

# **Aufbau eines frequenzvervierfachten Lasersystems zum Coulomb-Kühlen von Magnesium Ionen**

**Diplomarbeit**

am Institut für Experimentalphysik  
Prof. Dr. Rainer Blatt  
Fakultät für Mathematik, Informatik und Physik  
Universität Innsbruck

von

**Lukas An der Lan**

Oktober 2008



# Abstract

Spectroscopy was and is still a very important and vital field of research in physics. Today, spectroscopy provides essential knowledge to our understanding of atomic and molecular physics. It's an exciting and dynamic field of research, which will keep physicists busy for many more years.

The goal of the described project is precision spectroscopy of atomic and molecular ions with complicated level structure. In this work, the design, setup and performance of a laser system for cooling of Magnesium ions in a Paul trap is described. We plan to use  $^{25}\text{Mg}^+$  to sympathetically cool the ions of interest. The lasersystem consists of an infra-red fiber laser and two cascaded frequency doubling stages to create UV light at  $\lambda \approx 280 \text{ nm}$ . This light is used to cool Magnesium ions. In addition, it can be used to prepare the initial state and to read out the state of the ions of interest. The development of the setup is necessary because there is no commercial laser system available that provides sufficient power and small enough linewidth in this wavelength range.



# Zusammenfassung

Spektroskopie war und ist immer noch ein äußerst wichtiges Teilgebiet der Physik. Auch heute noch steuert die Spektroskopie wesentliche Bestandteile zu unserem Verständnis der Atom- und Molekülphysik bei. Es handelt sich nach wie vor um ein spannendes und dynamisches Forschungsgebiet, welches Physiker noch lange beschäftigen wird.

Das Ziel des beschriebenen Projektes ist die Durchführung von Präzisionsspektroskopie an atomaren und molekularen Ionen mit einer komplizierten Niveaustuktur. In dieser Arbeit werden das Design, der Aufbau und die Charakteristika eines Lasersystems zum Kühlen von Magnesium Ionen in einer Paulfalle vorgestellt. Wir planen,  $^{25}\text{Mg}^+$  zum Coulomb-Kühlen der zu untersuchenden Ionen zu verwenden. Das Lasersystem besteht aus einem infrarotem Faserlaser und zwei nachfolgenden Verdoppelungseinheiten zum Erzeugen von UV Licht bei  $\lambda \approx 280 \text{ nm}$ . Dieses Licht wird zum Kühlen der Magnesium Ionen benutzt. Zusätzlich kann das Kühlion benutzt werden um den Anfangszustand des untersuchten Ions zu präparieren und dessen Zustand nach der Spektroskopie auszulesen. Die Entwicklung dieses Aufbaus ist notwendig, da es keine kommerziellen Lasersysteme mit ausreichend Leistung und hinreichend geringer Linienbreite in diesem Wellenlängenbereich gibt.

# Physikalische Konstanten

Name	Symbol	Wert	Einheit
Lichtgeschwindigkeit	$c_0$	$2.99792458 \cdot 10^8$	$\text{m s}^{-1}$
Boltzmann Konstante	$k_B$	$1.3806503(24) \cdot 10^{-23}$	$\text{J K}^{-1}$
Planck Konstante	$h$	$6.62606876(52) \cdot 10^{-34}$	$\text{J s}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.054571596(82) \cdot 10^{-34}$	$\text{J s}$
Bohr Magneton	$\mu_B$	$9.27400899(37) \cdot 10^{-23}$	$\text{J T}^{-1}$
Bohr Radius	$r_B$	$5.291772108(18) \cdot 10^{-11}$	$\text{m}$
Vakuum Permittivität	$\epsilon_0$	$8.854187817 \dots \cdot 10^{-12}$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$
Vakuum Permeabilität	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\text{V s A}^{-1} \text{m}^{-1}$
Elementarladung	$e$	$1.602176486(40) \cdot 10^{-19}$	$\text{C}$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Frequenzverdopplung</b>	<b>13</b>
2.1	Nichtlineare Optik . . . . .	13
2.1.1	Grundlagen . . . . .	13
2.1.2	Die nichtlineare Wellengleichung . . . . .	14
2.2	Theorie zur Frequenzverdopplung . . . . .	16
2.2.1	Die gekoppelten Wellengleichungen . . . . .	17
2.2.2	Spezialfall der Frequenzverdopplung . . . . .	19
2.2.3	Phasenanpassung . . . . .	21
2.3	Optimierung der Leistung . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Der Laser Aufbau</b>	<b>29</b>
3.1	Resonatortheorie . . . . .	29
3.2	Der IR-VIS Resonator . . . . .	34
3.2.1	Kristallparameter . . . . .	34
3.2.2	Resonatorgeometrie . . . . .	36
3.2.3	Messung der Verluste . . . . .	36
3.2.4	Ausgangsleistung . . . . .	37
3.2.5	Temperaturabhängigkeit der Phasenanpassungsbedingung . . . . .	38
3.3	Der VIS-UV Resonator . . . . .	40
3.3.1	Kristallparameter . . . . .	40
3.3.2	Astigmatismuskompensation . . . . .	41
3.3.3	Resonatorgeometrie . . . . .	42
3.3.4	Messung der Verluste . . . . .	42
3.3.5	Ausgangsleistung . . . . .	43
3.4	Der Hänsch-Couillaud Lock . . . . .	44
3.5	Der gesamte Aufbau . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Atom-Licht Wechselwirkung</b>	<b>51</b>

## Inhaltsverzeichnis

4.1	Theorie . . . . .	51
4.2	Erweiterung auf Mehrniveausysteme . . . . .	54
4.2.1	Der Hamiltonoperator . . . . .	54
4.2.2	Inkohärente Prozesse . . . . .	55
4.3	Das Magnesium Ion . . . . .	56
4.3.1	Termschema von $^{25}\text{Mg}^+$ . . . . .	56
4.3.2	Kühltechniken . . . . .	57
4.3.3	Kühlschema . . . . .	61
4.4	Simulationen . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>65</b>
5.1	Lineare Paulfalle . . . . .	65
5.2	Vakuumaufbau . . . . .	67
5.3	Abbildungsoptik . . . . .	68
5.4	Aufbau zum Raman Seitenband Kühlen . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>71</b>

# 1 Einleitung und Motivation

Die zeitliche Konstanz von Naturkonstanten ist seit einiger Zeit Gegenstand lebhafter Diskussionen [1]. Einige theoretische Modelle sagen veränderliche Konstanten voraus, andere wiederum nicht. Erstmals wurde diese Frage 1937 von Dirac aufgeworfen [2]. Die von Dirac aufgestellte *Large Number Hypothesis* postulierte zum Beispiel eine Zeitabhängigkeit der Gravitationskonstanten  $G$ . Obwohl diese Hypothese mittlerweile umstritten ist, dauert die Diskussion um zeitlich veränderliche Naturkonstanten an. Eine Übersicht über den aktuellen Stand der Diskussion findet sich zum Beispiel bei Flambaum [3].

Wenn man nun nach experimentellen Belegen für solche Veränderungen der Konstanten suchen will, muss man sich im Vorfeld zwei Fragen stellen: Verändert sich der numerische Wert der Konstante oder aber deren Einheit? Es bietet sich daher an, dimensionslose Konstanten zu untersuchen. Die Konstante der Wahl ist häufig die Feinstrukturkonstante  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Eine andere Konstante ist zum Beispiel das Massenverhältnis von Proton zu Elektron  $m_p/m_e \approx 1836.1526636(58)$  [4]. Vereinfacht dargestellt, hängt die Kopplungsstärke der elektromagnetischen Wechselwirkung, wie also ein Photon an ein Elektron koppelt, von  $\alpha$  ab. Es sollte daher mittels spektroskopischer Methoden möglich sein nach einer Veränderung in  $\alpha$  zu suchen. Es gibt zwei Ansätze, um hier eine Veränderung nachzuweisen. Zum einen können mehrere atomare Übergänge, deren Frequenzen in unterschiedlicher Weise von  $\alpha$  abhängen, in einem bestimmten Zeitraum gemessen und verglichen werden. Dies wurde unter anderem mit  $\text{Al}^+$  und  $\text{Hg}^+$  durchgeführt [5]. Eine andere Methode besteht darin das Absorptionsspektrum ferner Quasare mit Labordaten zu vergleichen. Quasare senden ein sehr breites Lichtspektrum aus und beim Durchgang durch ein interstellares Medium wird Licht absorbiert, siehe [6] und [7]. Nach der Bestimmung der Rotverschiebung können Übergänge untersucht werden, die von  $\alpha$  abhängen. Das letzte Ergebnis nach [3] lautet  $\delta\alpha/\alpha = (-0.543 \pm 0.116) \times 10^{-5}$ . Unter der Annahme einer linearen Zeitabhängigkeit

## 1 Einleitung und Motivation

von  $\alpha$  ergibt sich  $d\ln\alpha/dt = (6.40 \pm 1.35) \times 10^{-16}$  pro Jahr. Wieder andere Forschungsgruppen fanden mit derselben Methode keine Veränderung von  $\alpha$ , [7, 8]. Allerdings fehlen präzise Labormessungen der untersuchten Ionen, wie zum Beispiel  $\text{Ti}^+$  und  $\text{Fe}^+$ , um die astronomischen Daten mit diesen vergleichen zu können.

Bis jetzt war es äußerst aufwändig, Spektroskopie an  $\text{Ti}^+$  bzw.  $\text{Fe}^+$  zu betreiben, da diese Ionen über ein kompliziertes Spektrum mit vielen Niveaus verfügen (die aktuellsten Labordaten stammen von Gasentladungszellen). Für Präzisionsspektroskopie an einzelnen Ionen bräuchte man eine große Anzahl verschiedener Laser um das Ion nach der Spektroskopie aus einem der vielen Endzustände wieder in den Ausgangszustand für die Spektroskopie zu initialisieren. Zusätzlich erschweren die vielen möglichen Übergänge das direkte Laserkühlen dieser Ionen.

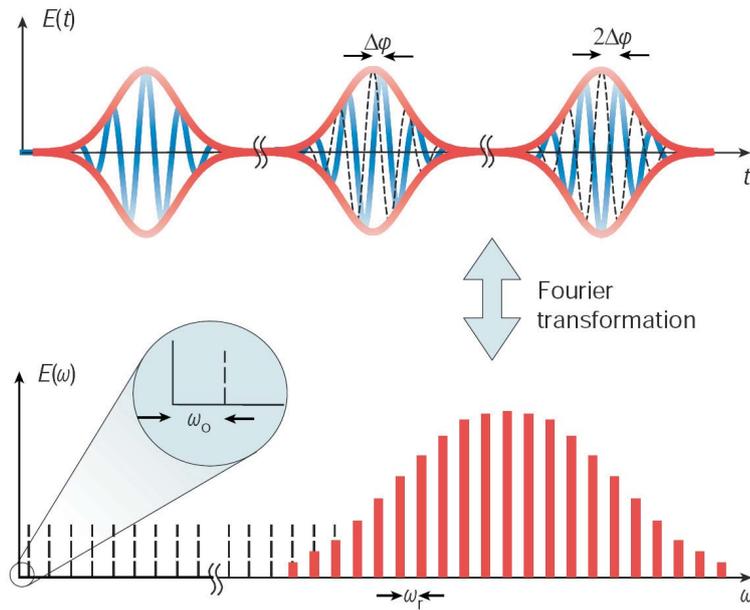
Seit der Erfindung des optischen Frequenzkamms [9], für welche T. W. Hänsch und John L. Hall 2005 den Nobelpreis für Physik bekamen, gibt es eine einfache Möglichkeit, mit Hilfe eines einzigen Lasers fast jede beliebige optische Frequenz zu messen. Ein optischer Frequenzkamm besteht im Wesentlichen aus einem gepulsten Laser. Wenn die Repetitionsrate und die Phase zwischen den einzelnen Pulsen sehr genau kontrolliert und fixiert werden kann, bildet sich im Frequenzspektrum des Lasers eine stabile Kammstruktur aus, wie in Abbildung 1.1 gezeigt.

Im Zeitraum besteht der Frequenzkamm aus einer Pulsfolge mit der Repetitionsrate  $\omega_r$  und der relativen Phase von Puls zu Puls  $\Delta\varphi$ . Im Frequenzraum bildet sich dabei eine Kammstruktur aus. Die einzelnen Kammlinien sind durch  $\omega_r$  getrennt, die Phase  $\Delta\varphi$  führt zu einer zusätzlichen Verschiebung um  $\omega_0$ . Somit kann man jeder einzelnen Kammlinie eine Frequenz zuordnen:

$$\omega_n = n\omega_r + \omega_0, \quad \omega_0 = \frac{\omega_R}{2\pi} \Delta\varphi$$

Der Multiplikator  $n$  ist hierbei in der Größenordnung von  $10^5 - 10^6$ . Da sowohl  $\omega_r$  als auch  $\omega_0$  typischerweise im Radiofrequenzbereich (kleiner 1 GHz) liegen, kann die optische Frequenz auf eine zählbare Radiofrequenz zurückgeführt werden. Üblicherweise wird ein Frequenzkamm dazu benutzt, die Frequenz eines normalen Lasers sehr genau zu messen, indem dessen Frequenz mit den Kammlinien verglichen wird. Allerdings kann der optische Frequenzkamm auch dazu benutzt werden, direkte Spektroskopie zu betreiben, d.h. das untersuchte Ion wechselwirkt direkt mit dem Kamm, siehe z.B. [10, 11, 12, 13].

Für die Präzisionsspektroskopie sind aber noch zwei Probleme zu lösen, nämlich wie man solche Ionen kühlt und wie die spektroskopische Information ausgelesen wird. Zum Kühlen kann auf die Technik des Coulomb Kühlens, [14, 15], zurückgegriffen wer-



**Abbildung 1.1:** Grafische Veranschaulichung eines Frequenzkammes. Im Zeitraum besteht der Frequenzkamm aus einer Pulsfolge mit der Repetitionsrate  $\omega_r$  und der relativen Phase von Puls zu Puls  $\Delta\varphi$ . Im Frequenzraum bildet sich dabei eine Kammstruktur aus. Die einzelnen Kammlinien sind durch  $\omega_r$  getrennt, die Offsetfrequenz  $\omega_0$  hängt von der Phase ab (Abbildung aus [9]).

den. Zum Auslesen der spektroskopischen Information wird die Information mittels *Quantenlogik* [16] auf das Kühllion übertragen und dort anschließend nachgewiesen. Als Kühllion soll in diesem Projekt  $^{25}\text{Mg}^+$  zum Einsatz kommen. Die Übergangswellenlänge liegt bei diesem Ion bei  $\lambda \approx 280 \text{ nm}$ .  $^{25}\text{Mg}^+$  wird zudem verwendet, um die spektroskopische Information auszulesen. In unserem Experiment DIFCOS (Direct Frequency Comb Spectroscopy) wollen wir die beiden Methoden, Frequenzkamm und *Quantenlogik*-Spektroskopie, kombinieren, um eine bisher nicht erreichte Genauigkeit bei der Untersuchung der Spektren von  $\text{Ti}^+$  und  $\text{Fe}^+$  zu erzielen.

In dieser Arbeit wird ein Lasersystem zum effizienten Erzeugen von Laserlicht bei  $\lambda \approx 280 \text{ nm}$  vorgestellt. Als Ausgangslaser dient ein Infrarot Faserlaser (KOHERAS Boostik) bei einer Wellenlänge von  $\lambda \approx 1118 \text{ nm}$ . Dieser wird zweimal frequenzverdoppelt, um am Ende UV Licht zu erhalten. Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Im zweiten Kapitel wird auf die Theorie der nichtlinearen Optik und im speziellen der Frequenzverdopplung eingegangen, im dritten Kapitel auf den Laseraufbau und seine Charakteristika. Anschließend wird in Kapitel 4 kurz auf die Atom-Licht Wechselwir-

## *1 Einleitung und Motivation*

kung eingangen. In Kapitel 4.3 folgt die Beschreibung des Magnesium Ions, der verwendeten Kühltechniken und die Simulationen zum Grundzustandskühlen von  $^{25}\text{Mg}^+$  mit Hilfe eines vereinfachten Lasersystems. Im vorletzten Kapitel wird kurz die Funktionsweise der Ionenfalle erklärt und der gesamte Vakuumaufbau bzw. der optische Aufbau präsentiert. In Kapitel 6 folgt schließlich eine kurze Zusammenfassung und ein Ausblick über den weiteren Verlauf des Experiments.

## 2 Frequenzverdopplung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der nichtlinearen Optik erklärt und im Speziellen auf die Theorie der Frequenzverdopplung eingegangen. In Abschnitt 2.3 folgt anschließend eine kurze Einführung der Boyd-Kleinman Theorie.

### 2.1 Nichtlineare Optik

#### 2.1.1 Grundlagen

In weiten Bereichen der Physik genügt es, Materialparameter beim Durchgang von Licht als Konstanten zu betrachten. Solch eine Konstante ist zum Beispiel der Brechungsindex  $n$ . In der linearen Optik hängt die Polarisationsdichte  $\vec{P}$  linear vom elektrischen Feld  $\vec{E}$  des Lichts ab:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (2.1)$$

Genauer betrachtet handelt es sich bei der Suszeptibilität  $\chi$  [17] um einen Tensor, welcher der Anisotropie und somit dem Phänomen der Doppelbrechung Rechnung trägt. Zur einfachen Betrachtung wird dieser Faktor hier allerdings als Skalar angenommen.

Mit der Erfindung des Lasers (1960, Rubinlaser) konnte man erstmals derart hohe Lichtintensitäten erzeugen, so dass diese physikalische Beschreibung nicht mehr ausreichend war. In solch einem Fall ist es also notwendig, Gleichung 2.1 zu erweitern. Dazu wird diese Formel in einer Taylorreihe um den Nullpunkt entwickelt.

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + 2d\vec{E}^2 + 4\chi^{(3)}\vec{E}^3 + \dots = \epsilon_0 \chi \vec{E} + \vec{P}_{NL} \quad (2.2)$$

Die gebräuchlichste Entwicklung ist in der Gleichung 2.2 dargestellt, wobei die Bezeichnung der Entwicklungskoeffizienten historisch bedingt ist und je nach Literatur etwas unterschiedlich sein kann ( $P_{NL}$  ist die nichtlineare Polarisationsdichte). Dies ist eine der Grundgleichungen der nichtlinearen Optik. Typische Werte für den in dieser Arbeit dominanten Koeffizient  $d$  in nichtlinearen Medien sind  $d = 10^{-21} \dots 10^{-24} \text{ As/V}^2$  [18], dieser ist verantwortlich für Effekte wie z.B. Frequenzverdopplung.

## 2 Frequenzverdopplung

### Beispiel

Für einen typischen Wert von  $d = 1,4 \cdot 10^{-24} \text{ As/V}^2$  (BBO Kristall) muss die Feldstärke im Bereich von  $3 \cdot 10^9 \text{ V/m}$  liegen, damit der Effekt zweiter Ordnung 1% des linearen Effektes ist.

$$E = \frac{0.01\epsilon_0\chi}{2d} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ V/m} \quad (2.3)$$

Ein Laser, der im kontinuierlichen Betrieb 1 W liefert, benötigt einen Fokusbereich von ca.  $1 \cdot 10^{-8} \text{ m}$  um diese Feldstärken zu erzeugen:

$$\sqrt{\frac{2\eta_0 A}{E^2 \pi}} \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (2.4)$$

$\eta_0 = 377 \Omega$  [18] ist die Impedanz des Vakuums. Man sieht, dass man selbst mit einem einfachen Laser nicht automatisch das verwendete Modell erweitern muss. Oftmals werden auch gepulste Laser eingesetzt, bei denen die Feldstärken sehr leicht in den Bereich von  $10^{11} \text{ V/m}$  vordringen können.

### 2.1.2 Die nichtlineare Wellengleichung

Damit man die Wellengleichung für eine Welle in einem nichtlinearen Medium erhält, werden die Maxwellgleichungen wie folgt umgeschrieben [17]:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

Mit Hilfe von Gleichung 2.2 und den Beziehungen  $n^2 = 1 + \chi$ ,  $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  und  $c = c_0/n$  folgt:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\vec{S} \quad (2.6)$$

$$\vec{S} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

$\vec{S}$  ist der so genannte Quellterm, Gleichung 2.6 ist die Wellengleichung. Der Großteil der nichtlinearen Optik beruht auf dieser Gleichung. Ein möglicher Weg, diese Gleichung zu lösen, ist die Theorie der gekoppelten Wellen (*coupled wave theory*) [18], siehe Kapitel 2.2.

Im Folgenden werden zwei der häufigsten Anwendungen nichtlinearer Effekte, nämlich die Frequenzverdopplung von Licht und der elektro-optische Effekt, anschaulich erklärt.

### Frequenzverdopplung

Wie der Name Frequenzverdopplung (engl.: *Second Harmonic Generation, SHG*) schon vermuten lässt, kommt bei diesem Effekt der zweite Term von Gleichung 2.2 zum Tragen. Als einfallendes elektrisches Feld wird eine monochromatische, ebene Welle angenommen, siehe Gleichung 2.8.

$$\vec{E}(t) = \vec{E}e^{i\omega t} + c.c. \quad (2.8)$$

$$\vec{P}_{NL} = 2d\vec{E}^2(t) \quad (2.9)$$

Die explizite Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes wurde hier nicht berücksichtigt, da sie für die weitere Betrachtung nicht von Bedeutung ist. Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\vec{P}_{NL} = d\vec{E}^2 + d\vec{E}^2 \cos(2\omega t) \quad (2.10)$$

Man sieht aus Gleichung 2.10, dass die resultierende Polarisationsdichte auch einen Anteil besitzt, welcher mit der Frequenz  $2\omega$  oszilliert. Schematisch ist dies in Abbildung 2.1 dargestellt. Zum ersten Mal wurde dieser Effekt 1961 experimentell nachgewiesen [19].

### Elektrooptischer Effekt

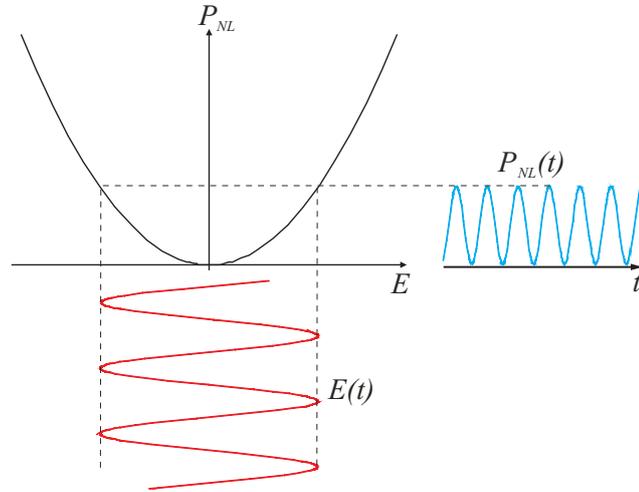
Dieser Effekt beruht darauf, dass sich der Brechungsindex  $n$  eines nichtlinearen Mediums in Abhängigkeit eines äußeren konstanten elektrischen Feldes  $\vec{E}_0$  ändert. Das gesamte elektrische Feld im Medium lautet somit:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}(t) = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

Wenn man diese Gleichung in 2.9 einsetzt, erhält man einen konstanten Term und zwei Terme, die von  $\omega$  bzw.  $2\omega$  abhängen, wobei der  $2\omega$  Term oft vernachlässigt werden kann, da typischerweise  $|E_1| \ll |E_0|$  gilt. Die Polarisationsdichte lautet:

$$\vec{P}_{NL} = d\vec{E}_0^2 + 4d\vec{E}_0\vec{E}(t) \quad (2.12)$$

## 2 Frequenzverdopplung



**Abbildung 2.1:** Veranschaulichung der Frequenzverdopplung. Ein periodisches elektrisches Feld  $E(t)$  (Frequenz  $\omega$ ) erzeugt in einem nichtlinearen Medium eine zeitabhängige Polarisationsdichte, welche mit der Frequenz  $2\omega$  oszilliert.

