1,A1,A2]=hamilton(L1,L2,kappa,z); %Hamiltonoperator Kapitel A.2.2
L=Liouville(CC,CC1,l,osp,cavity,od5p,Ds,Dp1,Dcav,B0); %Liouvilleoperator Kapitel A.2.3
zeitentwicklung %Zeitentwicklung Kapitel A.2.4
%Berechnung der Wahrscheinlichkeiten
```

```
Photoemission1=2*pi*2*kappa*(ro(3*z+4,:)+ro(4*z+5,:)+ro(5*z+6,:)+ro(6*z+7,:)+ro(7*z+8,:)+ro(8*z+9,:));
% 2*pi entspricht der Umrechnung von Kreisfrequenzen in technische
% Frequenzen, 2*kappa rührt aus der Definition von kappa her.
Gesamtver=2*pi*(A1+A2)*(ro(z+2,:)+ro(4*z+5,:)+ro(7*z+8,:));
emr=real(Photoemission1);
%Wahrscheinlichkeit für die Emission von einem Photon
Pem1=sum(Photoemission1((anzpkt+1):(2*anzpkt))*dt)*100;
Verlust=sum(Gesamtver((anzpkt+1):(2*anzpkt))*dt)*100; %Alle Spontanzerfälle eingerechnet
%Korrelationsfunktion
a=diag([1 1 1 sqrt(2) sqrt(2) sqrt(2)],3);
adag=a';
for int=1:l
    rosqt(:,int)=reshape(ro(:,int),z,z);
    normt(int)=trace(a*rosqt*adag);
    rot(:,int)=a*rosqt*adag;
    zae2(int)=trace(a*a*rosqt*adag*adag);
end
norm=sum(normt)/l;
ausgabe;
```

%Berechnung der Zwei-Zeiten-Korrelationsfunktion

```
anzg2vt=anzpkt;
schrittweite=round(anzpkt/(anzg2vt-1));
for i=1:anzg2vt
    time(i)=schrittweite*(i-1)+anzpkt;
    zeitpunkt(i)=time(i)*dt
clear ro
ro=zeros(z^2,1);
ro(:,1)=reshape(rot(:,time(i)),z^2,1);
L=Liouville(CC,CC1,l,osp,cavity,od5p,Ds,Dp1,Dcav,B0);
```

```

zeitentwicklung;
rosqar(:,:,:)=reshape(ro(:,:,),z,z,1);
for m=(time(i)-anzpkt+1):l
zaeler(i,(m-time(i)+anzpkt))=trace(a*rosqar(:,:,m)*adag);
G2vttau(i,(m-time(i)+anzpkt))=zaeler(i,(m-time(i)+anzpkt));
end
end
g2vtmittel=sum(G2vttau)/anzg2vt;
plot(t,g2vtmittel,t,g2vtmittel/norm^2)
xlabel('g2(\tau)')
ylabel('Normiert')
% Symmetriekontrolle
[c,maxi]=max(g2vtmittel);
if maxi<ceil(length(t)/2)
zahl=maxi;
else zahl=length(t)-maxi;
end
for i=1:zahl
sym(i)=2*(g2vtmittel(maxi-i)-g2vtmittel(maxi+i))/g2vtmittel(maxi-i)+g2vtmittel(maxi+i);
end
figure(2)
plot(sym)
xlabel('Abweichung vom Maximum [dt]');
xlabel('Abstand vom Maximum [dt]');
title('Kontrolle der Symetrie der g2-Funktion')
ylabel('Abweichung von der Symmetrie')

```

### A.2.2 Hamilton - Hamiltonoperator

