Tomografie eines Quantenzustands – Verschränkung und Reinheit

Otfried Gühne und Hartmut Häffner

Institut für Quantenoptik und Quanteninformation, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Technikerstr. 21a, 6020 Innsbruck, Österreich

e-mail: otfried.guehne@oeaw.ac.at, hartmut.haeffner@oeaw.ac.at

Zusammenfassung:

Es wird die experimentelle Herstellung und Quantenzustandstomografie eines Acht-Teilchen-Verschränkten Zustandes in einem Ionenfallenquantencomputer diskutiert. Die so gewonnene vollständige quantenmechanische Beschreibung des Zustandes dient nun weiteren Untersuchungen. Insbesondere berechnen wir die Güte und Reinheit des komplexen Zustandes. Darüber hinaus weisen wir nach, dass der Zustand verschränkt ist.

Summary:

We discuss the experimental generation and quantum state tomography of an entangled state of eight trapped ions. Based on the complete description of the complex quantum state in terms of the density matrix, we analyze its fidelity and purity. Furthermore, we show that this state carries genuine eight particle entanglement.

Schlüsselwörter: Verschränkung, Quanteninformation, Ionenfallen

Key words: entanglement; quantum information; ion traps

1. Beschreibung quantenmechanischer Zustände

Schon in den Anfangstagen der Quantenmechanik erkannten die Physiker, dass die Objekte auf atomarer Ebene Welleneigenschaften haben. Dies wurde in Interferenzexperimenten offenbar, in denen Teilchen sich wie Wellen verhielten. Nun haben klassische Wellen die Eigenschaft, daß sie überlagert werden können, bei Wasserwellen oder Schallwellen ist eine solche Superposition (= Überlagerung) nichts Ungewöhnliches. Es liegt also nahe, eine solche Eigenschaft auch für Quantenzustände zu fordern. Falls also $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ zwei Zustände oder Wellenfunktionen eines Systems sind, so sollte die *Überlagerung*

$$|\chi\rangle = |\psi\rangle + |\varphi\rangle$$

ebenfalls ein erlaubter Zustand sein. Diese Regel – das sogenannte Superpositionsprinzip -- sagt bereits sehr viel über die Struktur der möglichen Zustände aus. Sie legt nämlich nahe, daß der Raum aller Zustände ein Vektorraum ist, da die Zustände genau wie Vektoren addiert werden können. In diesem Sinne bezeichnen Symbole wie $|\psi\rangle$ oder $|\varphi\rangle$ nichts als Vektoren in einem Vektorraum[1].

Es ist wichtig zu betonen, dass eine Überlagerung vom Typ $|\chi\rangle = |\psi\rangle + |\varphi\rangle$ nicht heißt, das entweder $|\psi\rangle$ oder $|\varphi\rangle$ vorliegt. Der Zustand $|\chi\rangle$ enthält zwar Eigenschaften von $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$, ist allerdings ein eigenständiger Zustand mit neuen Eigenschaften. Das ist analog zu Schallwellen, wo eine Überlagerung von Schallwellen verschiedener Frequenzen eine

1 Diese auf den ersten Blick ungewöhnliche Notation wurde von P.A.M. Dirac eingeführt und ein Symbol wie $|\psi\rangle$ wird als „ket-Vektor“ bezeichnet. Im Gegenzug gibt es auch noch eine andere Darstellung als „bra-Vektoren“ die $\langle\psi|$ geschrieben wird, die Namensgebung stammt vom englischen Ausdruck „bracket“ für „Klammer“, die Notation $\langle\psi|\varphi\rangle$ bezeichnet ein Skalarprodukt. Der Vektorraum wird auch Hilbertraum genannt.

Schwebung hervorruft, und nicht als das Vorliegen der einen *oder* der anderen Frequenz gedeutet werden kann.

Die Zustandsvektoren eines Systems haben allerdings noch einige andere Eigenschaften. Zum einen sind sie normiert auf die Länge eins. Das liegt einfach daran, dass man das Quadrat der Wellenfunktion eines Teilchens auch als Aufenthaltswahrscheinlichkeit auffassen kann, und so eine Wahrscheinlichkeitsverteilung muss natürlich normiert sein. Weiters handelt es sich bei dem Zustandsraum um einen komplexen Vektorraum, d.h. als Koeffizienten können auch komplexe Zahlen auftreten.