Mit Hilfe von Gleichung 2.2 kann dies umgeschrieben werden zu:

$$\vec{P}_{NL} = d\vec{E}_0^2 + \epsilon_0\Delta\chi\vec{E}(t) \quad (2.13)$$

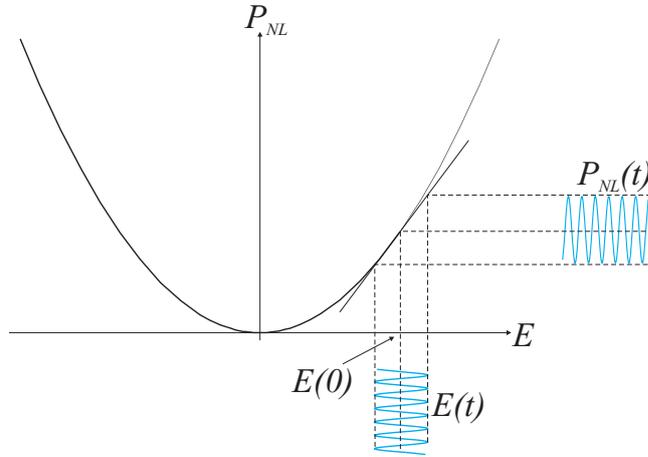
Man betrachtet also eine kleine Variation der Suszeptibilität  $\chi = \chi(E = 0) + \Delta\chi$ . Mit Hilfe der Relationen  $n = n(E = 0) + \Delta n$  und  $n^2 = 1 + \chi$ , kann man die Änderung des Brechungsindex des Mediums auf Grund des anliegenden elektrischen Feldes  $\vec{E}_0$  berechnen:

$$\Delta n = \frac{2d}{n\epsilon_0}E_0 \quad (2.14)$$

In Abbildung 2.2 ist  $P_{NL}$  in Abhängigkeit von  $E(t)$  und  $E(0)$  dargestellt. Eine Anwendung findet dieser Effekt zum Beispiel in einem elektrooptischen Modulator (EOM), um Seitenbänder mit Abstand  $\omega_m$  um eine Trägerfrequenz aufzomodulieren [18].

## 2.2 Theorie zur Frequenzverdopplung

In diesem Abschnitt wird nun die Frequenzverdopplung etwas genauer betrachtet. Als Ansatz wählt man die 3-Wellen Mischung, d.h. das gesamte elektrische Feld wird



**Abbildung 2.2:** Veranschaulichung des elektrooptischen Effekts. Hier wird die nichtlineare Polarisationsdichte um den Punkt  $E(0)$  linearisiert, d.h. die  $2\omega$  Terme werden vernachlässigt. Dies gilt im Bereich  $|\vec{E}_1|^2 \ll |E_0|^2$ . Durch das konstante Feld  $E_0$  oszilliert die Polarisationsdichte mit der Frequenz  $\omega$  um den Wert  $P_{NL}(E_0)$ .

als Überlagerung von drei einzelnen elektrischen Feldern betrachtet. Zur Lösung dieses Systems wird auf die gekoppelte Wellentheorie zurückgegriffen. Nach einer allgemeinen Betrachtung folgt anschließend die Anwendung der Theorie auf die Frequenzverdopplung.

### 2.2.1 Die gekoppelten Wellengleichungen

Das gesamte elektrische Feld im Fall der 3-Wellen Mischung lautet:

$$\vec{E}(t) = \sum_{q=\pm 1, \pm 2, \pm 3} \frac{1}{2} \vec{E}_q e^{i\omega_q t} \quad (2.15)$$

Es gilt  $\omega_{-q} = -\omega_q$  und  $E_{-q} = E_q^*$  gilt, wobei  $q=1,2,3$  die jeweilige Welle bezeichnet. Setzt man nun Gleichung 2.15 in Gleichung 2.9 und anschließend in Gleichung 2.7 ein, ergibt sich:

$$S = \frac{1}{2} d\mu_0 \sum_{q,r=\pm 1, \pm 2, \pm 3} (\omega_q + \omega_r)^2 E_q E_r e^{i(\omega_q + \omega_r)t} \quad (2.16)$$

Diese Gleichung wird wiederum in Gleichung 2.6 eingesetzt. Für den Fall verschiedener Frequenzen  $\omega$  kann dies in ein System von drei Differentialgleichungen, die Helmholtz-Gleichungen, umgewandelt werden:

## 2 Frequenzverdopplung

$$(\nabla^2 + k_q^2)E_q = -S_q \quad (2.17)$$

Die Faktoren  $S_q$  sind die Amplituden der drei einzelnen Komponenten von  $S$  aus Gleichung 2.16 und  $k_q = n\omega_q/c_0$ . Es wird angenommen, dass der Quellterm einer Welle von den elektrischen Feldern der anderen zwei Felder abhängt. Man wählt den Ansatz, dass eine Frequenz die Summe der anderen zwei ist  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  (Energieerhaltung). Diese Relation wird wieder in 2.16 eingesetzt. Es ergeben sich folgende gekoppelte Differentialgleichungen:

$$(\nabla^2 + k_1^2)E_1 = -2\mu_0\omega_1^2 dE_3E_2^* \quad (2.18a)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)E_2 = -2\mu_0\omega_2^2 dE_3E_1^* \quad (2.18b)$$

$$(\nabla^2 + k_3^2)E_3 = -2\mu_0\omega_3^2 dE_1E_2 \quad (2.18c)$$

Man nimmt nun der Einfachheit wegen die drei Lichtwellen als ebene Wellen an (Ausbreitungsrichtung  $z$ ) und definiert anschließend den Photonenfluss der einzelnen Wellen  $\Phi_q$  [ $s^{-1}m^{-2}$ ]. Die Wahl folgender Normierungsterme hat sich als praktisch für den weiteren Verlauf der Rechnung ergeben.

$$E_q = \sqrt{2\eta\hbar\omega_q}a_q e^{-ik_q z} \quad (2.19)$$

$$\Phi_q = \frac{I_q}{\hbar\omega_q} = |a_q|^2 \quad (2.20)$$

Der Faktor  $\eta_0 = 377\Omega$  ist wiederum die Impedanz des Vakuums und  $\eta = \eta_0/n$ .  $a_q$  kann als normierte komplexe Einhüllende der  $q$ -ten Welle betrachtet werden. Mit Hilfe der SVE Näherung<sup>1</sup> (*slowly varying envelope*) [20] können nun die Gleichungen 2.18a bis 2.18c folgendermaßen vereinfacht werden [18]:

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = -iga_3a_2^* e^{-i\Delta kz} \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial z} = -iga_3a_1^* e^{-i\Delta kz} \quad (2.21b)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} = -iga_1a_2 e^{i\Delta kz} \quad (2.21c)$$

Hierbei ist  $g^2 = 2\hbar\omega_1\omega_2\omega_3\eta^3 d^2$  und  $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$  der Phasenanpassungsfehler.

---

<sup>1</sup>SVE Näherung: Die Amplitude und Phase von  $a_q$  ändert sich nur wenig innerhab einer Wellenlänge; daher können die 2. Ableitungen von  $a_q$  nach dem Ort vernachlässigt werden. Wenn  $d$  die Skala der Variation von  $a_q$  ist, gilt  $\lambda \ll d$ .

### 2.2.2 Spezialfall der Frequenzverdopplung

Man kann den allgemeinen Fall 2.21a bis 2.21c sehr leicht in den Spezialfall der Frequenzverdopplung umwandeln, indem man  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  und  $\omega_3 = 2\omega$  setzt. Hier wird allerdings nur der Fall ebener Wellen betrachtet, der realistische Fall Gauß'scher Strahlen wird in Kapitel 2.3 behandelt. Das System muss für die beiden möglichen Fälle der Phasenanpassung ( $\Delta k = 0$  bzw.  $\Delta k \neq 0$ ) separat gelöst werden.

#### Lösung für ideale Phasenanpassung $\Delta k = 0$

Für diesen Fall vereinfachen sich die Gleichungen 2.21a bis 2.21c zu:

$$\frac{\partial a_1}{\partial z} = -iga_3a_1^* \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} = -i\frac{g}{2}a_1a_1 \quad (2.22b)$$

Hier ist anzumerken, dass die Gleichungen 2.22a und 2.22b nicht direkt aus den Gleichungen 2.21a bis 2.21b folgen (es fehlt der Faktor 1/2). Für das richtige Ergebnis muss der Quellterm aus Gleichung 2.16 neu berechnet werden. Unter der Voraussetzung der Energie- und Impulserhaltung, und der Randbedingung  $a_3(0) = 0$  ist eine Lösung gegeben durch:

$$a_1(z) = a_1(0)\operatorname{sech}\frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}} \quad (2.23a)$$

$$a_3(z) = -\frac{i}{\sqrt{2}}a_1(0)\tanh\frac{ga_1(0)z}{\sqrt{2}} \quad (2.23b)$$

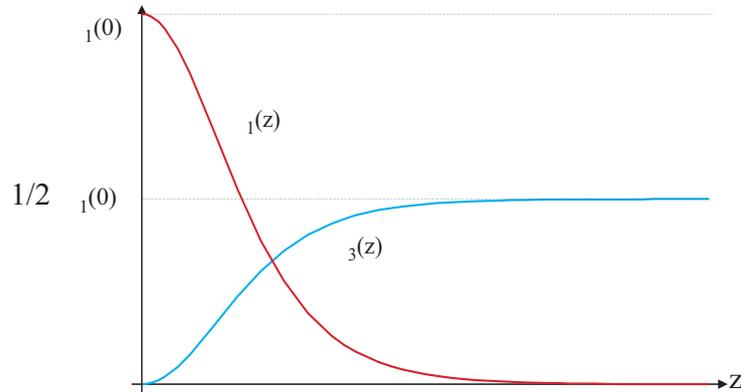
Mit Gleichung 2.20 ergibt sich:

$$\Phi_1(z) = \Phi_1(0)\operatorname{sech}^2\frac{\gamma z}{2} \quad (2.24a)$$

$$\Phi_3(z) = \frac{1}{2}\Phi_1(0)\tanh^2\frac{\gamma z}{2} \quad (2.24b)$$

wobei  $\gamma = ga_1(0)\sqrt{2}$  ist. Diese Gleichungen lassen sich sehr gut grafisch veranschaulichen, siehe Abbildung 2.3. Zu erkennen ist, wie die Photonenzahl in der Fundamentalwelle in Abhängigkeit der Strecke  $z$  abnimmt und diejenige in der erzeugten Welle zunimmt. Die Photonenzahl in der erzeugten Welle kann maximal den halben Wert der Ausgangsphotonenanzahl erreichen, da zwei Photonen der Fundamentalwelle ein Photon bei der doppelten Frequenz erzeugen.

## 2 Frequenzverdopplung



**Abbildung 2.3:** Frequenzverdopplung bei idealer Phasenanpassung  $\Delta k = 0$ . Die Intensität bzw. die Photonenzahl nimmt in der Fundamentalwelle gegen 0 ab, während die Photonenzahl in der frequenzverdoppelten Welle zunimmt. Die Zahl kann maximal den halben Wert der Fundamentalwelle erreichen, da zwei Photonen dieser Welle ein Photon bei der doppelten Frequenz erzeugen.

### Lösung für nicht ideale Phasenanpassung $\Delta k \neq 0$

Der Einfachheit halber wird hier der Fall der schwachen Kopplung betrachtet, d.h. die Intensität der Fundamentalwelle ändert sich über die Länge  $L$  des Kristalls nicht signifikant,  $a_1(z) \approx a_1(0)$ .

$$a_3(L) = -\left(\frac{g}{2\Delta k}\right) a_1^2(0) \left(e^{i\Delta k L} - 1\right) \quad (2.25a)$$

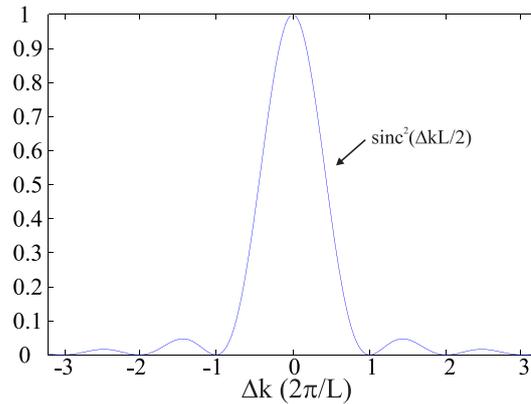
$$\Phi_3(L) = |a_3(L)|^2 = \left(\frac{g}{\Delta k}\right)^2 \Phi_1^2(0) \sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \quad (2.25b)$$

Man erkennt, dass die Photonenzahl und damit die Intensität der erzeugten Welle mit der Wechselwirkungslänge, d.h. der Länge des Kristalls, oszilliert. Eine gängige Form, um diese Formel umzuschreiben, lautet:

$$\Phi_3(L) = \frac{1}{4} g^2 L^2 \Phi_1^2(0) \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)^2} \quad (2.26)$$

Zu beachten ist hier die Abhängigkeit  $\text{sinc}^2(x)$  der Intensität in der frequenzverdoppelten Welle bei nicht perfekter Phasenanpassung  $\Delta k \neq 0$ , siehe Abbildung 2.4. Durch die unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten des Lichts im Kristall hat das nach einer Länge  $L = 2n\pi/\Delta k$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) erzeugte Licht eine Phasenverschiebung von

$\pi$  bezüglich dem bei  $z = 0$  erzeugten Licht. Das bedeutet, die beiden Wellen interferieren destruktiv und die Intensität der erzeugten Welle verschwindet an dieser Stelle, danach beginnt der Zyklus von neuem. In Abbildung 2.5 ist zu sehen, wie die Intensität der erzeugten Welle in Abhängigkeit der Wegstrecke oszilliert.



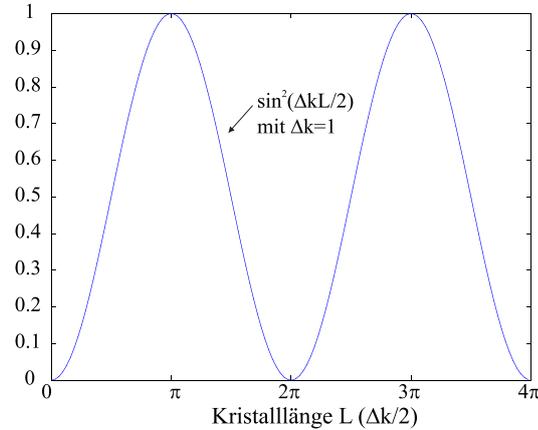
**Abbildung 2.4:** Qualitativer Verlauf der Photonenzahl in der frequenzverdoppelten Welle  $\Phi_3(L) \propto \text{sinc}^2(\Delta k L / 2)$  in Abhängigkeit der Verstimmung  $\Delta k$ . Die meisten Photonen erhält man, wenn die Wellenvektoren kollinear sind, d.h. die Differenz  $\Delta k = 0$  ist. Abhängig von der Kristalllänge  $L$  nimmt die Intensität dann ab und folgt dem hier gezeigten Verlauf.

### 2.2.3 Phasenanpassung

#### Arten der Phasenanpassung

Prinzipiell muss zwischen der Phasenanpassung vom Typ I und vom Typ II unterschieden werden. Beim Typ I besitzen die zwei Photonen des Pumplichts, die ein frequenzverdoppeltes Photon erzeugen, die gleiche Polarisation und erzeugen Licht mit dazu orthogonaler Polarisation,  $o + o \rightarrow e$  (ooe) bzw.  $e + e \rightarrow o$  (eeo). Bei der Typ II Phasenanpassung gilt  $o + e \rightarrow o$  (oeo), siehe zum Beispiel [21]. Hier bezeichnen  $o$  und  $e$  die Polarisation des ordentlichen bzw. außerordentlichen Strahls. Wir arbeiten in unserem Experiment mit der Typ I Phasenanpassung. Abhängig von den Kristallparametern wird entweder eine ooe- oder eine eeo- Konfiguration gewählt. Zusätzlich unterscheidet man noch die kritische und die nicht kritische Phasenanpassung.

## 2 Frequenzverdopplung



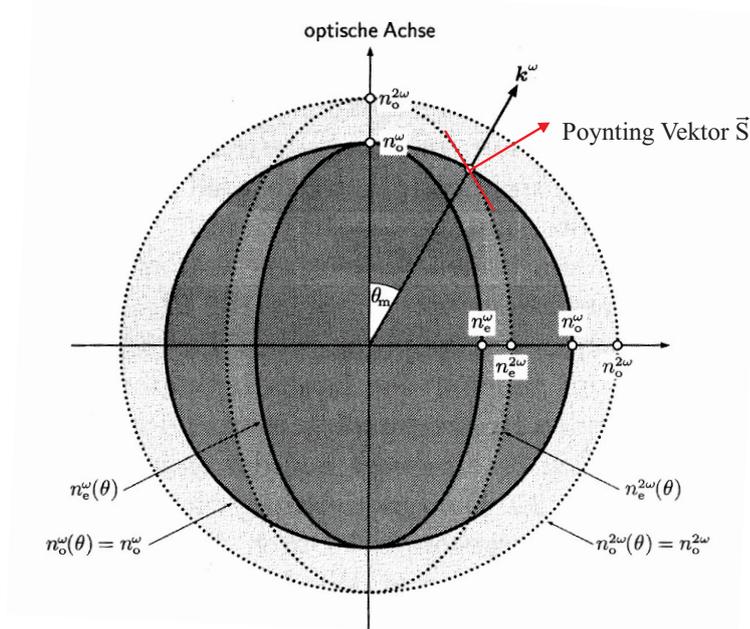
**Abbildung 2.5:** Intensität der frequenzverdoppelten Welle bei nicht idealer Phasenanpassung  $\Delta k \neq 0$ . Die frequenzverdoppelte Welle besitzt eine andere Phasengeschwindigkeit wie die Pumpwelle, dies verursacht eine Phasenverschiebung zwischen den erzeugten Wellen. Nach der Strecke  $L = 2\pi/\Delta k$  ( $\Delta k = 1$ ) kommt es zu destruktiver Interferenz mit dem bei  $z = 0$  erzeugtem Licht. Danach beginnt ein neuer Zyklus.

### Die kritische Phasenanpassung

Kritische Phasenanpassung liegt vor, wenn die Brechungsindizes der beiden Pump- und der erzeugten Welle nicht gleich  $n_o(\omega) \neq n_e(2\omega)$  sind. Hier kann man sich den Effekt der Doppelbrechung für die Phasenanpassung zu Nutze machen. Der Brechungsindex für den außerordentlichen Strahl ist abhängig vom Winkel  $\Theta$ , den dieser mit der optischen Achse einschließt. Der ordentliche Strahl breitet sich unabhängig von diesem Winkel aus, siehe Abbildung 2.6. Es ist aus der Abbildung zu erkennen, dass sich der außerordentliche Strahl i. A. nicht entlang der optischen Achse (OA) ausbreitet. Er schließt einen gewissen Winkel  $\Theta_m$  mit dieser ein. Der Prozess ist nun zwar phasengangepasst, aber auf Grund des Winkels zur OA kommt es dennoch zu einer Strahlabweichung. Dies hat mit dem Poynting Vektor  $\vec{S} = \mu^{-1}(\vec{E} \times \vec{B})$  zu tun. Dieser gibt die Richtung der Energieausbreitung in einem Medium an und ist in einem nichtlinearen Medium für den außerordentlichen Strahl nicht parallel mit dem k-Vektor der Welle für  $\Theta \neq 0^\circ, 90^\circ$  sondern steht senkrecht auf der k-Fläche, siehe dazu Abbildung 2.6.

Nach [22] gilt für

$$\frac{1}{n(\Theta)^2} = \frac{\cos^2(\Theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\Theta)}{n_e^2} \quad (2.27)$$



**Abbildung 2.6:** Schematische Darstellung der Phasenanpassungsbedingung für einen uniaxialen Kristall, aus [22]. Die Ellipsen bezeichnen die Brechungsindizes für die außerordentlichen Strahlen in einem doppelbrechendem Medium. Dieser ist abhängig vom Winkel  $\Theta_m$ , den der Lichtstrahl mit der optischen Achse OA einschließt. Der Brechungsindex für den ordentlichen Strahl ändert sich nicht, er ist unabhängig von  $\Theta_m$ . Durch Drehen des Kristalls kann man zwar  $n_o(\omega) = n_e(2\omega)$  erreichen. Allerdings bewirkt der Winkel  $\Theta_m$  für  $\Theta_m \neq 0^\circ, 90^\circ$  ein Auseinanderlaufen des Pump- bzw. frequenzverdoppelten Lichts (Strahlabweichung oder *walk off*), die Wechselwirkungslänge und damit die Konversionseffizienz verkürzt sich.

Mit Hilfe der Phasenanpassungsbedingung  $n_{2\omega}(\Theta) = n_{\omega,o}$  folgt:

$$\cos^2(\Theta_m) = \frac{n_{\omega,o}^{-2} - n_{2\omega,e}^{-2}}{n_{2\omega,o}^{-2} - n_{2\omega,e}^{-2}} \quad (2.28)$$

Man will erreichen, dass sich das erzeugte Licht mit der Frequenz  $2\omega$  ohne Strahlabweichung ausbreitet und zusätzlich, dass die Brechungsindizes  $n_o(\omega)$ ,  $n_e(2\omega)$  gleich sind um Dispersion zu vermeiden. Nach Vergleich mit den Gleichungen 2.27 und 2.28 kann dieser Effekt für  $\Theta_m = 90^\circ$  vermieden werden. Hier kann man die Tatsache nutzen, dass die verschiedenen Brechungsindizes unterschiedliche Temperaturabhängigkeiten  $n = n(T)$  besitzen. So ist es möglich, durch Heizen des Verdopplerkristalls

## 2 Frequenzverdopplung

die *nicht kritische 90° Phasenanpassungsbedingung* zu erfüllen. Das Verhalten von  $n(\lambda, T)$  wird durch die (empirisch ermittelte) Sellmaier Gleichung beschrieben [23]. Diese Gleichung beschreibt die Änderung des Brechungsindex in Abhängigkeit der betrachteten Wellenlänge. Die Entwicklungskoeffizienten der Gleichung sind noch dazu abhängig von der Temperatur. Sie beschreibt also im Wesentlichen die Änderung der Ellipsen bzw. Kreise aus Abbildung 2.6 bei Temperaturänderung.

Mit Hilfe des Programmes *SNLO* (*from Sandia National Laboratories*) können für unterschiedliche Kristalltypen bei unterschiedlichen Temperaturen die einzelnen Parameter (*walk off*, effektive Nichtlinearität  $d$ , ...) berechnet werden.