```

function [CC,CC1,A1,A2]=hamilton(L1,L2,kappa,s)
global i1 i2 E z A4 A5
% Erzeugen der zeitlich konstanten Terme des Liouvilleoperators
% Zustand = Niveau
% ohne Mode im Resonator
% S 1/2 mj = -1/2 = 1
% P 3/2 mj = -3/2 = 2
% D 5/2 mj = -5/2 = 3
% mit einer Mode im Resonator:
% S 1/2 mj = -1/2 = 4
% P 3/2 mj = -3/2 = 5
% D 5/2 mj = -5/2 = 6
% mit zwei Moden im Resonator:
% S 1/2 mj = -1/2 = 7
% P 3/2 mj = -3/2 = 8
% D 5/2 mj = -5/2 = 9
sprintf('%d - Niveausystem',z);
E=eye(z);
b1=E(:,1);b2=E(:,2);b3=E(:,3);b4=E(:,4);b5=E(:,5);b6=E(:,6);b7=E(:,7);
b8=E(:,8);b9=E(:,9);
ii=(1:z)*ones(1,z);
i1=reshape(ii',1,z^2);

```

```

i2=reshape(ii,1,z^2);
clear ii
%Zerfallskonstanten
A1=2.25e7; %1.35e8 Zerfallskonstante von Übergang P 3/2 -> S 1/2 (393nm)/(2*Pi) 1 MHz
zusätzlich, um Niveau D 3/2 herausnehmen zu können
A2=1.57e6; %9.9e6 Zerfallskonstante für Übergang P 3/2 -> D 5/2 (854nm)/(2*Pi)
eps=1e-4; %ca. Raumwinkel für Zerfall in Resonator (bei L=19,6mm Länge)
% A4=2.07e7; %Zerfall von P 1/2 nach S 1/2 /(2*pi)
% A5=1.68e6; %Zerfall von P 1/2 nach D 3/2 /(2*pi)
% % kappa als Variable definiert
CC1=zeros(z^2,z^2);
% Zerfälle
C1=A1^0.5*b1*b2'; %Zerfallskonstante für P3/2 -> S1/2
% Der erste Faktor gibt den Anteil der Zerfallsrate für einen bestimmten
% Zeemankanal an.
C2=(2/3*A2)^0.5*b3*b2'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-5/2 mit 0 mode
in Resonator

% Zerfälle innerhalb 1 mode
C3=A1^0.5*b4*b5'; %Zerfallskonstante für P3/2 -> S1/2
C4=(2/3*A2)^0.5*b6*b5'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-5/2
% Zerfälle der Resonatormode
C5=(2*kappa)^0.5*b1*b4'; %Resonator Zerfallskonstante
C6=(2*kappa)^0.5*b2*b5'; %Resonator Zerfallskonstante
C7=(2*kappa)^0.5*b3*b6'; %Resonator Zerfallskonstante
% Kappa times 2 because kappa is the decay of the field, and not of the
% intensity.

% Atom mit 2 Photonen
C8=A1^0.5*b7*b8'; %Zerfallskonstante für P3/2 -> S1/2
C9=(2/3*A2)^0.5*b9*b8'; %Zerfall von P3/2 mj=-3/2 nach D 5/2 mj=-5/2
% Zerfälle der Resonatormode
C10=(2*kappa)^0.5*b4*b7'; %Resonator Zerfallskonstante
C11=(2*kappa)^0.5*b5*b8'; %Resonator Zerfallskonstante
C12=(2*kappa)^0.5*b6*b9'; %Resonator Zerfallskonstante

% Es wird der Anteil der Emission der spontan in den Resonator geht
% vernachlässigt. dieser liegt in der Größenordnung von 10^-4.
C13=(2*L1)^0.5*(b1 * b1' + b4 * b4' + b7 * b7'); %Linienbreite von 393
C14=(2*L2)^0.5*(b3*b3' + b6*b6' + b9*b9'); %Stabilisierung der Resonator
CC=C1'*C1 + C2'*C2 + C3'*C3 + C4'*C4 + C5'*C5 + C6'*C6 +C7'*C7 + C8'*C8 +
C9'*C9...
+C10'*C10 + C11'*C11 + C12'*C12;

CC1 = C1(i1,i1).*C1(i2,i2) + C2(i1,i1).*C2(i2,i2) + C3(i1,i1).*C3(i2,i2) + C4(i1,i1).*C4(i2,i2)...
+ C5(i1,i1).*C5(i2,i2) + C6(i1,i1).*C6(i2,i2) + C7(i1,i1).*C7(i2,i2) + ...
C8(i1,i1).*C8(i2,i2) + C9(i1,i1).*C9(i2,i2) + C10(i1,i1).*C10(i2,i2) + C11(i1,i1).*C11(i2,i2) +
C12(i1,i1).*C12(i2,i2);

```



### A.2.3 Liouville - Liouvilleoperator