Betrachten wie ein einfaches Beispiel: Ein Atom habe zwei Energieniveaus, $|0\rangle$ oder $|1\rangle$. Die möglichen Zustände sind also

$$|\chi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

wobei aus Gründen der Normierung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. gelten muss. So ein Zweiniveausystem stellt das einfachste quantenmechanische System dar, man nennt es auch ein Quantenbit oder kurz Qubit. Eine andere Realisierung eines Qubits besteht in einem Elektron (oder allgemeiner einem sogenannten Spin-1/2 Teilchen), bei dem die Zustände $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ den beiden Einstellrichtungen des Drehimpulses bzw. Spins in die z-Richtung entsprechen.

Wie bereits gesagt, kann man eine Überlagerung nicht einfach als Vorhandensein einer von zwei möglichen Zuständen interpretieren. Will man jedoch ausdrücken, daß mit gewissen Wahrscheinlichkeiten verschiedene Zustände vorliegen, so geschieht das nicht durch einen Vektor, sondern durch eine sogenannte Dichtematrix. Wenn man mit Sicherheit weiß, dass der Zustand $|\psi\rangle$ vorliegt, so ist die Dichtematrix einfach definiert durch $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.Wenn $|\psi\rangle$ ein komplexer Vektor mit d Einträgen ist, so ist $|\psi\rangle\langle\psi|$ als die $d \times d$ -Matrix definiert, die einen Projektor auf $|\psi\rangle$ darstellt, d.h. $|\psi\rangle$ ist einziger Eigenvektor mit Eigenwert 1, alle anderen Eigenwerte sind 0. Im einfachen Fall $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist die Dichtematrix nichts anderes als eine andere Beschreibung des Zustands.

Wenn man jedoch $|\psi\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit p hat, und einen anderen Zustand $|\varphi\rangle$ mit der komplementären Wahrscheinlichkeit $1-p$, so spricht man von einer *Mischung* der beiden Zustände. Dann wird der Gesamtzustand durch die Dichtematrix

$$\rho = p|\psi\rangle\langle\psi| + (1-p)|\varphi\rangle\langle\varphi|$$

beschrieben. Diese Definition kann man natürlich auf eine Mischung mehrer Vektoren mit allgemeinen Wahrscheinlichkeiten p_i erweitern. Im Allgemeinen ist eine Dichtematrix also eine komplexe $d \times d$-Matrix. Die Summe ihrer Diagonalelemente ergibt eins, da die Wahrscheinlichkeiten sich zu eins aufsummieren. Ferner sind die Eigenwerte positiv, da die Wahrscheinlichkeiten und Eigenwerte von $|\psi\rangle\langle\psi|$ etc. positiv sind.

Betrachten wir Dichtematrizen am Bespiel eines Qubits. Der Zustände $|0\rangle = (1,0)$ und $|1\rangle = (0,1)$ haben die Dichtematrizen

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine allgemeine Dichtematrix ist durch eine komplexe 2×2-Matrix gegeben. An der Dichtmatrix erkennt man auch gut den Unterschied zwischen einer Überlagerung von Zuständen oder der Mischung. Sei $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ eine Überlagerung, und $\rho_m = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$ eine Mischung. Die Dichtematrizen sind dann gegeben durch

$$\rho_\chi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \rho_m = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Dichtematrix der Überlagerung unterscheidet sich von der Dichtematrix der Mischung durch das Vorhandensein von Eintragen abseits der Diagonale. Diese *Kohärenzterme* zeigen an, dass es sich um eine echte Superposition handelt, ihr Nachweis wird später noch wichtig werden.

Für der Fall eines Qubits kann man alle Zustände (bzw. deren Dichtematrizen) sehr schön auf der sogenannten Blochkugel darstellen (siehe Abb. 1). Dazu betrachten wir erst einmal die möglichen Messungen an einem Qubit. Wenn das Qubit durch ein Elektron gegeben ist, kann man den Spin in x-, y-, oder z-Richtung messen. Das ergibt verschiedene Erwartungswerte, die den Zustand charakterisieren. Mathematisch ausgedrückt, wird in der Quantenmechanik eine Messung durch eine Matrix beschrieben und der Erwartungswert einer Messung A durch $\langle A\rangle = Spur(A\rho)$ berechnet, also als Spur des Produkts der Matrizen A und ρ. Die Matrizen für Messung des Spins in x-, y-, oder z-Richtung sind nun gegeben durch die Pauli-Matrizen,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nun lässt sich leicht zeigen, dass die Dichtematrix eines Qubits durch die Erwartungswerte dieser drei Meßrichtungen eindeutig bestimmt ist. So eine Messung bezeichnet man dann als Tomographie des Zustandes. Genauer gesagt, gilt

$$\rho = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \langle\sigma_x\rangle\sigma_x + \langle\sigma_y\rangle\sigma_y + \langle\sigma_z\rangle\sigma_z\right].$$