### Die nicht kritische Phasenanpassung

Der Pumpstrahl und der frequenzverdoppelte Strahl breiten sich parallel aus, die Strahlen laufen also nicht auseinander. Es muss die Beziehung  $n_o(\omega) = n_e(2\omega)$  gelten, allerdings ist dies für nur sehr wenige Kristalltypen und Wellenlängen von vorneherein möglich [23].

## 2.3 Optimierung der Leistung

Die Theorie zur Wechselwirkung eines nichtlinearen Mediums mit einem Gauß'schen Laserstrahl [24] geht zurück auf Boyd und Kleinman [25]. Sie betrachteten infinitesimal kleine Scheiben, in denen Licht konvertiert wird. Anschließend wird über diese kleinen Scheiben integriert. Das Ergebnis für die gesamte frequenzverdoppelte Leistung nach Boyd und Kleinman lautet:

$$P_2 = KP_1^2 l k_1 e^{-\alpha l} h(\sigma, \beta, \xi) \quad (2.29)$$

Hier bezeichnen  $l$  die Länge des Kristalls und  $k_1$  den Wellenvektor der Pumpwelle. Der Parameter  $\sigma = 1/2b\Delta k$  ( $\Delta k = k_2 - 2k_1$ ) ist ein Maß für den Phasenanpassungsfehler und  $\xi = l/b$  beschreibt die Fokusstärke,  $b$  ist der konfokale Parameter.  $\beta = \rho/\delta_0$ , wobei  $\delta_0$  den halben Öffnungswinkel des Gauß'schen Strahls und  $\rho$  den Doppelbrechungswinkel bezeichnet. In Abbildung 2.7 sind die einzelnen Parameter grafisch veranschaulicht. Der Faktor  $K$  ist wie folgt definiert:

$$K = (128\pi^2 \omega_1^2 / c_0^3 n_1^2 n_2) d^2 \quad (2.30)$$

Die Parameter  $n_1$  und  $n_2$  bezeichnen die Brechungsindizes der Pump- bzw. der Oberwelle,  $\omega_1$  ist die Frequenz der Pumpwelle und  $d$  ist der in Gleichung 2.2 definierte

### 2.3 Optimierung der Leistung

Nichtlinearitätskoeffizient. Der vereinfachte<sup>2</sup> Boyd-Kleinman Faktor  $h(\sigma, \beta, \xi)$  lautet:

$$h(\sigma, \beta, \xi) = \frac{1}{4\xi} \int_{-\xi}^{\xi} \int_{-\xi}^{\xi} d\tau d\tau' \frac{\exp(i\sigma(\tau - \tau') - \beta^2(\tau - \tau')^2)}{(1 + i\tau)(1 - i\tau')} \quad (2.31)$$

Der Parameter  $\alpha' = \alpha_1 + 1/2\alpha_2$  kombiniert die Absorptionskoeffizienten  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der Pump- und der Oberwelle. Der Doppelbrechungswinkel  $\rho$  verschwindet bei nicht kritischer  $90^\circ$  Phasenanpassung. Die gesamten Faktoren in Gleichung 2.29 lassen sich zu einem einzelnen Faktor zusammenfassen, dem Konversionskoeffizienten  $\kappa_{NL}$ :

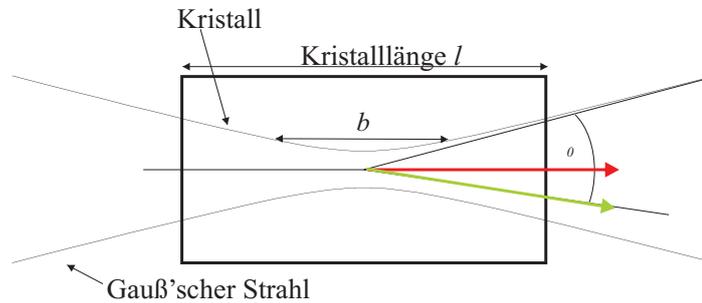
$$P_2 = \kappa_{NL} P_1^2 \quad (2.32)$$

Der Parameter  $\kappa_{NL}$  enthält nach Vergleich mit den vorangegangenen Gleichungen zwei variable, zu optimierende Faktoren:  $\sigma$  und  $\xi$ . Mit Hilfe numerischer Integration kann man ein Optimum für den Parameter  $\kappa_{NL}$  finden. Wenn man den Spezialfall eines verlustfreien Kristalls bei  $90^\circ$  betrachtet, ergibt sich für den Boyd-Kleinman Faktor ein konstanter Wert von  $h(\xi, \sigma) \approx 1.068$ , mit  $\xi \approx 2.84$  und  $\sigma \approx 0.56$ . Bei  $90^\circ$  Phasenanpassung und verschwindender Absorption sollte der Kristall so lang wie möglich gewählt werden, aber durch Fertigungsprobleme bzw. mechanische Einschränkungen im Resonatoraufbau ist diese typischerweise auf Längen um ca. 2cm limitiert. Bei gegebener Kristalllänge sollte der konfokale Parameter  $b$  das 1/2.84-fache dieser Länge sein. Dies lässt sich damit begründen, dass zwar lokal die Konversionseffizienz bei sehr kleinem Strahldurchmesser sehr hoch wird, allerdings wird durch den starken Fokus der Strahl sehr divergent und die effektive Wechselwirkungslänge verkleinert sich. Man will aber eine Konversion über einen möglichst großen Bereich des Kristalls erreichen.

In Abbildung 2.8 ist der Boyd Kleinman Faktor  $h(\sigma, \xi)$  als Funktion von  $\sigma$ , welches abhängig von der Phasenanpassung  $\Delta k$  ist, bei optimalem  $\xi$  aufgetragen. Hier kann man die sinc Funktion wiedererkennen, welche wir bereits bei Gleichung 2.26 kennengelernt haben. Allerdings ist ebenfalls zu erkennen, dass das Maximum nicht bei  $\Delta k = 0$  liegt, sondern bei einem Wert  $\Delta k > 0$ . Dies lässt sich laut Boyd und Kleinman folgendermaßen erklären: der Pumplaser wird als divergierendes Bündel ebener Wellen angesehen. Wenn nun für die zentrale Komponente des Bündels  $\Delta k > 0$  gilt, gibt es immer noch Prozesse für welche gilt  $\Delta k = k'_1 + k''_1 - k_2 = 0$  gilt. Hierbei ist zu beachten, dass  $k'_1$  und  $k''_1$  einen Winkel einschließen. Für den Fall  $\Delta k < 0$  kann die Bedingung  $\Delta k = 0$  nicht mehr erfüllt werden.

<sup>2</sup>Es wird hier angenommen, dass die Absorption im Medium vernachlässigbar ist und der Fokus des Gauß'schen Laserstrahls im Kristallzentrum liegt.

## 2 Frequenzverdopplung



**Abbildung 2.7:** Schematische Darstellung der Parameter in der Boyd-Kleinman Theorie: der halbe Öffnungswinkel  $\delta_0$ , die Kristalllänge  $l$ , der konfokale Parameter  $b$  und der Doppelbrechungswinkel  $\rho$ .

### Beispiel

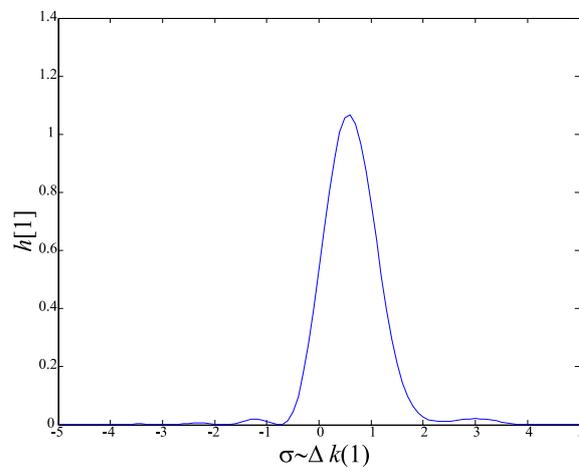
Für einen LBO-Kristall<sup>3</sup> der Länge  $l=18$  cm und einer Pumpleistung von  $P_1 \approx 1$  W, ergibt sich nach numerischer Berechnung folgender Konversionskoeffizient  $\kappa_{NL} \approx 0,000345$ , dies entspricht beim einfachen Durchgang im Kristall einer Ausgangsleistung von  $P_2 \approx 0,345$  mW.

Für den Fall  $\rho > 0$  machen lange Kristalle keinen Sinn, da die Effizienz auf Grund der Strahlabweichung sehr gering wird, typische Kristalllängen liegen daher im Bereich von 1 cm. In Gleichung 2.32 ist der quadratische Zusammenhang von Pump- und Oberwelle dargestellt. Dies gilt allerdings nur für  $P_1 \approx const.$  Wenn die Abnahme der Pumpwellenintensität auf Grund der Konversion berücksichtigt werden muss, kommt es zur Pumpwellenabschwächung, es gilt nur mehr ein linearer Zusammenhang zwischen Pump- und Oberwelle [27].

---

<sup>3</sup>Lithium Triborat, siehe [26]

### 2.3 Optimierung der Leistung



**Abbildung 2.8:** Boyd-Kleinman Faktor  $h(\sigma, \xi)$  als Funktion von  $\sigma$  bei dem optimalen Wert von  $\xi \approx 2.84$ . Das Maximum der Funktion  $h(\sigma, \xi)$  liegt nicht bei  $\sigma = 0$  (und damit  $\Delta k = 0$ ) liegt, sondern bei  $\sigma > 0$  ( $\Delta k > 0$ ).



## 3 Der Laser Aufbau

Im vorigen Kapitel wurde die theoretische Erzeugung von frequenzverdoppeltem Licht in einem Kristall kurz zusammengefasst. In diesem Kapitel wird nun der experimentelle Aufbau zur Erzeugung von Licht bei  $\lambda = 280 \text{ nm}$  beschrieben, welches zur Kühlung von Magnesiumionen verwendet wird. Im Abschnitt Resonatortheorie werden optische Resonatoren behandelt, die zur Effizienzsteigerung der Frequenzverdopplung verwendet werden. In den beiden darauffolgenden Abschnitten werden die Resonatoren für die Erzeugung von grünem ( $1118 \text{ nm} \rightarrow 559 \text{ nm}$ ) und von UV Licht ( $559 \text{ nm} \rightarrow 279.5 \text{ nm}$ ) im Speziellen behandelt.

### 3.1 Resonatortheorie

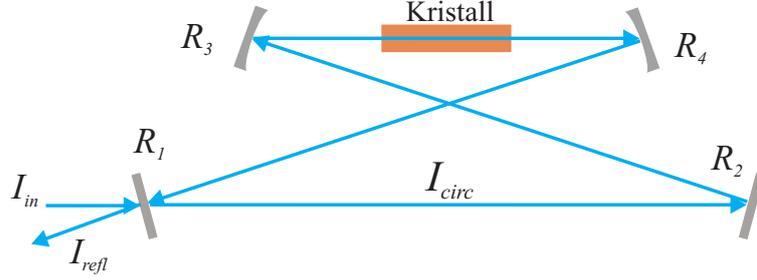
#### Gefalteter Resonator

Als Resonatordesign wird eine *gefaltete* (engl.: *bow tie* für Fliege) Konfiguration [28] gewählt. Diese besteht aus vier Spiegeln, zwischen denen das Laserlicht laufen kann, siehe Abbildung 3.1. Der Vorteil eines solchen Resonators besteht darin, dass sich keine Stehwellen ausbilden, welche zu sehr hohen lokalen Feldstärken im Resonator und insbesondere im Kristall führen können. Zu hohe Feldstärken im Kristall können zum photorefraktiven Effekt führen. Dieser erzeugt lokale Unterschiede im Brechungsindex des Kristalls und verkleinert durch Rückstreuung des Pumplichts die Konversionseffizienz. Ein weiterer Vorteil dieser Konfiguration ist, dass die Strahlen unter kleinem Winkel auf die Resonatorspiegel treffen und so der Astigmatismuseffekt verkleinert werden kann.

Im Folgenden soll die theoretische Behandlung des Resonators in Anlehnung an [29] und [30] kurz dargestellt werden.

Das elektrische Feld  $E_{circ}$  im Resonator direkt hinter dem Einkoppelspiegel ist die Summe des bereits im Resonator zirkulierenden und des neu eingekoppelten Feldes, siehe Gleichung 3.1. Die Bezeichnungen beziehen sich hierbei auf Abbildung 3.1, wobei  $R_g = R_1 R_2 R_3$  das Produkt der Reflektivitäten ist,  $T_i$  sind die Spiegeltransmittivitäten und  $\alpha_{ges}$  enthält die restlichen Verluste, insbesondere aber diejenigen, die durch die

### 3 Der Laser Aufbau



**Abbildung 3.1:** Darstellung eines klassischen gefalteten Resonators.  $R_i$  sind die unterschiedlichen Spiegelreflektivitäten,  $I_{in}$  ist die Eingangsleistung,  $I_{refl}$  und  $I_{circ}$  die reflektierte beziehungsweise die zirkulierende Leistung. Zwischen den beiden gekrümmten Spiegeln befindet sich ein nichtlineares Medium, in unserem Fall ein Verdopplungskristall (LBO bzw. BBO).

Frequenzverdopplung zustande kommen. Zusätzlich gilt die Bedingung  $R_i + T_i = r_i^2 + t_i^2 = 1$ . Hierbei sind  $R_i$  und  $T_i$  die Reflektivitäten bzw. Transmittivitäten des  $i$ -ten Spiegels ( $r_i$  und  $t_i$  bezeichnen die Reflektivitäten bzw. Transmittivitäten der elektrischen Felder).

$$E_{circ} = it_1 E_{in} + g_{rt}(\omega) E_{circ} \quad (3.1)$$

$$g_{rt}(\omega) = \sqrt{R_1 R_g \alpha_{ges}} e^{-i\omega l/c} \quad (3.2)$$

Der Faktor  $g_{rt}$  ist die Umlaufverstärkung [31] ( $l$  ist die gesamte Länge des Resonators) und beschreibt die gesamten Verluste bzw. die Phasenverschiebung bei einem Durchgang des Lichts im Resonator. Der Faktor  $i$  beschreibt den Umstand, dass das Licht beim Durchgang durch den Einkoppelspiegel einen Phasensprung von  $\pi/2$  erfährt. Gleichung 3.1 kann nun nach  $E_{circ}/E_{in}$  aufgelöst werden. Anschließend bildet man das Betragsquadrat von Gleichung 3.1, um die Leistungen zu berechnen. Im Falle von Resonanz ergibt sich für die relative Leistung  $P_{circ}/P_{in}$  (Gleichung 3.3) bzw. nach analoger Rechnung  $P_{refl}/P_{in}$  (Gleichung 3.4) für die am Einkoppelspiegel reflektierte Leistung:

$$\frac{P_{circ}}{P_{in}} = \frac{T_1}{(1 - \sqrt{R_1 R_g \alpha_{ges}})^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{P_{refl}}{P_{in}} = \frac{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_g \alpha}}{(1 - \sqrt{R_1 R_g \alpha_{ges}})^2} \quad (3.4)$$

### Finesse

Die Finesse  $F$  ist ein allgemeines Maß für die Qualität eines Resonators. Sie hängt direkt von den Verlusten im Resonator und den Spiegelreflektivitäten ab. Zusammen mit dem freien Spektralbereich  $\nu_{FSR}$  (Gleichung 3.5) kann man die Linienbreite  $\Delta\nu$  des durch den Resonator transmittierten Laserlichts bestimmen. Der freie Spektralbereich  $\nu_{FSR}$  gibt den Frequenzabstand zweier benachbarter Transmissionslinien des Resonators an.

$$\nu_{FSR} = \frac{c}{2l} \quad (3.5)$$

$$\Delta\nu = \frac{\nu_{FSR}}{F} \quad (3.6)$$

Der einfachste Resonator besteht aus einem Einkoppel- und aus einem Auskoppelspiegel, zwischen denen sich eine Stehwelle ausbildet. Für diesen Fall lässt sich die transmittierte Intensität als die Summe der beim Auskoppelspiegel austretenden elektrischen Felder berechnen.  $E_0$  ist das einfallende elektrische Feld,  $\delta_0$  eine globale Phase,  $\delta$  ist die Phase, die bei jedem Umlauf akkumuliert wird,  $t$  und  $r$  sind die Transmissions- und Reflektionskoeffizienten des elektrischen Feldes der beiden Spiegel ( $r^2 + t^2 = 1$ ), die hier als identisch für jeden Spiegel angesetzt wurden. Für die transmittierte Leistung ergibt sich die Airy-Formel [18]:

$$I_{transmitted} = I_0 \frac{1}{1 + \left(\frac{2F}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\nu_{FSR}}\right)} \quad (3.7)$$

und die Finesse  $F$  für einen gefalteten Resonator:

$$F_{bowtie} = \frac{\pi}{2 \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{R_1 R_4 V}}{2\sqrt[4]{R_1 R_4 V}}\right)} \quad (3.8)$$

Allerdings wurden nur der Einkoppelspiegel  $R_1$  und der Auskoppelspiegel  $R_4$  separat betrachtet und die Verluste an den anderen beiden Spiegeln und im Kristall in einem Faktor  $V$  zusammengefasst. Diese Gleichung lässt sich im Fall eines Resonators aus zwei identischen Spiegeln und ohne übrige Verluste auf folgende Gleichung vereinfachen (es gilt  $\arcsin(x) \approx x$  für  $x \ll 1$ ):

$$F \approx \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \xrightarrow{R \approx 1} \frac{\pi}{1-R} \quad (3.9)$$

#### Impedanzanpassung

Dieser Abschnitt wurde unter anderem schon bei [30] behandelt und bei [29] findet sich eine genaue Herleitung. Allgemein muss man Impedanzanpassung vornehmen, um die Verluste (bei optimaler Modenanpassung) im Resonator auszugleichen. Diese Verluste kommen durch die endlichen Reflektivitäten der Spiegel und in unserem speziellen Fall durch die Konversion von Laserlicht zu Licht mit einer anderen Frequenz zustande. Ein Resonator ist mit seiner Impedanz perfekt angepasst, wenn kein Licht am Einkoppelspiegel des Resonators reflektiert wird. Nach Vergleich mit Gleichung 3.4 ist dies erfüllt, wenn

$$R_1 = R_g \alpha_{ges} \quad (3.10)$$

Aus Gleichung 3.10 kann man leicht erkennen, dass die Transmission des Pumplichts durch den Einkoppelspiegel bei guter Impedanzanpassung die Verluste, die das Licht bei einem Durchlauf im Resonator erfährt, genau kompensiert.

#### Umlaufende Leistung

Durch die hohen Reflektivitäten der Spiegel ( $R \approx 99.95\%$ ), kann das Licht sehr lange zwischen den Spiegeln *gefangen* sein, es kommt zu einer Leistungsüberhöhung im Resonator. Im Resonanzfall ist die im Resonator unlaufende Intensität  $I_{circ}$ :

$$I_{circ} = \frac{F}{\pi} I_0 \quad (3.11)$$

#### Modenanpassung

Neben der Impedanzanpassung muss auch die Modenanpassung erfüllt sein, um möglichst viel Leistung in den Resonator einzukoppeln. Dazu muss die Mode des Laserstrahls möglichst gut mit der Resonatormode überlappen. Aus numerischen Berechnungen kann der Strahldurchmesser der Resonatormode ermittelt werden. Mit Hilfe zweier Linsen, die sich vor dem Resonator befinden, wird die Lasermode iterativ der Resonatormode angepasst, bis ein Maximum der Leistung in den Resonator eingekoppelt wird.

#### Berechnung der konvertierten Leistung

Wir wissen nun, wie groß die zirkulierende Leistung bei gegebener Finesse und Eingangsintensität  $I_0$  (Leistung  $P_0$ ) im Resonator bei idealer Moden- und Impedanzan-

passung ist. Mit Hilfe der optimalen Transmittivität des Einkoppelspiegels aus Gleichung 3.3 und der Relation  $P = P_0/T_1$  für die umlaufende Leistung kann Gleichung 2.32 folgendermaßen umgeschrieben werden [32]:

$$P_{out,2\omega} = \frac{P_{0,\omega}}{(X_{FOM} + \sqrt{X_{FOM} + 1})^2} \quad (3.12)$$

$X_{FOM}$  ist eine einfache Kennzahl zur Berechnung der kontinuierlichen Leistung (*Figure Of Merit*):

$$X_{FOM}^2 = \frac{\alpha_{ges}^2}{4\kappa_{NL}P_0} \quad (3.13)$$

Aus Gleichung 3.12 erkennt man, dass man  $X_{FOM}$  möglichst klein machen muss, um eine hohe Ausgangsleistung zu erreichen. Dies kann man durch Optimieren von drei Parametern erreichen (siehe Gleichung 3.13). Als erstes sollte natürlich die Eingangsleistung so groß wie möglich sein, zweitens sollte der nichtlineare Koeffizient  $\kappa_{NL}$  groß sein und drittens muss man darauf achten, dass die übrigen Verluste im Resonator (z.B.: Spiegel) so klein wie möglich sind, um  $\alpha_{ges}$  zu minimieren.

### Geometrischer Aufbau des Resonators

Bei einem vorgegebenen Strahldurchmesser im Inneren des Konversionskristalls (siehe Kapitel 2.3) kann der geometrische Aufbau des Resonators mit Hilfe des ABCD-Matrizen Formalismus berechnet werden [18]. Dieses Transfermatrixmodell kommt aus der geometrischen Optik. Ein paraxialer Strahl wird vollständig charakterisiert durch den Achsenabstand  $r$  und die Steigung des Strahls  $\partial_z r$ . Mit Hilfe von Transformationsmatrizen kann man anschließend optische Elemente (Linsen,...) einbauen oder den Strahl frei propagieren lassen. Die gesamte Matrix ist das Produkt der einzelnen Matrizen  $M_{total} = M_n \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1$ .

$$\begin{pmatrix} r_b \\ \partial_z r_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_a \\ \partial_z r_a \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Dieses System lässt sich auch auf Gauß'sche Strahlen anwenden (siehe [33]). Allerdings wird der Strahl nicht mehr durch das Dublett  $r$  und  $\partial_z r$  charakterisiert, sondern durch den halben Strahldurchmesser  $w(z)$  und die Rayleigh Länge  $z_r$  ( $w(z_r) = \sqrt{2}w_0$ )<sup>1</sup>. Man kann diese beiden Parameter zu einer komplexen Größe  $q$  zusammenfassen. Der Wert  $q$  ist ein Maß sowohl für die Strahlkrümmung bzw. die Krümmung der Wellenfronten  $R(z)$  als auch ein Maß für den Strahlradius  $w(z)$ :

<sup>1</sup> $w_0$  ist der geringste Strahlradius, d.h der Strahlradius im Fokus des Strahls

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)} \quad (3.15)$$

Ein optisches System, welches den Strahl verändert, muss also diesen Parameter  $q$  ändern. Der Faktor  $q$  wird durch ein optisches System mit der Matrix ABCD transformiert in

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D} \quad (3.16)$$

Da wir allerdings einen Laserresonator betrachten und die Mode (gegeben durch  $q$ ) nach einem Umlauf idealerweise wieder in sich selbst übergeht, gilt  $q' = q$ . Gleichung 3.16 geht über in eine implizite Gleichung für  $q$ . Bei gegebenen Strahlparametern kann aus dieses anschließend die Resonatorgeometrie bestimmt werden.