```

function L=Liouville(CC,CC1,l,osp,cavity,od5p,Ds,Dp1,Dcav,B0);
    global i1 i2 E z
    L=zeros(z^2,z^2,1);
    H=zeros(z,z,1);
    % Kopplungstärken des Resonators an das Atom
    g52=cavity;
    % Kopplung des Rückpumpers mit Zeeman-Aufspaltung
    od5p52=od5p;
    % Verstimmung durch die Zeeman-Aufspaltung
    zee=6/5*0.2227*10^6*B0; % Landre-Faktor*mag.Magneton/Planckkonstante*B-feld Amplitu-
de/(2*pi)
    % alle ohne mode
    % Niveau 1: S 1//2
    % Niveau 2: P 3/2
    % Niveau 3: D 5/2 mj -5/2
    % Niveau 4: D 5/2 mj -3/2
    % Niveau 5: D 5/2 mj -1/2
    % Niveau 6: D 3/2
    % Niveau 7: P 1/2
    n=1:l;
    % 393 nm
    H(1,2,n)=osp(n)/2;
    H(4,5,n)=osp(n)/2;
    H(7,8,n)=osp(n)/2;
    % cavity
    H(2,6,n)=g52(n);
    H(5,9,n)=g52(n);
    % Rückpumper:
    H(2,3,n)=od5p52(n)/2;
    H(5,6,n)=od5p52(n)/2;
    H(8,9,n)=od5p52(n)/2;
    for n=1:l
        H(:,n)=H(:,n)+H(:,n)';
        H(:,n)=H(:,n)+diag([Ds(n) 0 0 Ds(n) Dp1(n) Dcav(n) Ds(n) Dp1(n) Dcav(n)],0)-i/2*CC;
        Hc(:,n)=H(:,n)';
        L(:,n) = -i*(H(i1,i1,n).*E(i2,i2)-Hc(i2,i2,n).*E(i1,i1))+CC1;
    end
    clear n;

```

### A.2.4 Zeitentwicklung

```

global z
clear n
for n=2:length(t);
    ro(:,n)=expm(2*pi*L(:,n)*dt)*ro(:,n-1);
end
clear n

```

## A.2.5 Hilfsprogramme

### Werte - Einlesen der Anfangsbedingung

```
fprintf('Eingabe in technischen Frequenzen\n')
ospanf = 1e7;%input('Rabifrequenz = ');
cavityanf = 1.5e6;%input('Kopplung an Cavity= ');
od5panf = 1e7;%input('Rabifrequenz für Rückpump = ');
L1=1e4;%input('Laserlinienbreite (393nm)= ');
L2=1e4;%input('Laserlinienbreite (854nm)= ');
Dsanf=0e7;%input('Verstimmung (s1/2->p3/2)= ');
Dcavanf=Dsanf;%input('Verstimmung (p3/2->d5/2)= ');
Dp1anf=0;
delta=1e4;%input('Differenz der Verstimmungen=');
kappa=4e4;%input('Kappa= ');%4e4
tend=200;%input('Zeitschritte (~1000)= ');
t0=[1:tend];
dt=5e-6;%input('Zeitauflösung= ');
pulsdauer=1e-6;%input('Pulsdauer=');
verzpump=1e-6;
verz854=0e-6;
t=t0*dt;
B0=1; % [Gauss] B-Feld am Ort des Atoms
z=9;
l=length(t);
ro = zeros(z^2,l);
ro(1,1)=1;
wartezeit=30e-5;%input('Wartezeit bis zum nächsten Puls = ');
dauer=3e-7;%input('Dauer des Rückpumps = ');
ramrab=.01;%input('Verhältnis von Rabi/Verstimmung = ');
```

### Pulssequenz - Erzeugung der Pulssequenz