Deshalb lassen sich die Dichtematrizen als Teilmenge des dreidimensionalen Raums auffassen. In diesem beschreiben sie eine Kugel, die sogenannte Blochkugel (vgl. Abb. 1). Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bilden die Pole dieser Kugel. Die Zustände $|x^\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ (bzw. $|y^\pm\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$) beschreiben den Fall, dass der Spin des Teilchens in x-, bzw y-Richtung zeigt. Sie liegen am Äquator. In der Mitte der Kugel liegt die Mischung $\rho_m = (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)/2$. Allgemein kann man sagen, dass am Rand der Blochkugel die Dichtematrizen liegen, die vom Typ $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ sind, d.h. diejenigen, die auch durch Vektoren beschrieben werden können. Solche Zustände bezeichnet man auch als *reine* Zustände, bei ihnen hat der Blockvektor die Länge eins. Innerhalb der Kugel liegen die *gemischten* Zustände, und der Zustand $\rho_m = \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right)/2$ ist *maximal gemischt*.

2. Verschränkung zwischen Systemen

Betrachten wir nun den Fall, dass mehrere Qubits vorhanden sind. Im einfachen Fall haben wir zwei Teilchen, die auf zwei Parteien A und B verteilt sind. In der Quanteninformation werden diese Parteien meistens Alice und Bob genannt.

Welche Zustände können diese beiden Teilchen annehmen? Da jedes der beiden Teilchen die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ annehmen können, gibt es auf jeden Fall die vier Zustände

$$|e_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad |e_2\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad |e_3\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \text{ und } |e_4\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Hierbei ist mit $|e_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ gemeint, daß sowohl Alices als auch Bobs Teilchen sich im Zustand $|0\rangle$ befinden. Wir werden so einen Zustand auch häufig als $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ schreiben. Aufgrund des Superpositionsprinzips muss es jedoch noch andere Zustände geben, z.B. den Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle\right)$$

Was unterscheidet diesen Zustand von den oben erwähnten Vektoren $|e_i\rangle$? Die Vektoren $|e_i\rangle$ können lokal präpariert werden, Alice und Bob müssen einfach jeweils einen Zustand $|0\rangle$ bzw. $|1\rangle$ herstellen. Der Zustand $|\Psi\rangle$ kann jedoch nicht als $|\Psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ geschrieben werden, und deshalb nicht lokal hergestellt werden. Deshalb nennt man $|\Psi\rangle$ *verschränkt*, während die $|e_i\rangle$ *separierbar* genannt werden. Diese Definition von Verschränkung und Separierbarkeit kann nun einfach auf Dichtematrizen (die nun komplexe 4×4-Matrizen sind) erweitern: Eine Dichtematrix heißt separierbar, wenn der Zustand von Alice und Bob mit lokalen Operationen und klassischer Kommunikation erzeugt werden kann, andernfalls heißt sie verschränkt.

Wann kann aber ein Zustand lokal erzeugt werden? Zuerst können Zustände vom Typ $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$ lokal erzeugt werden. Wenn Alice und Bob sich auch auf Wahrscheinlichkeiten p_i einigen, könne sie gemeinsam Dichtematrizen der Form

$$\rho = \sum_i p_i \rho_A^{(i)} \otimes \rho_B^{(i)}$$

erzeugen. Alle Dichtematrizen von dieser Form sind separierbar, und wenn eine Matrix nicht so dargestellt werden kann, ist der Zustand verschränkt [Wer89]. Trotz dieser einfachen Definition ist es jedoch meistens außerordentlich schwer zu entscheiden, ob einen gegebene Dichtematrix verschränkt ist oder nicht.