## 3.2 Der IR-VIS Resonator

In diesem Kapitel wird nun auf die Erzeugung von Laserlicht bei 559 nm aus Licht bei 1118 nm eingegangen. Zuerst werden die einzelnen Parameter des Kristalls aufgezählt, anschließend der geometrische Aufbau des Resonators beschrieben und zum Schluss wird die Verdopplungseinheit charakterisiert. Der LBO Kristall wurde bei *Crystals of Siberia* gekauft, die Spiegel stammen von der Firma *Layertec*. Die Spiegel haben eine hochreflektierende Beschichtung  $R \approx 99,95\%$  bei 1120 nm. Der Einkoppelspiegel besitzt eine Reflektivität von  $R = 98,2\%$ . Die Größe des Kristalls ist  $4 \text{ mm} \times 4 \text{ mm} \times 18 \text{ mm}$ . Der Kristall besitzt zusätzlich noch eine Antireflex (AR) Beschichtung,  $R \approx 0,05\%$  laut Datenblatt. Der Kristallhalter besteht aus Edelstahl, geheizt wird dieser mittels Heizdraht (*Thermocoax*), die Temperatur wird mit einem PT100 Widerstand gemessen und mit Hilfe eines PID<sup>2</sup> Reglers konstant gehalten. Zusätzlich ist der Kristall noch mit Indium Folie umwickelt, um einen möglichst guten Wärmekontakt zum Kristallhalter zu gewährleisten. Eine Skizze des Kristallhalters ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

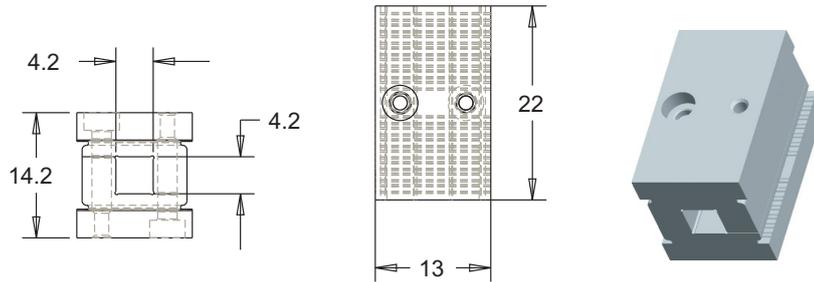
### 3.2.1 Kristallparameter

Hier wurde wieder auf das bereits erwähnte Programm *SNLO* zurückgegriffen. Zur Erzeugung von grünem Licht dient uns ein geheizter LBO Kristall. Die Kristallparameter lauten:

---

<sup>2</sup>PID: Proportional Integral Differential Regler, siehe [34].

### 3.2 Der IR-VIS Resonator



**Abbildung 3.2:** Skizze des LBO-Kristallhalters (Aluminium). Nicht eingezeichnet sind der Heizdraht und der Messwiderstand. Ebenfalls nicht zu sehen ist eine zusätzliche Teflon Ummantelung, um den Kristall vor kurzen äußeren Temperaturschwankungen zu schützen. Die Einheiten in der Zeichnung sind jeweils (mm).

LBO Kristall bei $T \approx 362 \text{ K}$			
	1118nm <i>o</i>	1118 nm <i>o</i>	559 nm <i>e</i>
Strahlabweichung (mrad)	0	0	0.44
Phasengeschwindigkeit <i>c</i> /	1.604	1.604	1.604
Temperaturakzeptanz (K/cm)	6.22		
lineare Absorption	<0.1%/cm @ 1064 nm		
Nichtlinearität (pm/V)	0.844		

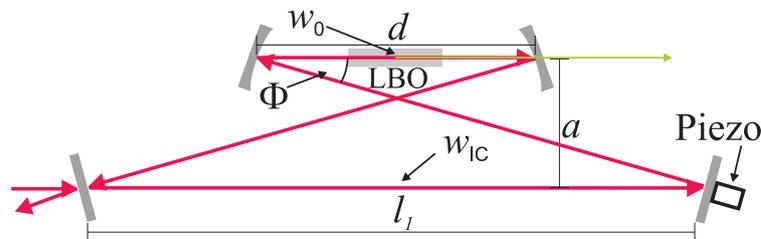
**Tabelle 3.1:** Wichtige Kristallparameter für LBO, *o* bzw. *e* bezeichnen den ordentlichen bzw. den außerordentlichen Strahl im Kristall.

Die Temperatur des Kristalls wurde derart gewählt, dass mit  $90^\circ$  nicht kritische Phasen Anpassung gewährleistet ist. Die Strahlabweichung beträgt bei  $T \approx 362 \text{ K}$  ca.  $0,33 \text{ mrad}$ . Die Temperaturakzeptanz liegt bei  $6,22 \text{ K/cm}$ . Wie man sieht, handelt es sich hier um *nicht kritische  $90^\circ$  Phasen Anpassungsbedingung* der Art ooe.

Mit Hilfe der Boyd-Kleinmann Theorie wird der Faktor  $\kappa_{NL}$  berechnet (siehe Gleichung 2.32) und daraus der optimalen Strahldurchmesser im Inneren des Kristalls ermittelt. Nach Einsetzen obiger Parameter, unserer Kristalllänge ( $l=1,8 \text{ cm}$ ) und des linearen Absorptionskoeffizienten von LBO  $\alpha_{LBO}$  kommt man auf einen Strahldurchmesser von  $2w_0 \approx 52 \mu\text{m}$ .

### 3.2.2 Resonatorgeometrie

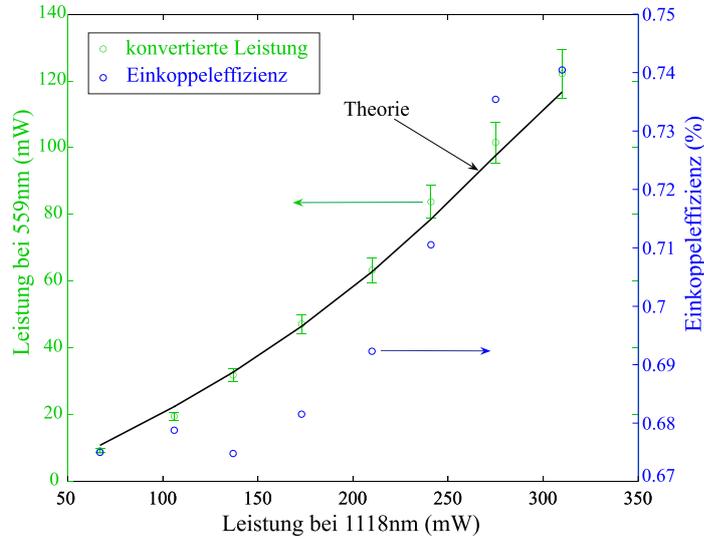
Mit dem ABCD-Matrizen Formalismus werden die Resonatorparameter (Winkel der Spiegel, Spiegelabstand) bestimmt, wobei man vom im Kristall zu erzeugenden Strahlradius ausgeht. Als weitere Randbedingung kommt hinzu, dass der Resonator stabil gegen kleine Abstandsänderung sein sollte (großer Stabilitätsbereich). Das führt zu einem Spiegel Krümmungsradius von  $R=50$  mm. Der Winkel  $\Phi$  sollte bei einem plan/plan-Kristall so flach wie möglich sein, um Astigmatismus bei der Reflexion der Mode an den gekrümmten Spiegeln zu vermeiden. Danach variiert man die Abstände  $d$  und  $l_1$  bis man einen Satz an Parametern gefunden hat, der sowohl geometrische Einschränkungen als auch das oben genannte Stabilitätskriterium erfüllt. Für den Abstand der gekrümmten Spiegel ergibt sich  $d = 6$  cm und für den Abstand der planen Spiegel  $l_1 = 12$  cm. In Abbildung 3.3 ist dies veranschaulicht.



**Abbildung 3.3:** Wichtige Größen der Resonatorgeometrie. Die Parameter  $a$ , und der Winkel  $\Phi$  werden variiert, gegeben sind der Strahlradius  $w_0$  und der Abstand der gekrümmten Spiegel  $d=6$  cm sowie deren Krümmungsradius  $R=50$  mm. Es ergibt sich  $a \approx 36$  mm,  $w_{IC} \approx 170\mu\text{m}$  und  $\Phi = 21^\circ$ , für den Abstand  $l_1$  ergibt sich  $l_1 = 12$  cm. Der zweite plane Spiegel ist auf einem Piezokristall montiert, um die Resonatorlänge durchstimmen zu können.

### 3.2.3 Messung der Verluste

Damit man das Experiment mit der Theorie vergleichen kann, müssen die Verluste im Resonator bestimmt werden. Ohne Kristall besitzt der Resonator eine Finesse von  $F \approx 250$ . Mit Hilfe von Gleichung 3.8 und den bekannten Spiegelreflektivitäten sowie der Verluste an der Kristalloberfläche können die übrigen Verluste im Resonator bestimmt werden  $V < 0.45 \pm 0.1\%$ .



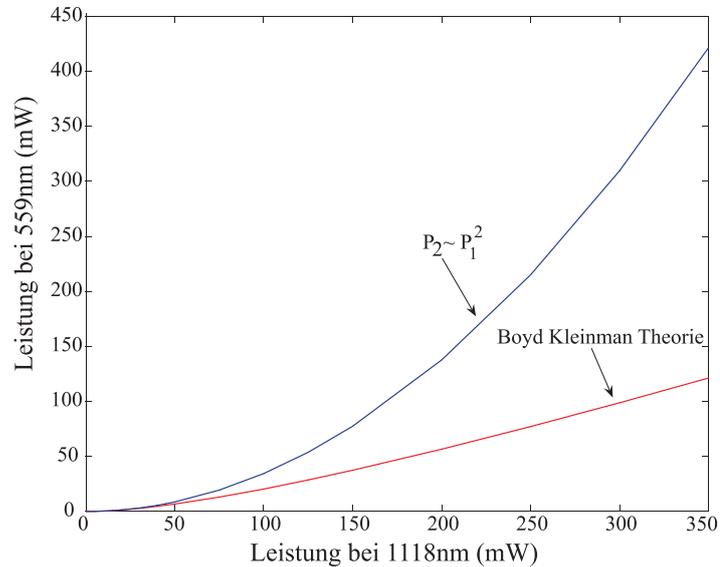
**Abbildung 3.4:** Ausgangsleistung der IR-VIS Frequenzverdopplung als Funktion der Pumpleistung. Die blauen Punkte beziehen sich auf die Einkoppeleffizienz. Da diese mit zunehmender Pumpleistung zunimmt, kann man schließen, dass diese erhöht werden bzw. ein Einkoppelspiegel mit höherer Reflektivität verwendet werden müsste. Die grüne Punkte stellen die Messdaten dar, die durchgezogene Linie bezeichnet die theoretische Kurve.

### 3.2.4 Ausgangsleistung

Mit den gegebenen Verlustkoeffizienten und dem linearen Absorptionskoeffizienten  $\alpha_{LBO}$  von LBO (aus der Literatur) kann das Experiment mit der Theorie verglichen werden. In Abbildung 3.4 ist die theoretische Kurve der gemessenen gegenübergestellt. Die theoretische Kurve wurde mittels den bekannten Parametern des Resonators und des Kristalls mit Hilfe von Gleichung 3.12 aufgestellt. Es ist zu sehen, dass die Einkoppeleffizienz bei zunehmender Pumpleistung größer wird. Das bedeutet, dass ein Einkoppelspiegel mit zu hoher Transmittivität verwendet wird bzw. zu wenig Pumpleistung zur Verfügung steht. Leider besitzen wir keinen Einkoppelspiegel mit höherer Reflektivität und der Faserlaser arbeitet bei höherer Leistung nicht mehr stabil. Bei einer theoretischen verfügbaren Leistung von  $P_{IR} \approx 1 \text{ W}$  würde man eine Leistung von  $P_{VIS} \approx 470 \text{ mW}$  erwarten. Abbildung 3.5 zeigt den Vergleich der Boyd Kleinman Theorie mit dem vereinfachten Ansatz zur Frequenzverdopplung aus Gleichung 2.9 bzw. 2.10. Der einfache Ansatz geht von einem rein quadratischen Zusammenhang zwischen Pump- und konvertierter Leistung aus, der Ansatz in Gleichung 3.12 berücksichtigt bereits den Effekt der Pumpwellenabschwächung, d.h. die Abnahme der

### 3 Der Laser Aufbau

Intensität des Pumplichts auf Grund von Konversion.



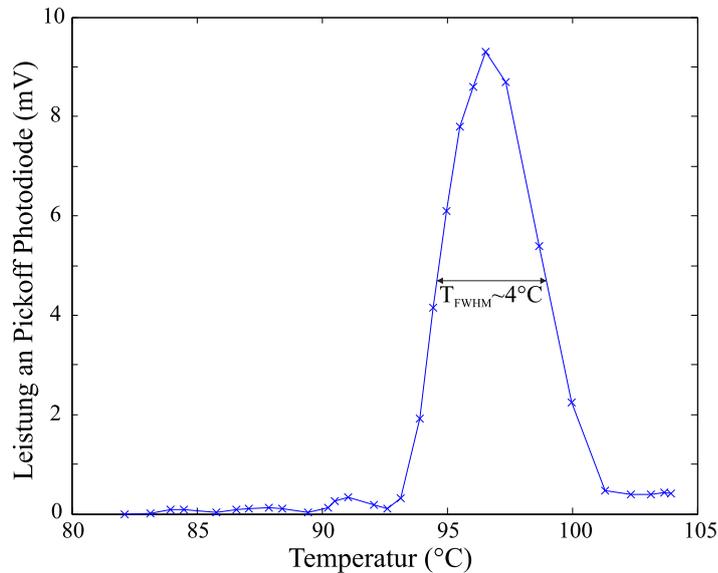
**Abbildung 3.5:** Die Boyd Kleinman Theorie (rote Kurve) ist hier einer rein quadratischen Abhängigkeit (dunkelblaue Kurve) gegebenübergestellt. Die Boyd Kleinman Kurve entspricht derjenigen in Abbildung 3.4. Bei der zweiten Kurve wurde eine quadratische Funktion an die ersten fünf Punkte der Boyd Kleinman Kurve gefittet und danach extrapoliert. Die Abweichung ist mit der Pumpwellenabschwächung (engl. *pump depletion*) im Kristall bei zunehmender Konversion zu erklären, siehe [27].

#### 3.2.5 Temperaturabhängigkeit der Phasenanpassungsbedingung

Im vorigen Abschnitt 3.2.4 wurde die Abhängigkeit der Leistung in der 2. Harmonischen von der Leistung des Pumplichts demonstriert und dem theoretischen Modell gegenübergestellt. In diesem Abschnitt soll nun die konvertierte Leistung in Abhängigkeit der Phasenanpassung untersucht werden. Zu diesem Zweck wurde die Temperatur des LBO Kristalls schrittweise verändert und die Leistung des verdoppelten Lichtes mit einer Photodiode nach dem Resonator gemessen. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.6 zu sehen. Man kann die bereits bekannte  $\text{sinc}^2$ -Abhängigkeit der Konversionseffizienz erkennen, siehe Gleichung 2.26. Als experimentelles Ergebnis für die Temperaturbandbreite ergibt sich ein Wert von  $T_{FWHM,exp} \approx 4^\circ\text{C}$ , der theoretische Wert liegt bei  $T_{FWHM,theo} \approx 3.41^\circ\text{C}$ . Innerhalb dieser gemessenen Temperaturbandbreite ist die *nicht kritische  $90^\circ$  Phasenanpassungsbedingung* praktisch immer gut erfüllt und es kann effizient Frequenzverdopplung betrieben werden. Die höhere gemessene Breite

### 3.2 Der IR-VIS Resonator

der Temperaturabhängigkeit kann mit Inhomogenitäten in der Temperaturverteilung im Kristall erklärt werden. Durch diese Inhomogenitäten wird die Kurve breiter, da auch bei einer Temperatur, bei der eigentlich keine Konversion mehr stattfinden kann, ein Teil des Kristalls noch die richtige Temperatur besitzt.



**Abbildung 3.6:** Ausgangsleistung des grünen Lichts in Abhängigkeit von der Temperatur (und damit für unterschiedliche Phasenanpassungsbedingung). Die Temperaturwerte auf der horizontalen Achse sind nur relative Werte, die wahre Temperatur kann durchaus um 1 bis 2 °C abweichen. Dies kommt daher, dass die Temperatur mit einem anderen Widerstand gemessen wurde als im Regelbetrieb.  $T_{FWHM}$  gibt die Breite der Temperaturverteilung bei halber Höhe der Verteilung an. Aus dem Experiment ergibt sich  $T_{FWHM,exp} \approx 4^\circ\text{C}$ , der theoretischen Wert ist  $T_{FWHM,theo} \approx 3.41^\circ\text{C}$ .

### 3.3 Der VIS-UV Resonator

Mit dem VIS-UV Resonator soll das Licht bei  $\lambda = 559 \text{ nm}$  nochmals verdoppelt werden, um UV Licht bei  $\lambda = 279.5 \text{ nm}$  zu erhalten. Dazu werden wieder die Kristallparameter und die Resonatorgeometrie analog zum vorigen Abschnitt 3.2 ermittelt. Es handelt sich hierbei um kritische Typ I Phasenanpassung der Art ooe. Zusätzlich wird noch die Astigmatismuskompensation besprochen, siehe Kapitel 3.3.2. Die Resonatorspiegel haben eine hochreflektierende Beschichtung bei  $560 \text{ nm}$   $R \approx 99,9\%$ . Der Einkoppelspiegel besitzt eine Reflektivität von  $R = 98,25\%$ . Die Spiegel stammen von *Layertec* und der Kristall von *Crystals of Siberia*.

#### 3.3.1 Kristallparameter

Mit Hilfe es Programms *SNLO* wurden wiederum die Kristallparameter für  $\text{BBO}^3$  ermittelt.

BBO Kristall bei $T \approx 300 \text{ K}$			
	559nm o	559 nm o	279.5 nm e
Strahlabweichung (mrad)	0	0	84.59
Phasengeschwindigkeit c/	1.672	1.672	1.604
lineare Absorption	<1%/cm @ 532 nm		
Nichtlinearität (pm/V)	1.81		

**Tabelle 3.2:** Kristallparameter für BBO, *o* bzw. *e* bezeichnet den ordentlichen bzw. den außerordentlichen Strahl im Kristall.

Der BBO Kristall wird im Gegensatz zum LBO Kristall nicht geheizt, da die Brechungsindizes nur eine äußerst geringe Temperaturabhängigkeit aufweisen, d.h. die Strahlabweichung ändert sich nicht, wenn man den Kristall heizt.

Mit Hilfe der Boyd-Kleinmann Theorie kann man den Faktor  $\kappa_{NL}$  (Gleichung 2.32) und damit den optimalen Strahldurchmesser im Inneren des Kristalls berechnen. Dies wurde analog zum vorigen Abschnitt 3.2 durchgeführt.

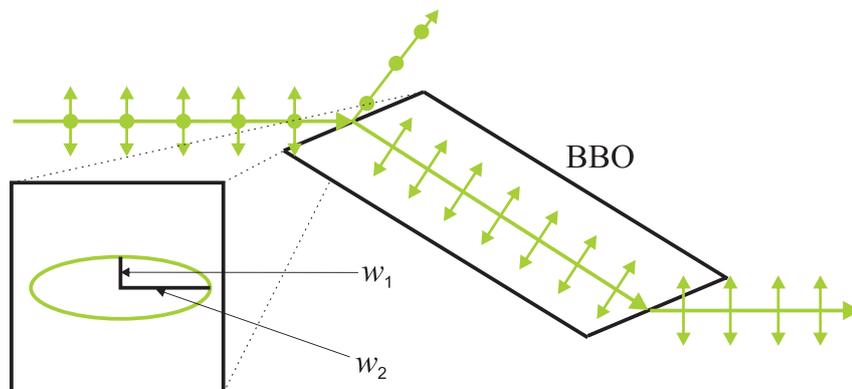
Nach Einsetzen obiger Parameter, unserer Kristalllänge ( $l = 10 \text{ cm}$ ) und des linearen Absorptionskoeffizienten von BBO ( $\alpha_{BBO}$ ) ergibt sich ein optimaler halber Strahldurchmesser im Kristallinneren  $w_0 \approx 16 \mu\text{m}$ .

---

<sup>3</sup> $\beta$ -Barium-Borat

### 3.3.2 Astigmatismuskompensation

Der BBO Kristall besitzt einen Brewster Schnitt, d.h. durch richtiges Positionieren des Kristalls erfährt eine Polarisationsrichtung praktisch keine Reflexion beim Übergang Luft-Kristall (Brewster Winkel  $\theta_C \approx 36,7^\circ$ ), wodurch die Antireflexbeschichtung des Kristalls ersetzt wird. Dies ist notwendig, da bei den hier verwendeten Wellenlängen zur Zeit keine ausreichend guten AR Beschichtungen verfügbar sind. Allerdings bringt dieser Schnitt auch Nachteile mit sich: es entsteht Astigmatismus. Dies bedeutet, dass aus einem Gauß'schen Strahl mit rundem Profil ein Strahl mit elliptischem Profil wird, siehe Abbildung 3.7. Beim Durchgang des Lichts durch den Kristall sehen die beiden Ebenen des Strahls unterschiedliche optische Weglängen, daher ist der Strahl beim Austritt aus dem Kristall immer noch leicht elliptisch. Allerdings akkumuliert sich dieser Effekt bei vielen Umläufen im Resonator und führt so zu hohen Verlusten oder sogar zu Resonatorinstabilitäten. Diesen Astigmatismuseffekt kann man aber mit Hilfe von ebenfalls astigmatistisch wirkenden optischen Elementen kompensieren. In diesem Fall sind dies die beiden gekrümmten Spiegel zu beiden Seiten des Kristalls. Die Argumentationsweise kann hier allerdings auch umgedreht werden: mit Hilfe des Kristalls lässt sich der Astigmatismus des gekrümmten Spiegel kompensieren. Durch geschickte Wahl der Resonatorgeometrie, insbesondere des Winkels der gekrümmten Spiegel (der Kompensationswinkel  $\Theta_{komp}$ ), kann also Astigmatismus vermieden werden [35].



**Abbildung 3.7:** Entstehung des Astigmatismuseffekts. Ein einfallender Laserstrahl mit zwei orthogonalen Polarisationen bezüglich der Einfallsebene trifft auf einen Kristall mit Brewster Schnitt. Dabei wird nur eine Polarisation transmittiert. Allerdings entsteht dadurch ein elliptisches Strahlprofil, welches zu Resonatorinstabilitäten führen kann. Die Strahlparameter  $w_{1,2}$  sind nach dem Kristall nicht mehr gleich,  $w_1 \neq w_2$ . Es kommt zu Astigmatismus.