```
function [sequ,whrate,anzpkt] = Pulssequenz(t,dauer,wartezeit,dt)
whrate=ceil(t(length(t))/(dauer+wartezeit));
warte1=zeros(1,ceil(wartezeit/dt));
dauer1=ones(1,ceil(dauer/dt));
anzpkt=length(warte1)+length(dauer1);
sequ1 = [warte1 dauer1];
sequ=[];
for n=1:whrate
sequ=[sequ1 sequ];
end
sequ=sequ(1:length(t));
```

# Literaturverzeichnis

- [1] COHEN-TANNOUDJI C., DIU B., LALOË F., Quantenmechanik I Walter de Gruyter (1997)
- [2] COMPTON A. H., HUBBARD J. C., Phys. Rev. **23**, 439 (1924)
- [3] HANBURY BROWN R., TWISS R. Q., Correlation between Photons in two coherent beams of light, Nature **177**, 27 (1956)
- [4] CARMICHAEL H. J., WALLS D. F., J. Phys. B: At. Mol. Phys. **9** 1199 (1976)
- [5] STOLER D., Photon antibunching and Possible Ways to Observe it, Phys. Rev. Lett. **33**, 23 (1974)
- [6] KIMBLE H. J., DAGENAIS M., MANDEL L., Photon Antibunching in Resonanz Fluorescence Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977)
- [7] BOUWMEESTER D., EKERT A., ZEILINGER A. (Hrsg), The Physics of Quantum Information, Springer, Berlin 2000
- [8] KNILL E., LAFLAMME R., MILBURN G. J., A scheme for efficient quantum computation with linear optics, Nature **409**, 46 (2001)
- [9] MUNDT A. B., KREUTER A., BECHER C., LEIBFRIED D., ESCHNER J., SCHMIDT-KALER F., BLATT R., Coupling a Single Atomic Quantum Bit to a High Finesse Optical Cavity, Phys. Rev. Lett. **89**, 103001 (2002)
- [10] KRÄUTER Axel, Doktorarbeit an der Universität in Innsbruck, in Arbeit
- [11] RUSSO Carlos, Dissertation Universität Innsbruck, in Arbeit
- [12] IMAMOGLU A., YAMAMOTO Y., Turnstile Device for Heralded Single Photons: Coulomb Blockade of Electron and Hole Tunneling in Quantum Confined p-i-n Heterojunctions, Phys. Rev. Lett. **72**, 210 (1994)
- [13] KIM J., BENSON O., KAN H., YAMAMOTO Y. A single-photon turnstile device, Nature **397**, 500 (1999)
- [14] MICHLER P., BECHER C., Photonen auf Bestellung, Phys. Blätter **57**,55 (2001)
- [15] MICHLER P. KIRAZ A., BECHER C., SCHOENFELD W. V., PETROFF P. M., LIDONG ZHANG, HU E., IMAMOGLU A., A Quantum Dot Single-Photon Turnstile Device, Science **290**, 2282 (2000)
- [16] SANTORI C., FATTAL D., VUCKOVIC J., SOLOMON G. S., YAMAMOTO Y., Indistinguishable photons from a single-photon device, Nature **419**, 594 (2002)

- [17] YUAN Z., KARDINAL B. E., STEVENSON R. M., SHIELDS A. J., LOBO C. J., COOPER K., BEATTIE N. S., RITCHIE D. A., PEPPER M., Elektrically Driven Single-Photon Source, *Science* **295**, 102 (2002)
- [18] KURTSIEFER C., MAYER S., ZARDA P., WEINFURTER H., Stable Solid-State Source of Single Photons, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 290 (2000)
- [19] BRUNEL C., LOUNIS B., TAMARAT P., ORRIT M., Triggered Source of Single Photons based on Controlled Single Molecule Fluorescence, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2722 (1999)
- [20] COHEN-TANNOUDJI, Atom-photon interactions : basic processes and applications, New York, NY: Wiley, 1992
- [21] PARKINS A. S., MARTE P., ZOLLER P., Synthesis of arbitrary quantum states via adiabatic transfer of Zeeman coherence, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3095–3098 (1993)
- [22] KUHN A., Controlled generation of single photons from a strongly coupled atom-Resonator system, *Appl. Phys. B* **69**, 373 (1999)