Physikalisch gesehen, bedeutet die Verschränkung eines Zustandes, dass bei diesem die mögliche Messergebnisse zwischen Alice und Bob stark korreliert sind. Wenn beim Zustand $|\Psi\rangle$ in Gleichung (x) z.B. Alice den Spin in z-Richtung misst, bekommt sie als Ergebnis 0 oder 1. Wenn Bob gleichzeitig misst, bekommt er auch 0 oder 1, aber immer das zu Alice entgegengesetzte Ergebnis.

Allerdings muß festgestellt werden, dass Korrelationen alleine keine Definition von Verschränkung erlauben. So hat z.B. der Zustand $\rho = \left(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|\right)/2$ bei Messung in z-Richtung dieselben Korrelationen wie der Zustand $|\Psi\rangle$ von oben, ρ ist aber offensichtlich separierbar. Der entscheidende Unterschied besteht, wie schon in obigem Beispiel, im Vorhandensein der Kohärenzterme. Auch kann man sagen, dass die Korrelationen in verschränkten Zuständen im allgemeinen stärker sind als in separierbaren Zuständen, indem sie z.B. die Verletzung von Bellungleichungen erlauben können [Per95]. Erwin Schrödinger sprach einmal davon, dass bei verschränkten Quantenzuständen die Eigenschaften zweier Teilchen untrennbar miteinander verwoben sind [Sch30].

Schließlich ergibt sich die Frage, ob man für zwei oder mehr Qubits die Zustände auch durch einen Blochvektor beschreiben kann. Leider ist das nicht der Fall. Der Punkt ist, dass zur Beschreibung eines Zweiqubitzustandes nicht nur die Werte von $\langle \sigma_i \rangle$ für Alice und Bob notwendig sind, sondern auch auch die Werte von $\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \rangle$ für i,j = x,y,z. Das sind bereits 15 Parameter, auch ist die Menge aller Zustände in diesem 15-dimensionalen Raum keine Kugel mehr.

Mit zunehmender Anzahl von Qubits wird also der Zustandsraum immer größer: Bei N Qubits sind die Dichtematrizen $2^N \times 2^N$ -Matrizen, und zu ihrer Bestimmung braucht man 3^N Messungen, nämlich Messungen von der Form $\langle \sigma_i \otimes \sigma_j \otimes \sigma_k .... \rangle$ etc. Diese exponentiell zunehmende Komplexität hat einen Vorteil und einen Nachteil. Ein Vorteil ist, dass bereits mit sehr wenigen Qubits ein extrem großer Zustandsraum aufgespannt wird. Das ermöglicht es, komplexe Operationen darauf durchzuführen und ist einer der Hauptvorteile eines Quantencomputers gegenüber einem klassischen Computer. Ein Nachteil ist, daß zur Charakterisierung eines Zustandes viele Messungen benötigt werden. Das macht die experimentelle Charakterisierung eines Vielteilchenzustandes zu einer herausfordernden Aufgabe. Mit so einer experimentellen Quantenzustandstomographie eines speziellen verschränkten Vielteilchenzustandes beschäftigen wir uns im folgenden.

In dem Experiment soll ein sogenannter W-Zustand hergestellt werden [Dür00]. Ein W-Zustand besteht aus einer symmetrischen Überlagerung von allen möglichen Zuständen mit einer bestimmten Anzahl von Anregungen. Für den Spezialfall einer Anregung für N Qubits erhält man also:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(|0...001\rangle + |0...010\rangle + |0...100\rangle + |1...000\rangle \right) \quad \text{[Gleichung:W-zustand]}$$

Aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften ist dieser Zustand besonders robust gegenüber einer Reihe von Dekohärenzprozessen [Roo04a]. Trotzdem ist dieser Zustand hochverschränkt und damit ein sehr interessantes Untersuchungsobjekt.

3. Experimente mit gespeicherten Ionen

In den Experimenten werden einfach geladenen Kalzium--Ionen als Träger der Quanteninformation eingesetzt [Sch03]. Am Anfang der Experimente werden die Ionen durch Laser-Beschuss eines Dampfes aus neutralem Kalzium in einer Vakuumkammer hergestellt [Kia00,Gul01]. Die elektrisch geladenen Ionen können nun mittels eines elektromagnetischen Wechselfeldes eingefangen werden [Pau58,Pau90]. Da die Speicherkräfte in der radialen Richtung sehr viel stärker als entlang der Fallenachse eingestellt werden und sich die Ionen gegenseitig abstoßen, reihen sich die Ionen entlang der Achse wie auf einer Perlenschnur auf (siehe Abb. 2)[Rai92]. Dabei beträgt der Abstand der Ionen ca. 5 μm.