### 3 Der Laser Aufbau

Eine Herleitung von Gleichung 3.17 für den Kompensationswinkel findet sich zum Beispiel in [35] und [29].  $R$  bezeichnet die Krümmungsradien der Spiegel,  $l$  ist die Resonatorlänge und  $n$  ist der Brechungsindex des Kristalls. Eine grafische Darstellung des Winkels  $\Theta_{komp}$  ist in Abbildung 3.8 zu sehen.

$$\cos(\Theta_{komp}) = \sqrt{1 + \left(\frac{lN}{2R}\right)^2} - \frac{lN}{2R} \quad (3.17)$$

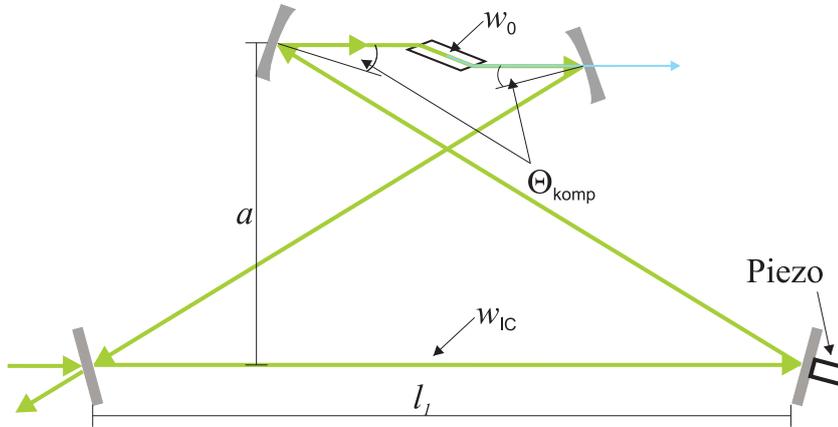
$$N = \frac{(n^2 - 1)\sqrt{n^2 + 1}}{n^4} \quad (3.18)$$

#### 3.3.3 Resonatorgeometrie

Hier wurde die Resonatorgeometrie ebenfalls wieder mit Hilfe des ABCD Matrizen Formalismus berechnet. Im Unterschied zum Resonator in Abschnitt 3.2.2 spielt hier der Winkel der gekrümmten Spiegel eine entscheidende Rolle, da Astigmatismus vermieden werden soll. Eine grafische Darstellung der Geometrie ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Der Kompensationswinkel ist  $\theta_{komp} \approx 15,8^\circ$ , der Abstand der planaren Spiegel beträgt  $l_1 = 13$  cm und der Abstand der Strahlen zwischen den gekrümmten und den planaren Spiegel ist  $a \approx 57.8$  mm. Bei dieser Wahl der Resonatorparameter beträgt der Strahlradius zwischen den gekrümmten Spiegeln  $w_0 \approx 16 \mu\text{m}$  und zwischen den planaren Spiegeln  $w_{IC} \approx 165 \mu\text{m}$ . Der zweite planare Spiegel ist wiederum auf einem Piezokristall befestigt, um die Resonatorlänge durchstimmen zu können.

#### 3.3.4 Messung der Verluste

Zur Messung der Verluste im Resonators, wurde analog zu Abschnitt 3.2.4 vorgegangen. Das Problem im Gegensatz zum LBO Resonator ist, dass die Finesse nicht ohne Kristall gemessen werden kann, da der Resonator ohne dem Kristall außerhalb des Stabilitätsbereichs liegt. In diesem Fall wurde die Finesse bei sehr geringen Leistungen bestimmt, um die Verluste durch Konversion möglichst gering zu halten. Bei einer Pumpleistung von  $P_{559\text{nm}} \approx 17.2$  mW ergibt sich eine Finesse von  $F \approx 211$ . Bei der Berechnung der Verluste muss man hier allerdings berücksichtigen, dass ein Teil des grünen Lichts an der Kristalloberfläche reflektiert wird, da dieser ja einen Winkel mit dem Pumplicht einschließt. Aus der Finesse und der Einkoppeleffizienz (58% bei 17.2mW) kann die zirkulierende Leistung gemessen werden. Zusammen mit dem an der Kristalloberfläche reflektierten Licht  $P_b \approx 2.5$  mW kann man diese Verluste  $V_{Ko}$  (Ko... Kristalloberfläche) bestimmen, siehe hierzu Gleichungen 3.19 und 3.20.



**Abbildung 3.8:** Geometrie für den VIS-UV Resonator.  $\Theta_{komp} \approx 15,8^\circ$  ist der Kompensationswinkel,  $l_1 = 130 \text{ mm}$  ist der Abstand der beiden planaren Spiegel und  $a \approx 57,8 \text{ mm}$  ist der Abstand der beiden Strahlen zwischen den planaren bzw. den gekrümmten Spiegeln. Die Strahldurchmesser sind  $2w_{IC} \approx 330 \mu\text{m}$  und  $2w_0 \approx 32 \mu\text{m}$ .

$$P_{circ} = 17.2 \cdot 0.58 \cdot \frac{211}{\pi} \approx 671 \pm 40 \text{ mW} \quad (3.19)$$

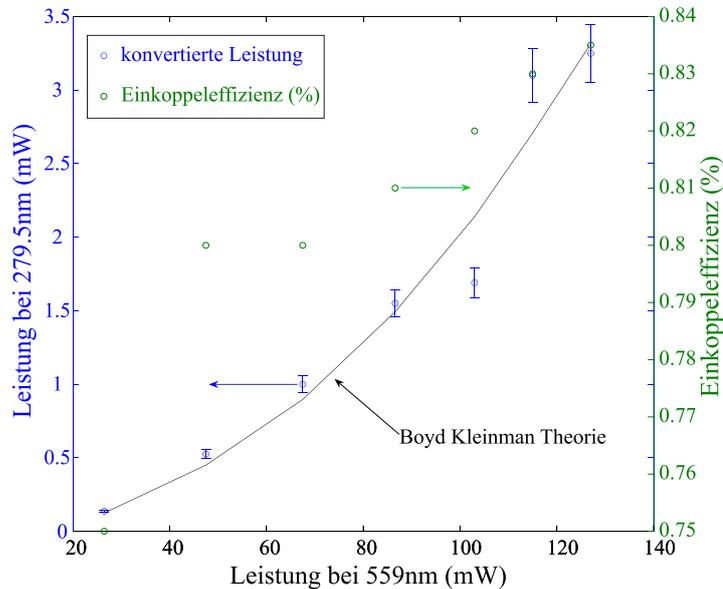
$$V_{Ko} = 1 - \frac{2.5}{671} \approx 0.996 \pm 0.006 \rightarrow 99.6 \pm 0.6\% \quad (3.20)$$

Mit Gleichung 3.8 und den bekannten Parametern (Spiegelreflektivitäten, linearer Absorptionskoeffizient,  $V_{Ko}$ ) können wiederum die übrigen Verluste bestimmt werden  $V \approx 0.55 \pm 0.1\%$ .

### 3.3.5 Ausgangsleistung

Da nun die gesamten Verluste bekannt sind, kann man wieder die theoretische Kurve mit Gleichung 3.12 berechnen. Abbildung 3.9 zeigt den Vergleich des Experiments mit der Theorie, es konnte eine gute Übereinstimmung erreicht werden. Allerdings ist auch wieder zu erkennen, dass die Einkoppeleffizienz mit zunehmender Pumpleistung steigt, analog zur ersten Verdopplungseinheit. Es müsste also hier ebenfalls ein Einkoppelspiegel mit höherer Reflektivität bzw. mehr Leistung im Grünen verwendet werden. Wenn man die theoretisch verfügbare Pumpleistung von  $P_{VIS} \approx 470 \text{ mW}$  verwendet, ergibt sich eine Leistung von  $P_{UV} \approx 31 \text{ mW}$ .

### 3 Der Laser Aufbau



**Abbildung 3.9:** Ausgangsleistung der VIS-UV Frequenzverdopplung als Funktion der Pumpleistung. Die theoretische Kurve aus der Boyd Kleinman Theorie ist hier den experimentell gemessenen Werten gegenübergestellt. Die grünen Punkte beziehen sich auf die Einkoppeleffizienz.

### 3.4 Der Hänsch-Couillaud Lock

Damit die Resonatorlänge stabil in seiner Länge bleibt und Frequenzverdopplung im Dauerbetrieb arbeiten kann, muss der Resonator stabilisiert werden. Es gibt für diese Anwendung zwei weit verbreitete Methoden:

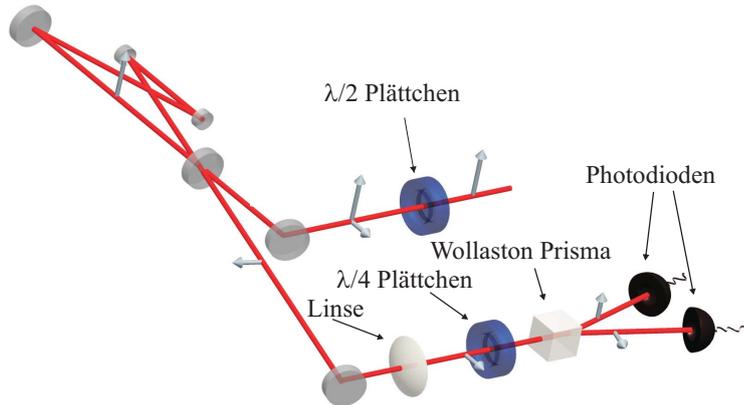
- Pound Drever Hall Verfahren (PDH) [36]
- Hänsch Couillaud Verfahren (HC) [37]

Am weitesten verbreitet und am robustesten ist vermutlich die PDH-Stabilisierung, allerdings braucht man für diesen einen separaten EOM, auf welchen wir in unserem Aufbau verzichten wollen.

Die HC Stabilisierungsmethode wurde eigentlich dafür entwickelt, einen Laser auf einen externen Resonator zu stabilisieren. In unserem Fall wird das Prinzip umgedreht und der Resonator auf die Laserfrequenz stabilisiert. Die HC Methode kann als ein Phasendetektor verstanden werden. Die gesamte Polarisation betrachten wir als Überlagerung von zwei senkrechten Polarisierungen mit unterschiedlicher Amplitude, wobei der Anteil senkrecht zum optischen Tisch zur Frequenzverdopplung dient.

### 3.4 Der Hänsch-Couillaud Lock

Die *falsche* Polarisation, welche nicht in den Resonator passt, wird am Einkoppelspiegel reflektiert und dient als Referenzsignal. Das am Einkoppelspiegel reflektierte Licht wird auf ein  $\lambda/4$ -Plättchen und anschließend auf einen polarisierenden Strahlteiler geschickt (in unserem Fall ein Wollaston Prisma). Auf diesen folgen zwei Photodioden zur Differenzsignalmessung. In Abbildung 3.10 ist der Aufbau schematisch dargestellt.



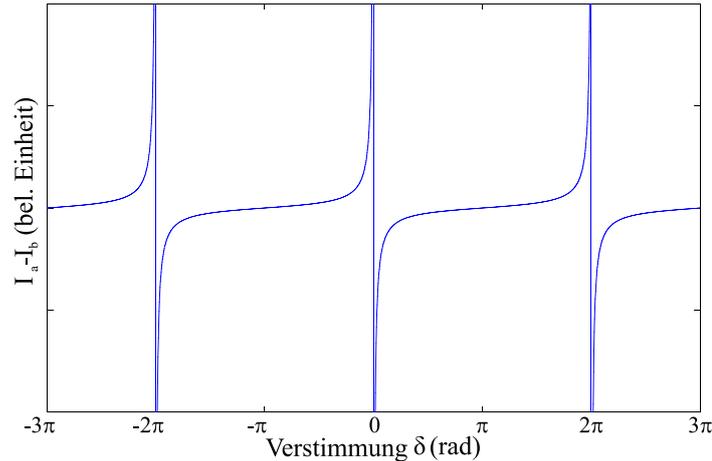
**Abbildung 3.10:** Schematische Aufbau der HC Stabilisierung des Resonators. Zur Erzeugung der *falschen* Polarisation muss man vor dem Resonator zusätzlich ein  $\lambda/2$ -Plättchen einbauen. Das  $\lambda/4$ -Plättchen muss so eingestellt sein, dass weit weg von der Resonanz des Resonators zirkuläres Licht entsteht.

Weit weg von der Resonanz werden sowohl die falsche als auch die richtige Polarisation am Einkoppelspiegel um  $\pi$  verschoben. Das  $\lambda/4$ -Plättchen wird so eingestellt, dass danach zirkuläres Licht entsteht. Dadurch sehen die beiden Photodioden dieselben Intensitäten und das Signal verschwindet. Auf Resonanz erfährt das eingekoppelte Licht im Resonator einen Phasenschub von  $\delta = 2m\pi$  wenn es am Einkoppelspiegel nach einem Umlauf wieder ausgekoppelt wird. Das Licht, welches anschließend auf das  $\lambda/4$ -Plättchen trifft hat aber immer noch dieselbe Polarisationsachse wie weit weg von der Resonanz. Daher ist das Fehlersignal wieder 0. Wenn sich aber nun die Resonatorlänge langsam von der Resonanz wegbewegt, akkumuliert das eingekoppelte Licht eine etwas andere Phase  $\delta$  und daher hat das Licht vor dem  $\lambda/4$ -Plättchen eine andere Polarisationsachse. Hierdurch ist das Licht nach dem Strahlteiler elliptisch polarisiert und die Photodioden sehen unterschiedliche Intensitäten. Die Gleichung für das Differenzsignal lautet [37]:

$$I_a - I_b \propto \frac{TR \sin(\delta)}{(1 - R)^2 4R \sin^2(0.5\delta)} \quad (3.21)$$

### 3 Der Laser Aufbau

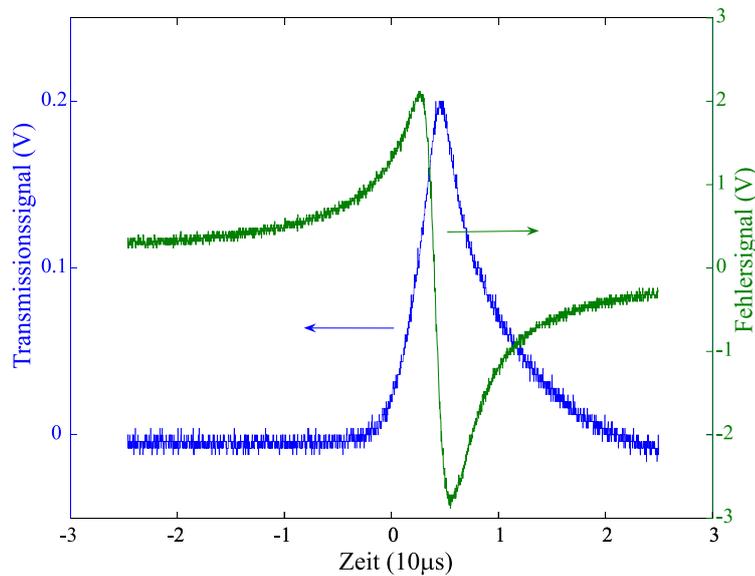
$T$  ist die Transmittivität des Einkoppelspiegels und  $R$  bestimmt die gesamten Verluste innerhalb des Resonators, welche die Finesse bestimmen (Gl. 3.9). Der Parameter  $\delta$  ist die Phase des eingekoppelten Lichts und  $I_a$  bzw.  $I_b$  sind die Intensitäten an den Photodioden. In Abbildung 3.11 ist das theoretische Signal und in Abbildung 3.12 ist das gemessene Fehlersignal zu sehen.



**Abbildung 3.11:** Theoretisches Fehlersignal. Zu sehen ist das Fehlersignal für die HC-Stabilisierung, in Abhängigkeit der Verstimmung des Resonators  $\delta$ . Die Breite des Signals wird durch die Finesse des Resonators bestimmt.

### 3.5 Der gesamte Aufbau

Nachdem in den vorigen Abschnitten die einzelnen Frequenzverdopplungseinheiten beschrieben und charakterisiert wurden, werden diese *einzelnen Bauteile zu einem großen Ganzen* zusammengesetzt. Der gesamte Aufbau des UV Lasers ist in Abbildung 3.13 zu sehen. Angefangen bei dem Faserlaser bei  $\lambda = 1118$  nm geht das Licht über einen optischen Isolator in den Resonator zum geheizten LBO Kristall, wo Laserlicht bei  $\lambda = 559$  nm erzeugt wird. Das hier erzeugte Licht wird durch einen zusätzlichen EOM zum BBO Resonator geschickt, wo Laserlicht bei  $\lambda = 279.5$  nm entsteht. Dieses Licht wird anschließend in Richtung des gefangenen Ions geschickt. Der EOM ist notwendig, um Seitenbänder bei 9.2 GHz auf das Laserlicht aufzumodulieren. Diese werden benötigt, um spezielle Übergänge im Magnesium Ion nutzen zu können, siehe Kapitel 4.3.3. Zur Stabilisierung der Laserfrequenz wird ein Teil des grünen Lichts nach dem LBO Resonator abgezweigt und zur Doppler-freien Sättigungsspektroskopie



**Abbildung 3.12:** Transmissionssignal zusammen mit dem Signal der Differenzphotodioden der HC-Stabilisierung. Der Nulldurchgang des Dispersionssignals befindet sich bei maximaler Transmission. Mit dem Nulldurchgang dieses Signals kann anschließend die Resonatorlänge zusammen mit einem PID Regler stabilisiert werden. Die Asymmetrie des Transmissionssignal ist auf die Trägheit der Photodiode zurückzuführen. Bei dieser Messung wurde die Resonatorlänge mit dem Piezokristall periodisch verstimmt, wodurch eine Verstimmung des Resonators erreicht wurde (daher die Zeitskala auf der x-Achse).

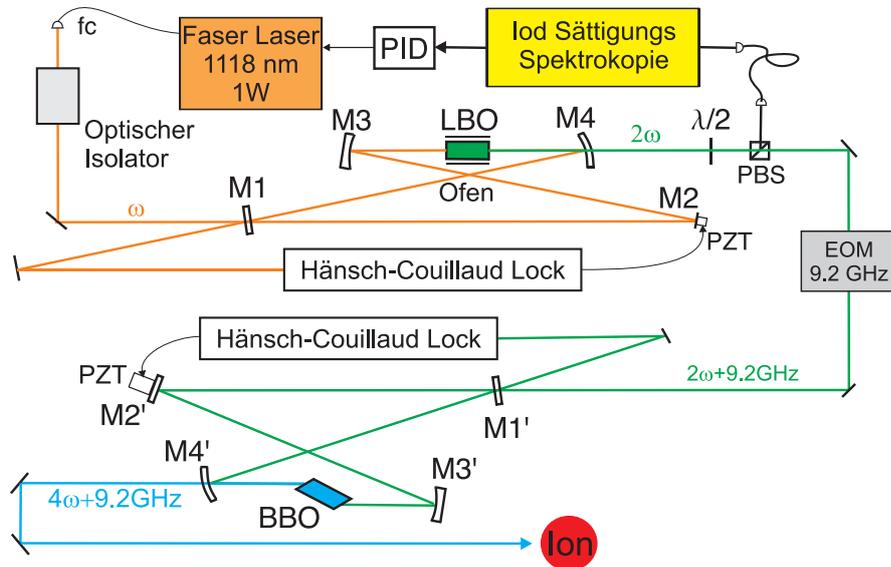
an Iod ( $I_2$ ) geleitet. Die Resonatoren werden mittels der Hänsch-Couillaud Methode stabilisiert, siehe Kapitel 3.4.

## EOM

Der EOM wird verwendet, um Seitenbänder im Abstand von  $\pm 9.2$  GHz auf den Laser aufzuprägen. Die Seitenbänder und das Trägersignal werden zum Kühlen bzw. Rückpumpen der gefangenen Ionen benutzt, siehe Abschnitt 4.3. Die Resonatorlänge für die Konversion von grünem zu UV Licht muss daher so gewählt werden, dass die Seitenbänder und das Trägersignal gleichzeitig resonant sind. Das modulierte elektrische Feld besitzt folgende Form:

$$E = E_0 e^{i\omega_L t} e^{im \cos(\Omega_m t)} \quad (3.22)$$

### 3 Der Laser Aufbau



**Abbildung 3.13:** Darstellung des gesamten Aufbaus, von der Quelle des IR Lichts bis zum UV Resonator. Die Stabilisierung der Resonatoren erfolgt mittels der Hänsch-Couillaud Methode. Der EOM, welcher bei 9.2 GHz betrieben wird, erzeugt Seitenbänder zur Manipulation der Magnesium Ionen und die Sättigungsspektroskopie an Iod wird benötigt, um die Frequenz des Faserlasers zu stabilisieren.

$\Omega_m$  ist die Modulationsfrequenz,  $m$  ist der Modulationsindex und  $\omega_L$  ist die Laserfrequenz. Nach der Verdopplung hat das elektrische Feld die folgende Form:

$$E^2 = E_0^2 e^{i2\omega_L t} e^{i2m \cos(\Omega_m t)} \quad (3.23)$$

Der EOM kann vor der zweiten Verdopplungseinheit positioniert werden, da die Seitenbänder bei Verdopplung den Abstand zum Trägersignal beibehalten, es wird nur der Modulationsindex verdoppelt (siehe Gleichung 3.23). Wir verwenden einen EOM der Firma *New Focus*, Modell 4581. Dieser EOM besitzt eine Öffnung für den Laserstrahl von  $1 \text{ mm} \times 2 \text{ mm}$ . Der ideale Strahldurchmesser beträgt laut Datenblatt ca.  $2/3$  der Apertur, also ca.  $660 \mu\text{m}$ , wobei darauf zu achten ist, dass der Strahl möglichst kollimiert ist. Mit Hilfe eines Linsensystems vor dem EOM wurde der Strahldurchmesser angepasst. Der EOM befindet sich zusätzlich auf einem 4-Achsen Verschiebetisch. Der 9.2 GHz Oszillator ist eine Sonderanfertigung der Firma *Kuhne Elektronik*. Nach Optimieren der Strahlparameter und der EOM Position konnte ein Verhältnis von Seitenband zu Trägersignal von ca. 10% erreicht werden. Anschließend musste die

### *3.5 Der gesamte Aufbau*

Resonatorlänge verändert werden, damit die beiden Signale (Träger und Seitenband) gleichzeitig resonant sind. Allerdings haben wir keine Möglichkeit, die Seitenbänder nach der Frequenzverdopplung spektral direkt aufzulösen, diese können leider erst bei der Manipulation der Magnesium Ionen in der Falle nachgewiesen werden.



## 4 Atom-Licht Wechselwirkung

In diesem Kapitel wird auf die Atom-Licht-Wechselwirkung und anschließend auf das Magnesium Ion  $^{25}\text{Mg}^+$  eingegangen. Im Anschluss werden in Abschnitt 4.4 auf Simulationen zur Seitenbandkühlung an  $^{25}\text{Mg}^+$  vorgestellt.