- [23] LAW C. K., KIMBLE H. J., Deterministic generation of a bit-stream of single-photon pulses, *Jour. Mod. Opt.* V. **44** Nr 11/12, 2067-2074 (1997)
- [24] MUNDT Andreas Burghard, Resonator QED with Single Trapped  $\text{Ca}^+$ -Ions, Dissertation Universität Innsbruck 2003
- [25] PAUL H., Photonen, Eine Einführung in die Quantenoptik, Teubner Stuttgart 1995.
- [26] OBERST, Hilmar Resonance fluorescence of single Barium ions, Innsbruck (Dipl.) 1999
- [27] DOHERTY, A. C., Effects of motion in Resonator QED 2003
- [28] GARDINER, Crispin W., ZOLLER, Peter, Quantum Noise, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2nd edition 2000
- [29] LOUDON, R., The Quantum Theory of Light, Oxford University Press, 2nd edition 1983
- [30] B. W. SHORE, The theory of coherent atomic excitation, John Wiley & Sons Inc 1990
- [31] YAMAMOTO Y., IMAMOGLU A., mesoscopic quantum optics, John Wiley & Sons 1999
- [32] MAYER-KUCKUK T., Atomphysik B. G. Teubner Stuttgart 1994 4. Auflage
- [33] FIDIO C. Di, MANISCALO S., VOGEL W., MESSINA A., Resonator QED with a trapped ion in a leaky Resonator, *Phys. Rev. A*, V **65**, 33825 (2002)
- [34] MEYSTRE P., SARGENT M., Elements of Quantum Optics, Springer-Verlag 1998
- [35] BERGMANN K., THEUER H., SHORE B. W., Coherent population transfer among quantum states of atoms and molecules, *Rev Mod. Phys.*, V **70**, 1003 (1998)
- [36] PACHOS K. J., BEIGE A., Decoherence-free dynamical and geometrical entangling phase gates, *Quantum Physics*, abstract quant-ph/0309180(2003)
- [37] FEWELL M. P., Coherent Population Transfer among Three States, *Aust. J. Phys.* **50**, 281 (1997)

- [38] KUKLINSKI J. R., Adiabatic population transfer in a three-level system driven by delayed laser pulses, *Phys. Rev. A* **40**, 6741 (1989)
- [39] MESSIAH, A., *Quantum Mechanics*, North - Holland/ Elsevier Science, New York 1962
- [40] PAUL W., Quadrupole mass filter, *Z. Naturforsch. A* **8**, 448 (1953)
- [41] GHOSH P. K., *Ion traps*, Clarendon Press 1995
- [42] MARCH E. Raymond, TODD John F., *Practical aspects of Ion trap mass spectrometry* CRC Press, 1995
- [43] GULDE Stephan, *Experimental realization of quantum gates and the Deutsch-Josza algorithm with trapped  $^{40}\text{Ca}^+$ -ions*, Dissertation Universität Innsbruck 2003
- [44] ROOS Christian F., *Controlling the quantum state of trapped ions*, Dissertation Universität Innsbruck 2000
- [45] DIEDRICH F., BERGQUIST J. C., WAYNE M. ITANO, WINELAND D. J., Laser-cooling to the Zero-Point of Motion, *Phys. Rev. Lett.* V **62**, 403 (1989)
- [46] LEIBFRIED D., BLATT R., MONROE C., WINELAND D., Quantum dynamics of single trapped ions, *Rev. Mod. Phys.* V **75**, 281 (2003)
- [47] ALSING P. M., CARDIMONA D. A., CARMICHAEL H.J., Suppression of fluorescence in a lossless cavity, *Phys. Rev. A* **45**, 1793 (1992)
- [48] JAMES D.F.V., Quantum dynamics of cold trapped ions with application to quantum computation, *Appl. Phys B* **66**, 181 (1998)
- [49] BARTON P. A., DONALD C. J. S., LUCAS D. M., STEVENS D. A., STEANE A. M., STACEY D. N., Measurement of the lifetime of the  $3d^2D_{5/2}$  state in  $^{40}\text{Ca}^+$ , *Phys. Rev. A* **62**, 032503 (2000)
- [50] SALEH Bahaa E. A., TEICH Malvin Carl, *Fundamentals of Photonics*, John Wiley & sons 1991
- [51] SIEGMAN Anthony E., *Lasers*, University Science Books 1986
- [52] COWAN Robert D., *The theory of atomic structure and spectra*, University of California press 1981