Jedes dieser Ionen stellt ein Qubit dar: Befindet sich das Valenzelektron im Grundzustand (S) hat das Qubit den Wert $|0\rangle$, befindet es sich dagegen im angeregtem D--Zustand (siehe Abb. 3) stellt das den Wert $|1\rangle$ dar. Nach der Quantenmechanik sind auch Superpositionen davon erlaubt. In diesen Zwischenzuständen besetzt das Valenzelektron gewissermaßen die beiden Zuständen gleichzeitig und erzeugt dabei einen oszillierenden Strom dar, der über sein Dipolmoment besonders leicht mit der Umgebung wechselwirkt und damit leicht dekohäriert.

Nach dem Einspeichern der Ionenkette werden die Ionen zunächst mit Dopplerkühlung auf Temperaturen von wenigen mK abgekühlt [Win78]. In einem weiteren Schritt wird mittels einen extrem frequenzstabilen Lasers die Schwerpunktsbewegung des Ionenkristalls gänzlich eingefroren [Die89]. Dies ist notwendig, um wohl definierte Ausgangsbedingungen für die nachfolgenden Operationen zu schaffen.

Im nächsten Schritt werden die Quantenzustände der Ionen mittels maßgeschneiderter Laserpulse manipuliert. Ein wichtiges Kriterium ist dabei, dass die Phase der Laserpulse genauestens mit der Phase der Elektronenschwingungen in den Superposititonszuständen synchronisiert ist. In der Praxis bedeutet das, dass die Frequenz des Lasers mit einer Genauigkeit von besser 10^{-12} eingestellt sein muss, damit sich die Phase der Laserstrahlung gegenüber der atomaren Referenz innerhalb der Experimentierzeit von wenigen Millisekunden nicht verschiebt. Geschieht dies dennoch, kann es wie bei Anschieben einer Schaukel mit falscher Phase dazukommen, dass man statt einer gewünschten Anregung den gegenteiligen Effekt erzielt. Im Wesentlichen bestimmt diese Zeit wie lange der Laser und die atomare Schaukel -die Quantensuperposition- synchronisiert bleiben die sogenannte Kohärenzzeit, d.h. die Lebensdauer des Qubits.

Betrachten wir nun verschränkte Zustände. Um verschränkte Zustände herzustellen, bedarf es eines zusätzlichen Tricks, da das Valenzelektrons des einen Ions sich in Abhängigkeit des Valenzelektrons eines anderen Ions bewegen muss. In diesem von I. Cirac und P. Zoller [Cir95] entwickeltem Verfahren, wird in einem ersten Schritt das erste Ion zusammen mit der Schwerpunktsbewegung des Ionenkristalls angeregt. Dies erreicht man, indem man die Energie der Photonen (die Frequenz) des Lasers genauso einstellt, dass nach Anregung des Atoms, genau die Energie übrig bleibt um ein Quantum an Bewegungsenergie E_{kin} entsprechend $E_{kin} = \hbar\omega_{Falle}$ anzuregen (Abb. 4). Hierbei ist $\hbar$ das Plank'sche Wirkungsquantum und ω_{Falle} die Fallenfrequenz. Gemäß dem Satz der Energieerhaltung können nun beide Prozesse nur gleichzeitig stattfinden. Somit kann man die Eigenschaften der internen Zustände der Ionen mit denen der Bewegung quantenmechanisch verkoppeln. In einem zweiten Schritt ist es nun möglich, den Bewegungszustand an das zweite Ion zu koppeln.