### 4.1 Theorie

Der hier verwendete Ansatz für die Beschreibung der Wechselwirkung von Licht mit Materie ist ein semiklassischer, d.h. das Atom wird quantenmechanisch, das Lichtfeld hingegen klassisch behandelt. Die Ausgangsgleichung für jedes quantenmechanische System ist die Schrödingergleichung<sup>1</sup>, die es zu lösen gilt (ohne Dämpfung):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = (H_{atom} + H_{int}) \Psi(r, t) \quad (4.1)$$

$H_{atom}$  bezeichnet den Hamiltonoperator des freien Atoms und  $H_{int}$  ist der Wechselwirkungsoperator, der die Interaktion des Atoms mit dem Lichtfeld beschreibt. Wenn man nur Dipolübergänge im Atom, hervorgerufen durch das Lichtfeld, betrachtet, ergibt sich für  $H_{int}$ :

$$H_{int} = -\vec{d}\vec{E}(t) = -\vec{d}\vec{e}E_0 \cos(\omega_L t) \quad (4.2)$$

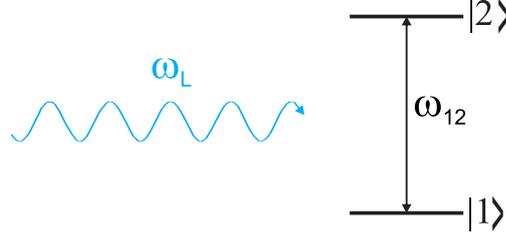
Hier wurde bereits die Dipolnäherung angewendet, d.h. man vernachlässigt die Ortsabhängigkeit des elektrischen Feldes  $\vec{E}(r, t) \rightarrow \vec{E}(t)$ , da die Wellenlänge des Lichts sehr viel größer ist als die räumliche Ausdehnung des Atoms. Der Vektor  $\vec{d}$  ist das Dipolmoment des Übergangs und ist ein Maß für die Kopplungsstärke zwischen zwei Niveaus.  $E_0$  ist die Amplitude des Feldes,  $\vec{e}$  der Polarisationsvektor des elektrischen Feldes (auf 1 normiert) und  $\omega_L$  ist die Laserfrequenz. Für ein einfaches 2-Niveau System, siehe Abbildung 4.1, kann man den Lösungsansatz in Gleichung 4.3 wählen.

$$\Psi(r, t) = c_1(t)e^{-i\omega_1 t}u_1(r) + c_2(t)e^{-i\omega_2 t}u_2(r) \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Operatoren in der Quantenmechanik werden üblicherweise mit  $\hat{O}$  bezeichnet. Allerdings wird hier der Einfachheit wegen nur  $O$  geschrieben.

#### 4 Atom-Licht Wechselwirkung



**Abbildung 4.1:** Schematische Darstellung eines 2 Niveausystems mit der Übergangsfrequenz  $\omega_{12}$  und eines einfallenden Laserlichts mit der Frequenz  $\omega_L$ .

Die Frequenzen  $\omega_{1,2}$  sind die Absolutfrequenzen der atomaren Niveaus und  $\omega_{12} = \omega_1 - \omega_2$  bzw.  $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$  sind die Übergangsfrequenzen zwischen diesen Niveaus. Die Faktoren  $c_{1,2}(t)$  beschreiben die Zeitabhängigkeit der stationären Eigenfunktionen  $u_{1,2}(r)$ . Die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Niveaus ist durch das Betragsquadrat der Faktoren  $|c_{1,2}(t)|^2$  gegeben. Wenn man Gleichung 4.3 in die Ausgangsgleichung 4.1 einsetzt, kommt man nach kurzer Rechnung auf folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{c}_1(t) = \frac{i}{\hbar} d_{12} E_0 e^{-i\omega_{21}t} \cos(\omega_L t) c_2(t) \quad (4.4a)$$

$$\dot{c}_2(t) = \frac{i}{\hbar} d_{21} E_0 e^{i\omega_{12}t} \cos(\omega_L t) c_1(t) \quad (4.4b)$$

Der Faktor  $d_{12}$  ist das Dipolmatrixelement projiziert auf den Polarisationsvektor:

$$d_{12} = \int u_2^*(r) \vec{d} u_1(r) dV \vec{e} \quad (4.5)$$

Für den resonanten Fall  $\delta = \omega_L - \omega_{12} = 0$  ergibt sich eine periodische Umverteilung der Besetzung zwischen  $|1\rangle$  und  $|2\rangle$  (siehe Gleichung 4.6).

$$|c_{1,2}|^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \cos(\Omega_0 t)) \quad (4.6)$$

Im Falle nicht-resonanter Anregung  $\delta \neq 0$  ist die Lösung durch Gleichung 4.7a bzw. 4.7b gegeben [38].

$$c_1(t) = i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) c_2(0) + \left( \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right) - i \frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \right) c_1(0) \quad (4.7a)$$

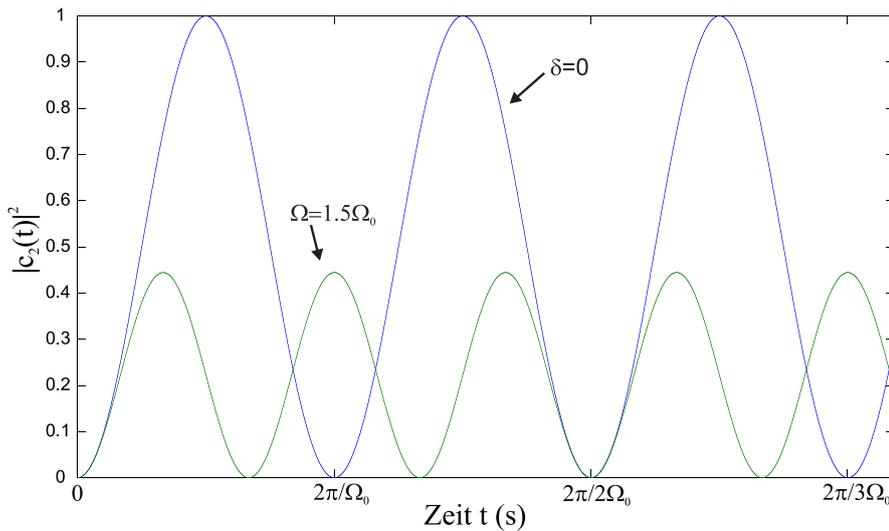
$$c_2(t) = i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) c_1(0) + \left( \cos\left(\frac{\Omega}{2} t\right) + i \frac{\delta}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega}{2} t\right) \right) c_2(0) \quad (4.7b)$$

mit den (modifizierten) Rabifrequenzen:

$$\Omega_0 = \frac{d_{12}E_0}{\hbar} \quad (4.8a)$$

$$\Omega = \sqrt{\delta^2 + \Omega_0^2} \quad (4.8b)$$

Wenn man sich Gleichung 4.6 ansieht, erkennt man, dass für den resonanten Fall die Besetzung der Niveaus mit der Rabifrequenz  $\Omega_0$  zwischen den Werten 0 bzw. 1 oszilliert. Es kann also die gesamte Population von einem Niveau in das andere übertragen werden. Im Falle nicht resonanter Anregung ist das Verhalten für den Fall  $c_2(0) = 0$  ebenfalls gut ersichtlich. Da die modifizierte Rabifrequenz immer größer als  $\Omega_0$  ist, oszilliert die Besetzung in diesem Fall schneller als im resonanten Fall. Allerdings wird durch den Faktor  $(\Omega_0/\Omega)^2$  verhindert, dass die Population jemals komplett im angeregten Zustand ist<sup>2</sup>. In Abbildung 4.2 ist dies grafisch dargestellt.



**Abbildung 4.2:** Zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeit  $|c_2(t)|^2$  des angeregten Niveaus  $|2\rangle$  für den resonanten bzw. für einen nicht resonanten Fall. Im Falle resonanter Anregung kann die Besetzung des einen Niveaus komplett in das andere Niveau übertragen werden. Bei nichtresonanter Anregung ist die mögliche Besetzungsinversion um den Faktor  $(\Omega_0/\Omega)^2$  reduziert.

---

<sup>2</sup> $\Omega > \Omega_0 \implies \Omega_0/\Omega < 1$

## Dichtematrixformalismus

Im Dichtematrixformalismus wird das System durch eine Matrix  $\rho$  beschrieben. Auf der Diagonale der Dichtematrix  $\rho$  befinden sich die Besetzungswahrscheinlichkeiten und auf den Außerdiagonalelementen die Kohärenzen der einzelnen Zustände, siehe Gleichung 4.9:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_1^* & c_1 c_2^* \\ c_2 c_1^* & c_2 c_2^* \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Mit Hilfe des Dichtematrixformalismus lassen sich die Differentialgleichungen eines Systems bei bekannten Hamiltonoperator sehr einfach hinschreiben. Das Äquivalent zur Schrödingergleichung im Dichtematrixformalismus ist die Liouville Gleichung (ohne Dämpfung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (4.10)$$

## 4.2 Erweiterung auf Mehrniveausysteme

### 4.2.1 Der Hamiltonoperator

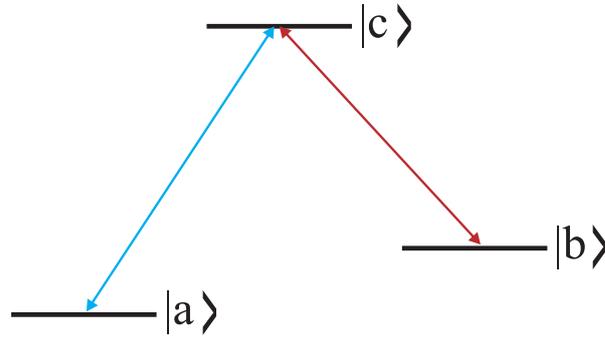
Zur einfachen Erklärung der Erweiterung auf Mehrniveausysteme wird hier ein 3-Niveausystem in  $\Lambda$ -Konfiguration verwendet [39].  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  sind die Grundzustände und  $|c\rangle$  ist der angeregten Zustand, siehe Abbildung 4.3. Die Niveaus  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  können nur über  $|c\rangle$  aneinanderkoppeln. Der gesamte Hamiltonoperator ist die Summe des atomaren und Wechselwirkungsoperators  $H_{ges} = H_{atom} + H_{int}$ . Eine detaillierte Beschreibung des verwendeten Formalismus findet sich zum Beispiel in [39] oder [40].

$$H_{atom} |a\rangle = \hbar\omega_a |a\rangle \quad (4.11)$$

$$H_{atom} = \sum_{j=1}^3 \hbar\omega_j |j\rangle \langle j| \quad (4.12)$$

Wenn als Nullpunkt zum Beispiel das Niveau  $|c\rangle$  gewählt wird, kann der Hamiltonoperator aus Gleichung 4.12 umgeschrieben werden:

$$H_{atom} = \begin{pmatrix} \omega_a - \omega_c & 0 & 0 \\ 0 & \omega_b - \omega_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta_a & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$



**Abbildung 4.3:** Niveauschema in  $\Lambda$ -Konfiguration.  $|a\rangle, |b\rangle$  sind die Grundzustände und  $|c\rangle$  ist der angeregten Zustand.

Der Wechselwirkungsoperator kann wie folgt geschrieben werden [40]:

$$H_{int} = \begin{pmatrix} 0 & i\Omega_b & i\Omega_a \\ 0 & 0 & 0 \\ i\Omega_a & i\Omega_b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Hier wurde bereits die Drehwellennäherung angewendet, d.h. es wurden die Terme vernachlässigt, die mit der Summenfrequenz (z.B.:  $\omega_a + \omega_c$ ) oszillieren. Mit Gleichung 4.12 und 4.14 lässt sich der gesamte Hamiltonoperator schreiben als:

$$H_{ges} = -\Delta_a |a\rangle \langle a| - \Delta_b |b\rangle \langle b| + i\Omega_a (|a\rangle \langle c| + |c\rangle \langle a|) + i\Omega_b (|b\rangle \langle c| + |c\rangle \langle b|) \quad (4.15)$$

Die Parameter  $\Omega_{a,b}$  können als modifizierte Rabi-Frequenzen interpretiert werden und  $\Delta_{a,b}$  bezeichnet die Verstimmung der atomaren Übergangsfrequenz zur Frequenz des einfallenden Laserlichts.

### 4.2.2 Inkohärente Prozesse

In Abschnitt 4.2.1 wurden die inkohärenten Prozesse noch nicht berücksichtigt, es wurde ein 3-Niveau Atom ohne spontane Emission betrachtet. Die Liouville Gleichung kann nach [41] allgemein wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] + L_{damp} \quad (4.16)$$

$L_{damp}$  gibt die Dämpfung und damit die Zerfälle an:

$$L_{damp} = \sum_{k \in \{a,b\}} \left( C_k \rho C_k^\dagger - \frac{1}{2} C_k^\dagger C_k \rho - \frac{1}{2} \rho C_k^\dagger C_k \right) \quad (4.17)$$

Dies ist die *Lindblad* Form der Liouville Gleichung [42]. Die Faktoren  $C_{a,b}$  werden als Kollapsoperatoren bezeichnet und lauten  $C_a = \sqrt{\Gamma_a} |a\rangle \langle c|$  bzw.  $C_b = \sqrt{\Gamma_b} |b\rangle \langle c|$ . Die Parameter  $\Gamma_{a,b}$  sind die Zerfallsraten, mit welchen das Niveau  $|c\rangle$  in die Niveaus  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  zerfällt. Gleichung 4.16 führt auf die so genannten Blochgleichungen des Systems.

Mit dem Ansatz aus Gleichung 4.16 kann man im Prinzip beliebig viele Niveaus simulieren.

### 4.3 Das Magnesium Ion

In diesem Kapitel wird das Magnesium Ion beschrieben, zu dessen Kühlung bzw. Manipulation das Licht bei  $\lambda = 280\text{nm}$  verwendet wird. Im Abschnitt 4.3.1 wird das Niveauschema vorgestellt. Im nachfolgenden Abschnitt 4.3.2 möchte ich die Kühlübergänge erklären und kurz auf die verwendeten Methoden (Doppler- bzw. Raman Seitenband Kühlen) eingehen.

Magnesium hat die Ordnungszahl 12, es ist also ein Erdalkalimetall (2. Hauptgruppe) und besitzt daher zwei Elektronen in der äußeren Hülle. Bei einfacher Ionisierung ist die äußerste Hülle nur noch mit einem Elektron besetzt. Dies ist ein großer Vorteil, da man zu einem effektiven Ein-Elektron System übergeht, welches ein einfaches, Wasserstoff-ähnliches Spektrum aufweist. Magnesium kommt natürlich zu 78.99% als  $^{24}\text{Mg}$  vor, die anderen Isotope sind  $^{25}\text{Mg}$  (10.00%) und  $^{26}\text{Mg}$  (11.01%) (die übrigen Isotope  $^{20}\text{Mg}$  bis hinauf zu  $^{37}\text{Mg}$  kommen natürlich nicht vor).

Wir verwenden in unserem Experiment sowohl  $^{24}\text{Mg}^+$  als auch  $^{25}\text{Mg}^+$ , welches einen Kernspin von  $I = 5/2$  besitzt und daher eine Hyperfeinstruktur aufweist. Im folgenden konzentrieren wir uns auf die komplexere Niveaustuktur von  $^{25}\text{Mg}^+$ .

#### 4.3.1 Termschema von $^{25}\text{Mg}^+$

Auf Grund des Kernspins  $I = 5/2$ , kommt es zu einer Hyperfeinaufspaltung der Energieniveaus in  $^{25}\text{Mg}^+$ . In Abbildung 4.4 ist das Niveauschema der relevanten Energieniveaus zu sehen. Die Größe der Aufspaltung  $\Delta E_{HFS}$  der Niveaus  $2^2\text{P}_{3/2}$ ,  $2^2\text{P}_{1/2}$  und  $2^2\text{S}_{1/2}$  wird durch den Kernspin  $I$ , den Gesamtdrehimpuls  $J$  des Elektrons, den

Gesamtdrehimpulses  $F$  des Ions und die Hyperfeinkonstante  $A$  bestimmt, siehe Gleichung 4.18. Eine Herleitung bzw. genaue Beschreibung der Theorie der Hyperfeinstruktur findet sich zum Beispiel in [43].

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2}(F(F+1) - I(I+1) + J(J+1)) \quad (4.18)$$

mit

$$F = I + J, I + J - 1, \dots, I - J \quad (4.19)$$

Falls sich das Ion zusätzlich in einem schwachen äußeren Magnetfeld  $B_0$  befindet, spalten diese Niveaus noch einmal auf (Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur). Die Verschiebung und Aufspaltung der Niveaus wird durch folgende Gleichung 4.20 bestimmt:

$$\Delta E_{HFS}^{Zee} = g_F \mu_B B_0 m_F \quad (4.20)$$

mit

$$m_F = F, F - 1, \dots, -F \quad (4.21)$$

Der Faktor  $g_F$  ist der Landé Faktor [43]. Für optische Übergänge im Atom gelten die Auswahlregeln  $\Delta F = 0, \pm 1$  und  $\Delta m_F = 0, \pm 1$  zusätzlich zu der normalen Bedingung für einen elektrischen Dipolübergang  $\Delta l = \pm 1$ .

### 4.3.2 Kühltechniken

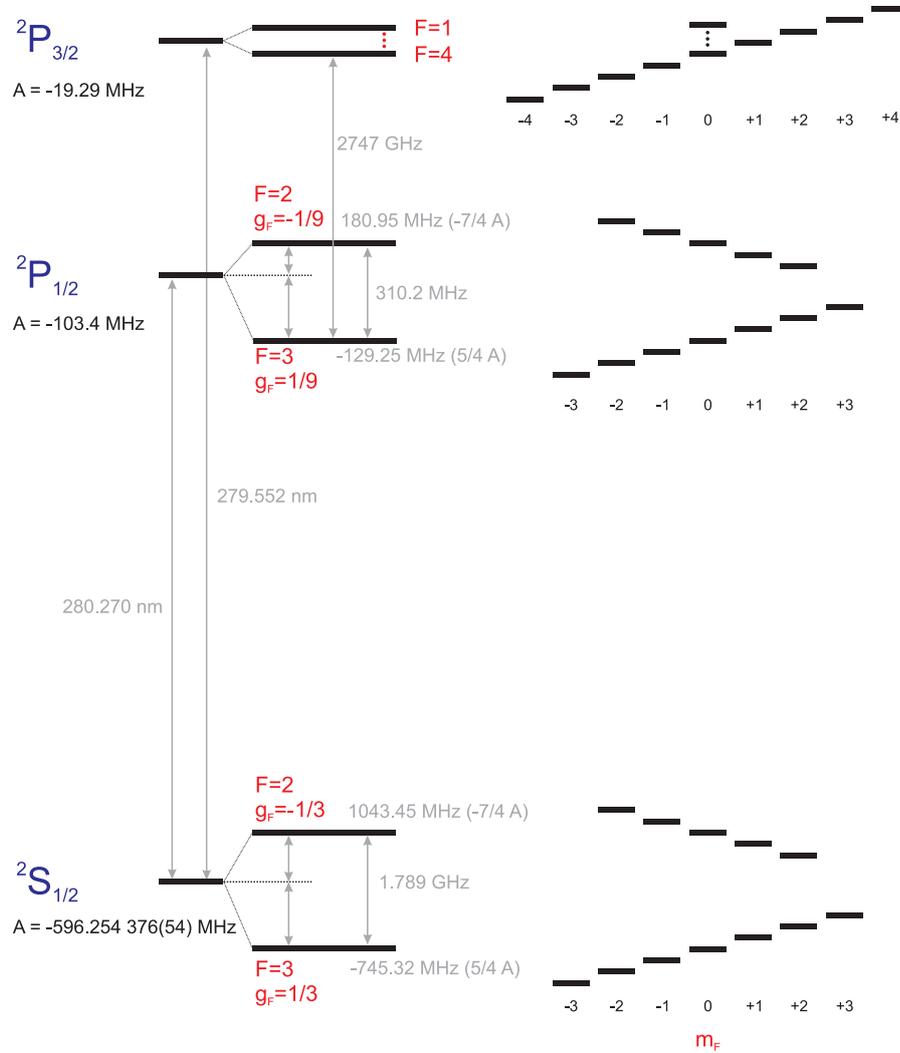
Die einzelnen Magnesium Ionen werden bei uns in einer Paulfalle gefangen und anschließend mittels Laserstrahlen gekühlt, siehe Kapitel 5. Hierbei kommen zwei Techniken zum Einsatz: Doppler-Kühlen und Raman-Seitenband-Kühlen. Durch Kombination dieser beiden Methoden lässt sich ein gefangenes Ion bis in den absoluten Grundzustand der Falle kühlen.

#### Doppler-Kühlen

Beim Doppler Kühlen [45] von Ionen in einer Falle wird ausgenutzt, dass sich die Atome mit einer endlichen Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Durch den Doppler-Effekt muss man nun den Laser verstimmen, um die Übergangsresonanz des Atoms zu treffen. Das Atom sieht abhängig von seiner Geschwindigkeit eine veränderte Laserfrequenz  $\omega_L$  (Doppler-Effekt 1. Ordnung):

$$\omega'_L = \omega_L \left( 1 + \frac{v}{c_0} \right) \quad (4.22)$$

#### 4 Atom-Licht Wechselwirkung



**Abbildung 4.4:** Termschema von  $^{25}\text{Mg}^+$  mit seinen 48 verschiedenen Niveaus.  $F$  bezeichnet die Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses des Atoms  $F = I + J$ ,  $g_F$  bezeichnet die theoretischen Landé Faktoren und  $A$  ist die Hyperfeinkonstante des jeweiligen Niveaus [44]. Der Faktor  $m_F$  ist die magnetische Quantenzahl der Hyperfeinniveaus, wobei gilt  $m_F = -F, -F + 1 \dots F$ . Ohne äußeres Magnetfeld sind die  $m_F$  Niveaus entartet. Im Falle eines Magnetfeldes spalten diese Niveaus gemäß Gleichung 4.20 auf.

Falls sich nun das Atom auf den Laser zu bewegt, benötigt man einen rotverstimzten Laser, um die Übergangsbedingung zu erfüllen. Wenn man nun mit diesem verstimzten Laser die Übergangsfrequenz trifft, absorbiert das Atom Photonen der Energie  $\hbar\omega'_L$ , bei der anschließenden spontanen Emission werden allerdings Photonen der Energie  $\hbar\omega_0$  ausgesandt. Es kommt also zu einem gerichtetem Rückstoß bei Absorption, die anschließende Emission eines Photons ist isotrop verteilt. Das Atom wird daher in der Richtung des Lasers gekühlt. Allerdings lässt sich das Atom durch diese Technik nicht beliebig weit abkühlen. Hierbei spielen zwei Heizeffekte eine Rolle: der Rückstoß des Atoms auf Grund spontaner Emission und der diskrete Energieübertrag durch die Photonen. Die optimale Rotverstimzung des Lasers ist  $\delta = -\Gamma/2$  [46]. Die kleinste Temperatur, die mittels Doppler-Kühlen erreicht werden kann, bezeichnet man als Dopplerlimit  $T_D$ :

$$T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B} \quad (4.23)$$

Für  $^{25}\text{Mg}^+$  mit einer Zerfallsrate von  $\Gamma = 2\pi \cdot 43 \text{ MHz}$  des  $2^2\text{P}_{3/2}$  Zustands ergibt sich eine optimale Rotverstimzung von  $\delta \approx 20 \text{ MHz}$ . Das Dopplerlimit liegt somit bei  $T_D \approx 1 \text{ mK}$ . Zum Kühlen eines Ions in der Falle genügt ein Dopplerlaser, allerdings muss darauf geachtet werden, dass der  $k$ -Vektor des Lasers eine Komponente bezüglich jeder Fallennachse besitzt. Wenn der Laser senkrecht zu einer Achse ist, wird das Ion in dieser Richtung nicht gekühlt, sondern auf Grund der spontanen Emission geheizt.