- [53] BERMAN Paul R. *Resonator Quantum Electrodynamics*, Academic Press 1994
- [54] CARMICHAEL H. J., BRECHA R. J., RAIZEN M. G., KIMBLE H. J., Subnatural linewidth averaging for coupled atomic and Resonator-mode oscillators, *Phys. Rev. A* **40**, 5516 (1989)
- [55] LUGIATO A. L., Theory of optical bistability, *Prog. Opt.* **21**, 71 (1984)
- [56] LAINE T. A., STENHOLM S., Adiabatic processes in three-level systems, *Phys. Rev. A* **53**, 2501 (1996)
- [57] LIAW S., Ab initio calculations of the lifetime of 4p and 3d levels of  $\text{Ca}^+$ , *Phys. Rev. A* **51**(3), R 1723 (1995)

- [58] JIAN JIN and CHURCH D. A., Precision lifetimes for the  $\text{Ca}^+$   $4p\ ^2P$  levels: Experiment challenges theory at the 1% level, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3213 (1993)
- [59] GERRY Christopher C., EBERLY J. H., Dynamics of a Raman coupled model interacting with two quantized Resonator fields, *Phys. Rev. A* **42**, 6805 (1990)
- [60] ROHDE B. H., Experimente zur Quanteninformationsverarbeitung in einer linearen Ionenfalle, Dissertation Universität Innsbruck 2001
- [61] CARMICHAEL H.J., *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, Springer Verlag 1999
- [62] BECHTER W., Diplomarbeit Universität Innsbruck 1998
- [63] THALHAMMER G., Diplomarbeit Universität Innsbruck 1999
- [64] NÄGERL H. C., Ion Strings for Quantum Computation, Doktorarbeit Universität Innsbruck (1998)
- [65] DREVER R. W. P., HALL J. L., KOWALSKI F. V., HOUGH J., FORD G. M., MUNLEY A. J., WARD H., Laser Phase and Frequency Stabilisation Using an Optical Resonator, *Appl. Phys. B* **31**, 97, (1983)

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei alljenen bedanken, die mir das Erstellen dieser Arbeit ermöglicht haben und mich während des Entstehungsprozesses unterstützt haben. Allen voran gilt mein Dank Herrn Prof. Rainer Blatt für die Aufnahme in seiner Arbeitsgruppe. Mit dem gestellten Thema erlangte ich einen ersten Einblick in die Welt der Quantenoptik. Ein besonderer Dank gebührt meinem Betreuer Christoph Becher. Mit viel Geduld führte er mich durch die Arbeit. Dabei verstand er es vorzüglich die experimentellen Ergebnisse im Vordergrund zu halten. Er zeigte mir wie die theoretischen Vorhersagen der Quantenoptik zu interpretieren sind, damit diese mit dem Experiment verglichen werden können. Jürgen Eschner möchte ich für die Unterstützung beim Programmieren und die Diskussionen für die Interpretation der Ergebnisse danken.

Ich möchte mich auch bei Carlos Russo für die vielen Diskussionen über Resonatorvolumen, Finesse und Kopplungsstärke des Resonators bedanken. Durch ihn hatte ich immer einen guten Einblick über die experimentellen Möglichkeiten und die aktuellen Parameter des neuen Resonators. Mein Dank gilt aber auch allen anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, die mir mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Ein besonderer Dank gilt meinen Freunden, die es immer wieder schafften mich auf den Boden der Realität zurückzuholen. Während der unzähligen Bergtouren hatte ich die Gelegenheit abzuschalten und neue Energie zu sammeln. Besonders in der Endphase der Arbeit motivierte mich Maria, was mir das fertigstellen der Arbeit erleichterte. Auch meinen Eltern möchte ich für die Unterstützung während des Studiums und der kulinarischen Verköstigung danken.