### Raman-Seitenband-Kühlen

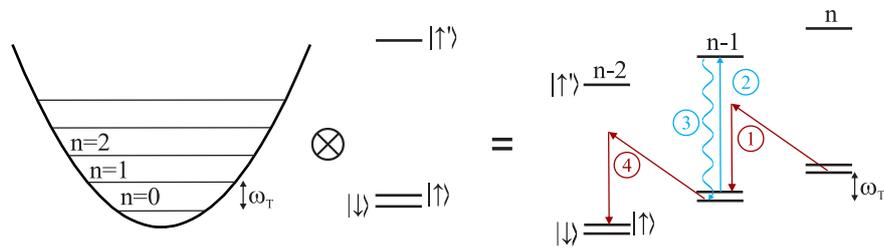
Im Falle eines Ions, das in einer harmonischen Falle gefangen ist, kann man leicht berechnen, welcher mittleren Phononenzahl diese Temperatur  $T_D \approx 1 \text{ mK}$  entspricht:

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_T/k_B T_D) - 1} \quad (4.24)$$

Für eine typische Fallenfrequenz von  $\omega_T \approx 2\pi \cdot 1 \text{ MHz}$  ergibt sich auf diese Weise eine Besetzungszahl von  $\bar{n} \approx 21$ . Der Grundzustand ( $n=0$ ) des harmonischen Oszillators kann mittels (stimulierter) Raman-Seitenband-Kühlung erreicht werden [47], [48]. Eine schematische Darstellung des Niveausystems und des Kühlvorgangs findet sich in Abbildung 4.5. Der harmonische Oszillator und das 3-Niveau System des Atoms koppeln zu einem System, bei dem der Grund- bzw. angeregte Zustand um jeweils eine Fallenfrequenz  $\omega_T$  verschoben sind.

Zur Vereinfachung wird hier ein 3-Niveau System mit zwei nicht entarteten Grundzuständen angenommen. In einer harmonischen Falle mit der Fallenfrequenz  $\omega_T$  tre-

#### 4 Atom-Licht Wechselwirkung



**Abbildung 4.5:** Termschema eines 3-Niveau Atoms in einer harmonischen Falle und Prinzip des Raman-Seitenband-Kühlens.  $|\downarrow\rangle$  und  $|\uparrow\rangle$  bezeichnen den Grund,- bzw. angeregten Zustand des Ions,  $|n\rangle$  ist die Phononbesetzung und  $|\uparrow'\rangle$  ist ein Zwischenzustand. Mit Hilfe von Raman Übergängen (rote Pfeile) kann man auf dem roten Seitenband ( $\Delta n = -1$ ) diese *Phononenleiter* bis zum absoluten Grundzustand hinuntergehen. Der erste Raman Übergang (1) vernichtet ein Phonon in der Falle. Anschließend wird die Besetzung in ein Zwischenniveau übertragen  $|\uparrow\rangle \rightarrow |\uparrow'\rangle$  (2). Von diesem Niveau fällt das Niveau wieder in den Grundzustand  $|\downarrow\rangle$  (3). Nun kann der Zyklus wieder von Neuem beginnen (4).

ten aufgrund der harmonische Bewegung neben dem *Träger*-Signal noch zusätzliche Seitenbänder mit Frequenzen  $\omega_0 \pm n\omega_T$  um die atomare Übergangsfrequenz  $\omega_0$  im Spektrum auf. Die Zustände seien deklariert mit  $|\uparrow\rangle$  für den angeregten und  $|\downarrow\rangle$  für den Grundzustand,  $|n\rangle$  ist die Phononenzahl. Wenn man nun mit zwei Laserstrahlen einen Raman-Übergang im Atom treibt, und diese Laser um eine Seitenbandfrequenz zueinander rotverstimmt sind, wird genau ein Phonon vernichtet  $|\downarrow, n\rangle \rightarrow |\uparrow, n-1\rangle$ . Mit Hilfe eines Rückpumplasers wird das Niveau  $|\uparrow\rangle$  in ein Zwischenniveau  $|\uparrow'\rangle$  entleert. Dieses Zwischenniveau kann anschließend wieder in den Grundzustand zerfallen und der Kühlprozess kann von Neuem durchgeführt werden. Auf diese Weise können Phononenbesetzungszahlen von  $\bar{n} < 0.01$  erreicht werden.

### 4.3.3 Khlschema

Sowohl Doppler als auch Raman Seitenband Kühlen in unserem Aufbau verwendet werden. Zum Dopplerkühlen wird der Übergang  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \Leftrightarrow |P_{3/2}, 4, -4\rangle$  verwendet. In diesem Fall gilt  $\Delta m_F = -1$  und daher wird dieser Übergang mit einem  $\sigma^-$  polarisiertem Laserstrahl realisiert. Als Raman Übergang soll  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \Leftrightarrow |S_{1/2}, 2, -2\rangle$  verwendet werden, wobei die beiden Laserstrahlen zusätzlich noch um 9.2 GHz zum angeregten  $P_{3/2}$  Niveau verstimmt sind. Zum Treiben dieses Übergangs brauchen wir einen  $\pi$  und einen  $\sigma^-$  polarisierten Laserstrahl, siehe Abbildung 4.6. Von diesem Zustand  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle$  muss das Ion wieder in den Ausgangszustand  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle$  gebracht werden um den nächsten Raman Puls anwenden zu können. Die normale Strategie ist, einen  $\sigma^-$  Laser auf dem Übergang  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle \Leftrightarrow |P_{1/2}, 3, -3\rangle$  einzustrahlen. Von dem angeregten Zustand kann das Ion wieder in den Grundzustand zerfallen. Der Vorteil in dieser Konfiguration ist, dass sich das Atom im Grundzustand in einem Dunkelzustand befindet<sup>3</sup> und nicht mehr an das  $P_{1/2}$  Niveau koppeln kann. Allerdings erfordert diese Strategie einen separaten Laser.

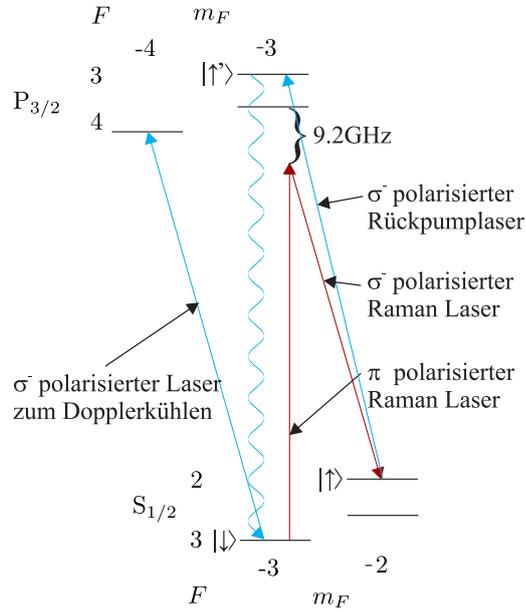
Dies kann umgangen werden, indem als Rückpump Laser der Doppler Laser eingesetzt wird [49]. Befinden sich das Ion im Zustand  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle$ , wird es resonant in das Niveau  $|P_{3/2}, 3, -3\rangle$  gebracht, von wo es anschließend wieder in den Grundzustand  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle$  zerfallen kann. Wenn man wissen will, ob diese neue Strategie angewendet werden kann, muss untersucht werden, wieviele Photonen bei jeder der Strategien im Mittel gestreut werden bzw. ob der Rückpumpvorgang den Kühleffekt des Raman Pulses wieder zunichte macht. Siehe hierzu die Simulationen in Abschnitt 4.4.

## 4.4 Simulationen

Mit Hilfe der *Quantum Optics Toolbox* für Matlab [40] wurde die Liouville-Gleichung (siehe Gl. 4.16) für das Magnesiumion numerisch integriert. Als Lösung ergibt sich die zeitliche Entwicklung der Niveaupopulation. Ausgehend von Abbildung 4.6 wurde der Rückpumpvorgang nach dem Raman Übergang aus dem Niveau  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle$  simuliert. Dazu wird ein resonanter  $\sigma^-$  polarisierter Laserstrahl auf dem Übergang  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle \Leftrightarrow |P_{3/2}, 3, -3\rangle$  eingestrahlt. Von dem angeregten Niveau  $|P_{3/2}, 3, -3\rangle$  zerfällt das Atom anschließend in einen der Grundzustände. Die Simulationen wurden mit unterschiedlichen Laserintensitäten  $I = I_{Sat}$ ,  $I = 0.5I_{Sat}$  und  $I = 0.25I_{Sat}$  durchgeführt, wobei  $I_{Sat}$  die Sättigungsintensität ist:

<sup>3</sup>d.h. es kann von einem Laser nicht mehr angeregt werden

#### 4 Atom-Licht Wechselwirkung



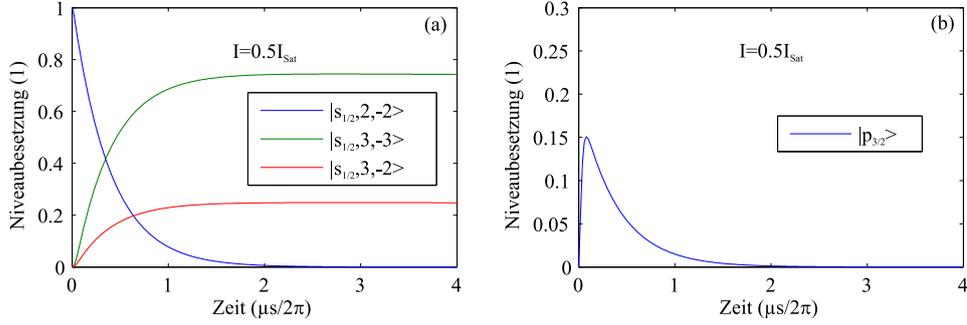
**Abbildung 4.6:** Termschema der relevanten Energieniveaus für die Simulationen. Ein  $\sigma^-$  polarisierter Laserstrahl dient zum Dopplerkühlen des Magnesium Ions, als Kühlübergang werden die Niveaus  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \leftrightarrow |P_{3/2}, 4, -4\rangle$  (Bezeichnung der Niveaus  $|l_{l+s}, F, m_F\rangle$ ) benutzt. Zum Raman Seitenband Kühlen werden die Niveaus  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \leftrightarrow |S_{1/2}, 2, -2\rangle$  benutzt. Getrieben wird der Übergang von einem  $\pi$  polarisierten und einem  $\sigma^-$  polarisiertem Laserstrahl, welcher um 9.2GHz vom Niveau  $|P_{3/2}, 4, -4\rangle$  verstimmt ist. Von hier wird das Atom mittels eines weiteren  $\sigma^-$  Laserstrahl in den Zustand  $|P_{3/2}, 3, -3\rangle$  gebracht, von wo es anschließend wieder zerfallen kann.

$$I_{sat} = \frac{\pi hc \Gamma}{3\lambda^3} \quad (4.25)$$

Während des Rückpumpvorgangs können zu viele gestreute Photonen das gefangene Ion wieder heizen. Die Anzahl der im Mittel gestreuten Photonen ergibt sich aus dem Produkt der mittleren Besetzung des  $P_{3/2}$  Niveaus mit der Zerfallskonstanten  $\Gamma = 2\pi \cdot 43$  MHz. Für  $I = I_{Sat}$ ,  $I = 0.5I_{Sat}$  und  $I = 0.25I_{Sat}$  werden jeweils 3 Photonen an diesem Niveau gestreut. Der Unterschied bei den Intensitäten führt nur zu einem schnelleren bzw. langsameren Erreichen eines stationären Zustandes. Die zeitabhängige Besetzung der Niveaus ist in Abbildung 4.7 zu sehen. Abbildungen (a) und (b) beziehen sich auf die Simulationen mit  $I = 0.5I_{Sat}$ .

Wenn man die normale Rückpumpstrategie über das Niveau  $|P_{1/2}, 2, -2\rangle$  verfolgt,

#### 4.4 Simulationen



**Abbildung 4.7:** Ergebnisse der Simulationen. Am Anfang des Rückpumpprozesses befindet sich das Atom im Zustand  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle$  (nach dem Raman-Übergang, siehe Abbildung 4.6). Anschließend wurde ein resonanter  $\sigma^-$  polarisierter Laserstrahl benutzt, um das Atom wieder in den Ausgangszustand für den Raman-Übergang zurückzupumpen. Nach dem Rückpumpvorgang befinden sich ca. 75,3% im gewünschten Zustand  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle$  und ca. 24,7% in  $|S_{1/2}, 3, -2\rangle$ , unabhängig von der gewählten Laserintensität. Zur Bestimmung der am  $P_{3/2}$  Niveau gestreuten Photonen, wird die Fläche unter der Kurve in Abbildung (b) mit der Zerfallskonstanten  $\Gamma = 2\pi \cdot 43\text{MHz}$  multipliziert. Bei jeder Intensität werden 3 Photonen gestreut, der Unterschied besteht nur in der Zeitskala. Hier ist die Ergebnis der Simulation für  $I = 0.5I_{\text{sat}}$ , bei den anderen Intensitäten ergibt sich nur eine Änderung der Zeitskala.

werden am  $P_{1/2}$  Niveau 2,8 Photonen gestreut, bevor sich das Ion wieder im Grundzustand befindet. Diese Simulation wurde mit  $I = 100I_{\text{sat}}$  durchgeführt, weil bei dieser Strategie der Grundzustand ein Dunkelzustand ist und nicht mehr an das angeregte Niveau koppelt. Es werden also ungefähr gleich viele Photonen bei jeder der beiden Rückpumpstrategien gestreut.

Die Aussage, dass im Mittel drei Photonen beim Rückpumpprozess gestreut werden, sagt alleine noch nicht viel aus. Damit man weiß, ob bei dem Rückpumpvorgang das Ion wieder geheizt wird, muss man den Lamb-Dicke Parameter  $\eta$  betrachten:

$$\eta = k\sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_T}} = \sqrt{\frac{\omega_{\text{recoil}}}{\Omega_T}} \quad (4.26)$$

$k$  ist der Wellenvektor des Photons,  $m$  ist die Ionenmasse und  $\Omega_T$  ist die axiale Fallenfrequenz. Der Lamb-Dicke Parameter beschreibt also das Verhältnis der Rückstoßenergie durch ein Photon zur Energie eines Phonons in der Falle.

In Fall von  $^{25}\text{Mg}^+$  und einer Fallenfrequenz von  $\Omega_T = 2\pi \cdot 1\text{MHz}$  ergibt sich ein Lamb-Dicke Parameter von  $\eta^2 \approx 0.1$ . Das bedeutet, dass im Mittel 10 Photonen am Ion

#### 4 Atom-Licht Wechselwirkung

gestreut werden müssen um ein Quant in der Falle anzuregen. Daraus ist ersichtlich, dass unsere Rückpumpstrategie, bei der drei Photonen gestreut werden, sinnvoll ist, da kaum zusätzliches Heizen auftritt, lediglich  $1/3$  Phonon pro Rückpumpzyklus.

#### **Bemerkung**

Es befinden sich laut Simulation aber immer noch 24,7% der Population im Niveau  $|S_{1/2}, 3, -2\rangle$ . Damit diese ebenfalls in den Grundzustand kommen, kann man zum Beispiel einen  $\pi$ -Puls<sup>4</sup> (siehe [50]) anwenden und diese Besetzung ins Niveau  $|S_{1/2}, 2, -2\rangle$  bringen. Anschließend kann wieder der Rückpumplaser eingestrahlt werden. Dieser  $\pi$ -Puls könnte auf dem roten Seitenband erfolgen, wodurch wieder ein Phonon in der Falle vernichtet wird. Wird diese Strategie dreimal angewendet, ist die Wahrscheinlichkeit noch Besetzung im Niveau  $|S_{1/2}, 3, -2\rangle$  zu haben ca. 1,5%.

---

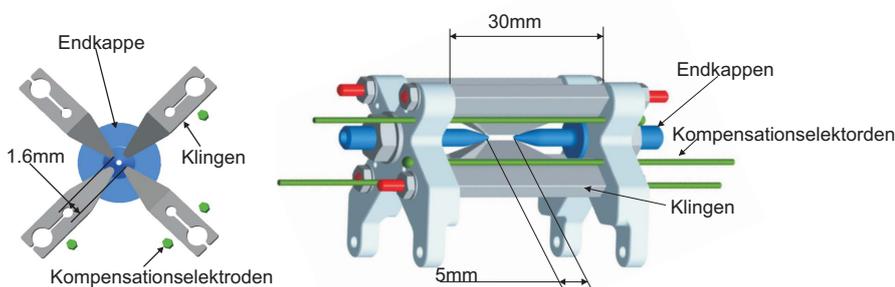
<sup>4</sup>Bei einem  $\pi$ -Puls werden die Besetzungswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Niveaus vertauscht. Falls ein Niveau zuerst zu 100% und das andere zu 0% besetzt ist ( $p_{|1\rangle} = 100\%$  bzw.  $p_{|2\rangle} = 0\%$ ), so ist die Besetzungswahrscheinlichkeit nach einem  $\pi$ -Puls  $p_{|1\rangle} = 0\%$  bzw.  $p_{|2\rangle} = 100\%$ .

## 5 Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel wird die experimentelle Realisierung einer Falle zum Fangen einzelner Ionen beschrieben. Anschließend wird der Aufbau für das Raman-Seitenband-Kühlen vorgestellt.

### 5.1 Lineare Paulfalle

Die Erfindung der Paulfalle, für die W. Paul im Jahr 1989 den Nobelpreis erhielt, eröffnete ein weites Feld an Anwendungen. Erstmals konnten einzelne Ionen mit einem bestimmten Masse zu Ladungsverhältnis  $m/q$  relativ einfach gefangen, über lange Zeit gespeichert und manipuliert werden, siehe [51] und [52]. Abgeleitet wurde dieses System von den bereits verwendeten Quadrupolmassenfiltern [53].



**Abbildung 5.1:** Schematische Darstellung einer Paulfalle. Die Endkappen sind blau, die Klingen grau und die Kompensationselektroden grün dargestellt. Links ist die Seitenansicht auf die Klingen zu sehen, rechts die gesamte Falle samt MACOR®-Halterung. An jeweils zwei gegenüberliegenden Klingen wird eine Wechselspannung bzw. Masse angelegt.

Eine lineare Paulfalle, so wie sie in Innsbruck erfolgreich Verwendung findet, besteht im Wesentlichen aus vier gegenüberliegenden Elektroden. An jeweils zwei der Elektroden wird eine Wechselspannung  $V$  bzw. Masse angelegt. Das zeitabhängige Potential, bestimmt durch die vier Elektroden, lautet (siehe z.B. [54]):

## 5 Experimenteller Aufbau

$$\Phi(x, y, t) = V \cos(\Omega_T t) \frac{x^2 - y^2}{2R^2} \quad (5.1)$$

Der Parameter  $R$  ist der Abstand von einer Elektrode zum Fallenzentrum und  $\Omega_T$  ist die Frequenz der Wechselspannung. Mit Hilfe der Relation  $F = m\ddot{x} = -e\nabla\Phi$  lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung herleiten:

$$\ddot{x} - 2q_x \cos(\Omega_T t)x = 0 \quad (5.2a)$$

$$\ddot{y} + 2q_y \cos(\Omega_T t)y = 0 \quad (5.2b)$$

mit

$$q_x = q_y = \frac{2eV}{mR^2\Omega_T^2} \quad (5.3)$$

wobei hier  $m$  die Masse des Teilchens in der Falle ist. Allerdings gewährleistet diese Konfiguration nur einen radialen Einschluss ( $xy$  Richtung) der Ionen. Damit ein dreidimensionaler Einschluss der Ionen gewährleistet ist, wird der Aufbau um zwei Endkappen erweitert (in Abbildung 5.1 blau dargestellt). An diesen Endkappen wird eine konstante Spannung  $U$  angelegt. Dadurch werden die Bewegungsgleichungen wie folgt modifiziert [55]:

$$\ddot{x} + (q_0 - 2q_x \cos(\Omega_T t))x = 0 \quad (5.4a)$$

$$\ddot{y} + (q_0 + 2q_y \cos(\Omega_T t))y = 0 \quad (5.4b)$$

$$\ddot{z} + 2q_0 z = 0 \quad (5.4c)$$

mit

$$q_0 = \frac{e\alpha U}{mL^2\Omega_T^2} \quad (5.5)$$

Der Parameter  $\alpha$  ist ein geometrischer Formfaktor und  $L$  ist der Abstand der beiden Endkappen. Die Gleichungen 5.4a und 5.4b sind die so genannten Mathieu'schen Differentialgleichungen. Unter der Annahme  $|q_i|, |q_0| \ll 1$  (mit  $i = x, y, z$  und  $q_z=0$ ), lässt sich dieses System analytisch lösen [56]:

$$x_i = x_{i0} \cos(\omega_{i,0}t + \phi_0) \left(1 + \frac{1}{2}q_i \cos(\Omega_T t)\right) \quad (5.6)$$

Die Faktoren  $x_{i,0}$  und  $\phi_0$  sind durch die Anfangsbedingungen gegeben. Des weiteren gilt:

$$\omega_{i,0} \approx \frac{\Omega_T}{2} \sqrt{\frac{1}{2}q_i - q_0}, \quad i = x, y \quad (5.7a)$$

$$\omega_{z,0} \approx \Omega_T \sqrt{\frac{q_0}{2}} \quad (5.7b)$$

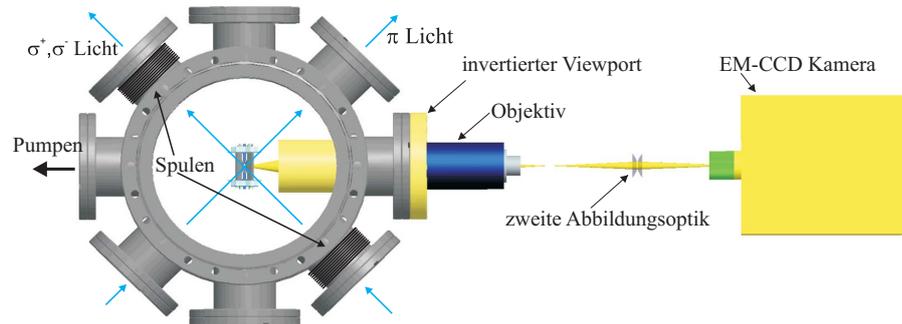
Man erkennt aus Gleichung 5.7a, dass die Fallenfrequenz  $\omega_{i,0}$  durch Anlegen einer Spannung an den Endkappen um den Faktor  $q_0$  erniedrigt wird. Der axiale Einschluss bewirkt daher eine Abschwächung der Falle in radialer Richtung. Aus Gleichung 5.6 erkennt man, dass die Bewegung des Ions in der Falle aus zwei Komponenten besteht: die säkulare Bewegung mit der Frequenz  $\omega_{i,0}$  und die Mikrobewegung mit der Frequenz des angelegten elektrischen Feldes  $\Omega_T$ . Die Bewegung des Ions kann als eine harmonische Bewegung (Säkularbewegung) interpretiert werden, der eine schnelle Mikrobewegung überlagert ist. Unter Vernachlässigung der Mikrobewegung kann das Potential, welches das Ion sieht, als harmonisch betrachtet werden:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} m\omega_i^2 x_i^2 \quad (5.8)$$

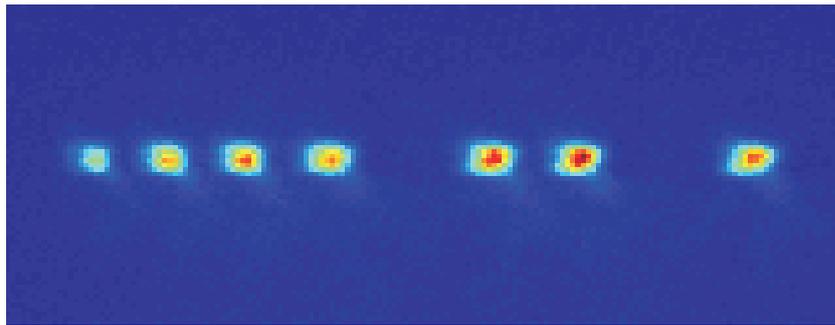
## 5.2 Vakuumaufbau

Der gesamte Aufbau ist in Abbildung 5.2 zu sehen. Das Besondere an unserer Falle ist, dass die Endkappen Durchgangslöcher ( $\varnothing 0.5$  mm) haben, um einen Laser in axialer Richtung einstrahlen zu können. Zusätzlich zu der Falle, dem Vakuumtopf und den Laserstrahlen sind noch zwei Spulen eingezeichnet. Diese Spulen dienen dazu, ein Magnetfeld zu erzeugen und eine Quantisierungsachse für das Licht vorzugeben [43]. Als Pumpen werden eine Ionen-Getterpumpe und eine Titan-Sublimationspumpe verwendet. Die Vakuumfenster stammen von TORR SCIENTIFIC, der invertierte Viewport stammt von UKAEA. Sowohl Fenster als auch die Viewports haben eine Anitreflexbeschichtung für UV Licht. In Abbildung 5.3 ist der erste Ionenkristall dargestellt, welcher mit unserer Falle im Dezember 2007 gefangen wurde. Dieser Kristall besteht aus  $^{24}\text{Mg}^+$ , da wir zu diesem Zeitpunkt noch keinen Laseraufbau zur Kontrolle von  $^{25}\text{Mg}^+$  hatten. An den dunklen Stellen in der Abbildung sitzen ebenfalls Teilchen. Hierbei könnte es sich um andere Magnesiumisotope in einem Dunkelzustand oder andere ionisierte Teilchen handeln. Die Laserfrequenz zum Dopplerkühlen wurde hier noch per Hand justiert und nicht elektronisch geregelt.

## 5 Experimenteller Aufbau



**Abbildung 5.2:** Aufsicht auf den Vakuumentopf. Als Pumpen werden sowohl eine Ionen-Getterpumpe als auch eine Titan-Sublimationspumpe verwendet. Zur Abbildung der Ionen benutzen wir eine EM-CCD Kamera (Modell ANDOR *iXon*). Die beiden Spulen erzeugen ein Magnetfeld und legen somit die Quantisierungsachse für das Laserlicht fest. Parallel zum Magnetfeld besteht das Licht aus einem  $\sigma^+$  und einem  $\sigma^-$  Anteil. Senkrecht auf der Magnetfeldachse hat das Licht  $\pi$  Polarisation.



**Abbildung 5.3:** Hier ist der erste mit unserer Falle gefangene Ionenkristall aus  $^{24}\text{Mg}^+$  zu sehen. Zu erkennen sind nur sieben helle Ionen. An den dunklen Stellen könnten sich zum Beispiel andere (dunkle) Magnesiumisotope oder andere ionisierte Teilchen befinden.

### 5.3 Abbildungsoptik

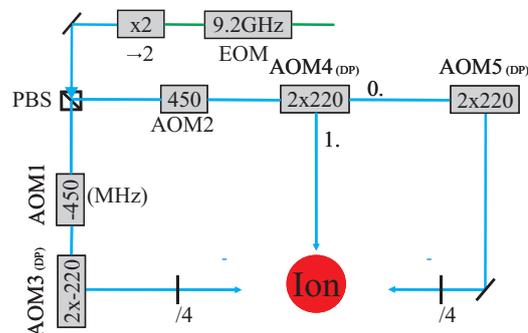
Die Abbildungsoptik für die Ionen in der Falle besteht aus einem Objektiv, welches sich in dem invertierten Viewport befindet, und einer zweiten Vergrößerungseinheit. Das Objektiv und die gesamte Abbildungsoptik wurde von B3rge Hemmerling entworfen, daher wird an dieser Stelle auf dessen zuk3nftige Arbeit verwiesen und nur die Eckdaten erw3hnt. Das Objektiv besteht aus f3nf Linsen (Thorlabs). Die F-Zahl betr3gt 1,24 bei einem 3ffnungswinkel von  $44^\circ$  und die Aufl3sung des Objektiv liegt

## 5.4 Aufbau zum Raman Seitenband Kühlen

bei ca.  $1,5\ \mu\text{m}$ . Die zweite Abbildungsoptik, bestehend aus zwei Linsen, dient einer weiteren Vergrößerung. Das gesamte System besitzt eine ca. 5-fache Vergrößerung. An der Stelle des Zwischenbildes zwischen Objektiv und Vergrößerungseinheit befindet sich eine Blende um das Streulicht zu minimieren. Das Licht wird anschließend mit einer EM-CCD Kamera detektiert. In Zukunft wird dieser durch einen PMT (*photo multiplier*) erweitert.

### 5.4 Aufbau zum Raman Seitenband Kühlen

Hier wird kurz der geplante experimentelle Aufbau zur Erzeugung der einzelnen Laserstrahlen zum Raman Seitenband Kühlen und Dopplerkühlen vorgestellt. Die Energieaufspaltung des Niveaus  $S_{1/2}$  auf Grund der Hyperfeinstruktur beträgt  $\approx 1.789\ \text{GHz}$ , siehe Kapitel 4.3. Zur Frequenzverschiebung verwenden wir einen Aufbau mit insgesamt fünf akustooptischen Modulatoren (AOMs) und einem EOM, siehe Abbildung 5.4. Zum Doppler-Dühlen braucht man nur sehr geringe Laserintensitäten, daher wird dazu das vom EOM erzeugte Seitenband bei  $+9,2\ \text{GHz}$  verwendet. Beim Raman-Seitenband-Kühlen wird allerdings das Trägersignal verwendet, um möglichst hohe Intensitäten zu erreichen. Die Konfiguration der AOMs beim Doppler- bzw. Raman-Kühlen ist in Tabelle 5.1 zu sehen.



**Abbildung 5.4:** Schematischer Aufbau zur Erzeugung der verschiedenen Frequenzen, welche zum Doppler- bzw. Raman-Seitenband-Kühlen benötigt werden. Tabelle 5.1 zeigt, welche AOMs bei den einzelnen Kühlvorgängen benutzt werden, bzw. ob der EOM eingeschaltet ist und die 9.2 GHz Verstärkung erzeugt. Der Zusatz DP bei den AOMs 3, 4 und 5 bedeutet *double pass*.

## 5 Experimenteller Aufbau

	Dopplerkühlen	Ramankühlen
EOM	•	
AOM 1		•
AOM 2	•	•
AOM 3		•
AOM 4		•
AOM 5	•	

**Tabelle 5.1:** Schaltschema der einzelnen AOMs' bzw. des EOM's. Beim Doppler-Kühlen wird der EOM und die AOMs 2 und 5 verwendet um den Laserstrahl in Resonanz mit dem Übergang  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \Leftrightarrow |P_{3/2}, 4, -4\rangle$  zu bringen. Für den Raman-Übergang  $|S_{1/2}, 3, -3\rangle \Leftrightarrow |S_{1/2}, 2, -2\rangle$  werden die AOMs 1, 2, 3 und 4 benutzt. Der EOM ist ausgeschaltet, da hier die Trägerfrequenz benutzt wird.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Der Hauptteil dieser Arbeit liegt in der ausführlichen Erklärung der Frequenzverdopplung und in deren experimenteller Realisierung. Ausgehend von den Grundlagen der nichtlinearen Optik wurde die Theorie der Frequenzverdopplung kurz dargestellt. Anschließend wurde der Laser Aufbau zum Erzeugen von UV Licht bei  $\lambda = 280$  nm durch zweimaliges Verdoppeln von Licht bei  $\lambda = 1118$  nm beschrieben und charakterisiert, wobei eine gute Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit der theoretischen Beschreibung erzielt wurde.

Die Leistung unseres Faserlasers (KOHERAS *Boostik*) nimmt leider kontinuierlich ab, die maximale Ausgangsleistung des Laser für einen stabilen Langzeitbetrieb lag zum Zeitpunkt dieser Diplomarbeit nur mehr bei ca. 320 mW ( $P_{\max} \approx 1.5$  W laut Datenblatt).

Der Laser soll sowohl zum Kühlen (Doppler- bzw. Raman-Seitenband-Kühlen) als auch zur kohärenten Manipulation von gefangenen Magnesium Ionen verwendet werden. In Kapitel 4 wurde die Wechselwirkung eines Lasers mit einem Atom beschrieben und ausgehend von der Theorie wurden Simulationen durchgeführt (zeitliche Entwicklung der Blochgleichungen). Simuliert wurde der Rückpumpvorgang nach einem Raman-Puls. Die Simulationen ergaben, dass im Mittel drei Photonen gestreut werden, damit das Ion wieder im Grundzustand ist und ein weiterer Raman Puls angewendet werden kann. Die Abschätzung des Lamb-Dicke Faktors ergab, dass ca. zehn Photonen am Ionen gestreut werden können, bevor es geheizt wird. Unsere Rückpumpstrategie sollte also zu keinem großen Heizeffekt führen.

Im letzten Kapitel wurden der experimentelle Aufbau und die Funktionsweise einer linearen Paulfalle beschrieben. Im Winter 2007 konnten wir erstmals einzelne Ionen ( $^{24}\text{Mg}^+$ ) fangen. Der nächste Schritt wird sein, den AOM Aufbau zu realisieren, um Doppler- und Raman-Seitenband-Kühlen zu implementieren.



# Literaturverzeichnis

- [1] UZAN, J. P.: The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status. In: *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003), S. 403–455
- [2] DIRAC, P. A. M.: In: *Nature* 139 (1937), S. 323
- [3] FLAMBAUM, V. V.: Temporal and spatial variation of fundamental constants: theory and observations. In: *Frequency Control Symposium, IEEE International* (2007), S. 342–349
- [4] VAN DYCK, R. S. ; FARNHAM, D. L. ; SCHWINBERG, P. B.: Proton-electron mass ratio and the electron's Atomic Mass. In: *Instrumentation and Measurement, IEEE Transaction on* 44 (1995), S. 546–549
- [5] ROSEN BAND, T. ; HUME, D.B. ; SCHMIDT, P. O. ; CHOU, C. W. ; BRUSCH, A. ; LORINI, L. ; OSKAY, W. H. ; DRULLINGER, R. E. ; FORTIER, T. M. ; STALNAKER, J. E. ; DIDDAMS, S. A. ; SWANN, W. C. ; R., Newbury N. ; ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J. ; BERGQUIST, J. C.: Frequency Ratio of  $\text{Al}^+$  and  $\text{Hg}^+$  Single Ion Optical Clocks; Metrology at the 17th Decimal Place. In: *Science* 319 (2008)
- [6] MURPHY, M. T. ; WEBB, J. K. ; FLAMBAUM, V. V.: Further evidence for a variable fine-structure constant from Keck/Hires QSO absorption spectra. In: *Mon. Not. R. Astron. Soc* 345 (2003), S. 609–639
- [7] LEVSHAKOV, S. A. ; CENTURIÓN, M. ; MOLARO, P. ; D'ODORICO, D. ; REIMERS, D. ; QUAIST, R. ; POLLMAN, M.: Most precise single redshift bound to  $\Delta\alpha/\alpha$ . In: *Astronomy & Astrophysics* 449 (2005), S. 879–889
- [8] SRINANAND, R. ; CHAND, H. ; PETITJEAN, P. ; ARACIL, B.: Limits on the Time Variation of the Electromagnetic Fine-Structure Constant in the Low Energy Limit from Absorption Lines in the Spectra of Distant Quasars. In: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004), S. 121302
- [9] HÄNSCH, T. W. ; UDEM, T. ; HOLZWARTH, R.: Optical frequency metrology. In: *Nature* 416 (2002), S. 233–237

Literaturverzeichnis

- [10] MARIAN, A.: *Direct Frequency Comb Spectroscopy for Optical Frequency Metrology and Coherent Interactions*, University of Colorado, Diss., 2005
- [11] WOLF, A. L. ; UBACHS, W. ; EIKEMA, K.S.E.: Towards direct frequency comb spectroscopy on ions in a linear Paul trap. In: *International Quantum Electronics Conference on Lasers and Electro-Optics International Quantum Electronics Conference (2007)*
- [12] STALNAKER, J.E. ; DIDDAMS, S.A. ; FORTIER, T.M. ; GERGINOV, V. ; LE COQ, Y. ; MBELE, V. ; OATES, C.W. ; ORTEGA, D. ; TANNER, C.E. ; HOLLBERG, L.: High-Resolution Spectroscopy with Femtosecond Optical Combs. In: *Conference on Lasers and Electro-Optics (2007)*
- [13] STALNAKER, J. E. ; LE COQ, Y. ; FORTIER, T. M. ; DIDDAMS, S. A. ; OATES, C. W. ; HOLLBERG, L.: Measurement of excited-state transitions in cold calcium atoms by direct femtosecond frequency-comb spectroscopy. In: *Phys. Rev. A* 75 (2007), S. 040502(R)
- [14] BARRETT, M. D. ; DEMARCO, B. ; SCHAETZ, T. ; V., Meyer ; LEIBFRIED, D. ; BRITTON, J. ; CHIAVERINI, J. ; ITANO, W. M. ; JELENKOVIC, B. ; JOST, J. D. ; LANGER, C. ; ROSEN BAND, T. ; WINELAND, D. J.: Sympathetic cooling of  ${}^9\text{Be}^+$  and  ${}^{24}\text{Mg}^+$  for quantum logic. In: *Phys. Rev. A* 68 (2003)
- [15] LARSON, D. J. ; BERGQUIST, J. C. ; BOLLINGER, J. J. ; ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J.: Sympathetic cooling of trapped ions: A laser-cooled two-species nonneutral ion plasma. In: *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), S. 70–73
- [16] SCHMIDT, P. O. ; ROSEN BAND, T. ; LANGER, C. ; ITANO, W. M. ; BERGQUIST, J. C. ; WINELAND, D. J.: Spectroscopy Using Quantum Logic. In: *Science* 309 (2005), S. 749–752
- [17] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics Third Edition*. Wiley, 1998
- [18] SALEH, B. ; TEICH, M. C. ; SONS, John Wiley (Hrsg.): *Fundamentals of Photonics*. Wiley Interscience, 1991
- [19] FRANKEN, P.A. ; HILL, A. E. ; WEINREICH, G.: Generation of Optical Photonics. In: *Phys. Rev. Lett.* 7 (1961), S. 118–119
- [20] SHEN, Y. R. ; SONS, John Wiley (Hrsg.): *Principles of Nonlinear Optics*. Wiley Interscience, 1984

- [21] ZONDY, J. J.: Comparative theory of walkoff-limited type-II versus type-I second harmonic generation with gaussian beams. In: *Opt. Commun.* 81 (1991), S. 427–440
- [22] REIDER, G. A.: *Photonik, Eine Einführung in die Grundlagen*. Springer Wien NewYork, 2005
- [23] DMITRIEV, V. G. ; GURZADYAN, G. G. ; NIKOGOSYAN, D. N.: *Handbook of nonlinear optical systems*. Springer, 1991
- [24] HECHT, E.: *Optik*. Oldenbourg, 2001 (3)
- [25] BOYD, G. ; KLEINMAN, D.: Parametric interaction of focused Gaussian light beams. In: *Journal of Applied Physics* 39 (1968), S. 3597 – 3639
- [26] ROBERTS, D.A.: Simplified characterization of uniaxial and biaxial nonlinear optical crystals: a plea for standardization of nomenclature and conventions. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 28 (1992), S. 2057–2074
- [27] PARAMESWARAN, K. R. ; KURZ, J. R. ; ROUSSEV, R. V. ; FEJER, M. M.: Observation of 99% pump depletion in single pass second harmonic generation in a periodically poled lithium niobate waveguide. In: *Opt. Lett.* 27 (2002), S. 43–45
- [28] ABITAN, H. ; SKETTRUP, T.: Laser resonators with several mirrors and lenses with the bow-tie laser resonator with compensation for astigmatism and thermal lens effects as an example. In: *J. Opt. : Pur. Appl. Opt.* 7 (2005), S. 7–20
- [29] WERNER, J.: *Kontinuierliches Laden einer Magnetfalle mit lasergekühlten Chromatomen*, Universität Konstanz, Diplomarbeit, 2000
- [30] SCHMIDT, P. O.: *Lichtmasken in der Atomlithographie*, Universität Konstanz, Diplomarbeit, 1998
- [31] SIEGMAN, A. E.: *Laser*. University Science Books, 1986
- [32] MABUCHI, H. ; POLZIK, E. S. ; KIMBLE, H. J.: Blue-light-induced infra red absorption in KNbO<sub>3</sub>. In: *J. Opt. Soc. Am. B* 11 (1994), S. 2023
- [33] BÉLANGER, P. A.: Beam propagation and the ABCD ray matrices. In: *Opt. Lett.* 16 (1991), S. 196
- [34] TIETZE, U. ; SCHENK, Ch.: *Halbleiter Schaltungstechnik*. Springer Verlag, 1993

Literaturverzeichnis

- [35] KOGELNIK, H. W. ; IPPEN, E. ; DIENES, A. ; SHANK, C.: Astigmatically Compensated Cavities for CW Dye Lasers. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 8 (1972), S. 373 – 379
- [36] DREVER, R. W. P. ; HALL, J. L.: Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. In: *Appl. Phys. B.* 21 (1983), S. 97
- [37] HÄNSCH, T. W. ; COUILLAUD, B.: Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity. In: *Opt. Commun.* 35 (1980), S. 441
- [38] FOOT, C. J.: *Atomic Physics.* Oxford University Press, 2004
- [39] OBERST, H.: *Resonance fluorescence of single Barium ions*, University of Innsbruck, Diplomarbeit, 1999
- [40] TAN, S. M.: A computational toolbox for quantum and atomic optics. In: *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 1 (1999), S. 424–432
- [41] LINDNER, A.: *Grundkurs Theoretische Physik.* Teubner, 1994
- [42] LINDBLAD, G.: On the generators of quantum dynamical semigroups. In: *Commun. Math. Phys.* 48 (1976), S. 119–130
- [43] HAKEN, H. ; WOLF, C.: *Atom und Quantenphysik.* Springer, 2000
- [44] ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J.: Precision measurement of the ground-state hyperfine constant of  $^{25}\text{Mg}^+$ . In: *Phys. Rev. A* 24 (1981), S. 1364
- [45] WINELAND, D. J. ; ITANO, W. M.: Laser cooling of atoms. In: *Phys. Rev. A* 20 (1979), S. 1521
- [46] METCALF, H. J. ; VAN DER STRATEN, P.: *Laser Cooling and Trapping.* Springer Wien NewYork, 1999
- [47] MONROE, C. ; MEEKHOF, D. M. ; KING, B. E. ; JEFFERTS, S. R. ; ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J. ; GOULD, P.: Resolved-Sideband Raman Cooling of a Bound Atom to the 3D Zero-Point Energy. In: *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), S. 4011
- [48] ESCHNER, J. ; MORIGI, G. ; SCHMIDT-KALER, F. ; BLATT, R.: Laser cooling of trapped ions. In: *J. Opt. Soc. Am. B* 20 (2003), S. 1003–1015

- [49] EPSTEIN, R. J. ; SEIDELIN, S. ; LEIBFRIED, D. ; WESENBERG, J. H. ; BOLLINGER, J. J. ; AMINI, J. M. ; BLAKESTAD, R. B. ; BRITTON, J. ; HOME, J. P. ; ITANO, W. M. ; JOST, J. D. ; KNILL, E. ; LANGER, C. ; SHIGA, N. ; WINELAND, D. J.: Simplified motional heating rate measurements of trapped ions. In: *Phys. Rev. A.* 76 (2007)
- [50] DEMTRÖDER, W.: *Laserspektroskopie*. Springer, 1993
- [51] PAUL, W.: Electromagnetic traps for charged and neutral particles. In: *Rev. Mod. Phys.* 62 (1990), S. 531–540
- [52] LEIBFRIED, D. ; BLATT, R. ; MONROE, C. ; WINELAND, D. J.: Quantum dynamics of single trapped ions. In: *Rev. Mod. Phys.* 75 (2003), S. 281–324
- [53] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 2*. Springer Berlin, 2006
- [54] BERKELAND, D. J. ; MILLER, J. D. ; BERGQUIST, J. C. ; ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J.: Minimization of ion micromotion in a Paul trap. In: *Journal of Applied Physics* 83 (1998), S. 5025–5033
- [55] GULDE, S.: *Experimental Realization of Quantum Gates and the Deutsch-Jozsa Algorithm with Trapped  $^{40}\text{Ca}^+$  Ions*, Universität Innsbruck, Diss., 2003
- [56] DREWSSEN, M. ; BRONER, A.: Harmonic linear Paul trap: Stability diagram and effective potentials. In: *Phys. Rev. A* 62 (2000)



# Danksagung

Nun, zum Schluss dieser Diplomarbeit, möchte ich noch so manchen Bekannten, Betreuern und Wegbegleitern danken. Von diesen gibt es zahlreiche, das gesamte Studium dauerte immerhin sechs Jahre.

Der erste Dank geht an Herrn Prof. Dr. Rainer Blatt, den Leiter unserer Forschungsgruppe. Ich möchte ihm für die Möglichkeit danken, dass ich meine Diplomarbeit in einem internationalen und interessanten Umfeld absolvieren konnte. Ein ganz großes Dankeschön gebührt natürlich meinem direkten Betreuer, Dr. Piet Schmidt. Er hat mir in zahlreichen Diskussionen meine oftmalige Unwissenheit verziehen und mich bereitwillig aufgeklärt. Trotz seines oft übervollen Terminkalenders hat er immer Zeit für mich gefunden. Im Zuge dessen danke ich natürlich dem gesamten DIFCOS Team, Piet, Borge und Birgit. Borge hat mir mit seinen erstaunlichen Matlab und sonstigen Programmierkenntnissen viel Zeit und Mühe erspart. Und Bibi, wir sehen uns im Proml. Selbstverständlich geht auch ein großes Danke an die gesamte Blatt Gruppe für das nette Arbeitsumfeld. Und natürlich auch an Max, den Grillmeister, legendäres Mitglied der Weißwurstkochgruppe (neben Rob, Borge und Bibi). Leider hat sich die Kochgruppe mit der Zeit aufgelöst bzw. bin ich langsam aus dieser ausgeschieden. Ebenfalls ein Danke gebührt den Elektronikjungs, Manuel und Arthur, den Werkstattjungs, Helmut, Toni, Andreas und Stefan sowie natürlich Patricia. Ein großes Dankeschön geht an alle meine Freunde, an diejenigen, die ich bereits vor dem Studium kannte und an die, welche erst mit der Zeit zu Freunden wurden. Ebenfalls danke ich der Gang in St. Johann für das eine oder andere feuchtfröhliche Zusammensein. El Harald und Tom W., vielen Dank für die zahlreichen Kneipenabende, in denen wir so viel Geld ausgegeben haben, dass wir uns davon leicht eine eigene Brauerei leisten könnten. Harry und Andi danke ich darüber hinaus für die vielen Stunden, in denen wir an unseren Proseminaren arbeiteten und somit unsere Frustrationsschwelle unweigerlich nach oben schraubten.

Das wahrscheinlich größte Dankeschön widme ich meiner Familie, meinen Schwestern und Großeltern. Meine Eltern haben mir ein sorgenfreies Studentenleben und noch viel mehr ermöglicht, Danke.