Mit diesen Werkzeugen lässt sich nun wie folgt ein 3-Ionen-W-Zustand (s. Gl. [Gleichung:W-Zustand]) herstellen [Roo04b,Häf05]. Zuerst werden alle Ionen vom Grundzustand $|S\rangle$ in den angeregten $|D\rangle$-Zustand befördert und gleichzeitig ein Bewegungsquant erzeugt: $|0,SSS\rangle \rightarrow |1,DDD\rangle$. Dazu kann man z.B. die ersten beiden Ionen mit einem resonanten Trägerpuls anregen und auf dem dritten Ion die Laserfrequenz auf das blaue Seitenband verstimmen (siehe Abb. 4), so dass sich gleichzeitig der Bewegungszustand und der elektronische Zustand ändern. Ausgehend von diesem Zustand wird das Bewegungsquant nun auf die verschiedenen Ionen mittels weiterer Pulse auf dem blauen Seitenband verteilt. Dies ist in Tab. {Präparation} genauer ausgeführt. Dabei sorgen die Pulse, die nicht ganzzahlige Vielfache der Pulslänge π haben, für die Verschränkung der Ionen mit der Bewegung und damit auch der Ionen untereinander.

4. Quantenzustandstomografie

Die experimentelle Schwierigkeit besteht nun darin, zu überprüfen, ob der gewünschte Zustand und insbesondere Verschränkung hergestellt wurde. Wegen der statistischen Natur einer quantenmechanischen Messung muss der Zustand viele tausendmal hergestellt und vermessen werden. Für zum Beispiel die Quantentomografie eines einzelnen Qubits wird zunächst in der logischen Basis gemessen. Dass heißt in unserem Fall, dass wir keine zusätzliche Drehung durchführen und mittels eines Detektionspulses auf dem $S_{1/2} \rightarrow P_{1/2}$ Übergang bei 397 nm überprüfen, ob das Valenzelektron im Grundzustand (= |S>) oder im angeregten $D_{5/2}$-Zustand (=$|D\rangle$) verweilt. Dabei wird das gemessen Ion in einen dieser beiden Zustände projiziert. Auf der Blochkugel [Nie00] (siehe Abb. 1) entspricht dies einer Projektion auf die z-Achse, wobei die Pole jeweils mit $|S\rangle$ und $|D\rangle$ identifiziert werden. Diese Messung muss ca. einhundert Mal wiederholt werden bis eine vernünftige Aussage getroffen werden kann. Die Wahrscheinlichkeiten ergeben direkt Informationen über die

Diagonalelemente ρ_{SS} (Ion im S-Zustand) und ρ_{DD} (Ion im D-Zustand) der Dichtematrix. dh. die z-Kompente des Blochvektors (Abb. 1). Für jede Messung muss allerdings der ganze Prozess, Kühlung und Initialisation des Ionenkristalls und Herstellung des Quantenzustands immer wieder wiederholt werden, da der Quantenzustand durch eine Messung in entweder $|S\rangle$ oder $|D\rangle$ gezwungen wird. Quantenmechanisch sind nun die Nichtdiagonalelemente ρ_{DS} und ρ_{SD} (die Kohärenzen) besonders interessant. Um diese zu messen, wird vor der Messung jeweils ein $\pi/2$ -Puls auf dem Träger eingestrahlt. Dies entspricht einer Drehung auf der Blochkugel (Abb. 1) um eine Achse in der Äquatorialebene und die komplexwertigen Kohärenzen, die die Koordinaten in der x-y-Ebene beschreiben, werden ggf. in die z-Achse gedreht. Um der Real- und Imaginärteil zu erhalten, muss man sowohl um die x- als auch um die y-Achse drehen. In der Realität entspricht das $\pi/2$ -Pulsen mit um π verschobenen Phasen. Man erkennt hier gut, dass eine Messung in einer Basis ein wohldefiniertes Ergebnis liefern kann, wohingegen in diesem Fall die beiden anderen Messbasen rein zufällige Werte liefern. Gibt es eine Richtung in der immer der gleiche Wert gemessen wird spricht man von einem reinem Zustand und der Zustand wird durch einen Blochvektor der Länge eins beschrieben. Dekohärenz führt zu unreinen Zuständen und macht sich in nicht wohldefinierten Quantenzuständen bemerkbar, d.h. im schlimmsten Fall ergeben drei zu einander orthogonale Messrichtungen rein zufällige Ergebnisse.

Wie bereits erwähnt lässt sich die Quantentomographie auch auf N Qubits verallgemeinern [Whi99, Roo04b]. Allerdings müssen in der einfachsten Variante dazu alle möglichen Kombinationen für die Messrichtungen getestet werden, d.h. es sind insgesamt 3^N verschiedene Messrichtungen nötig [Häf05]. Die gewonnen Messdaten werden nun mit Hilfe eine Rechners analysiert und die wahrscheinlichste physikalische Beschreibung in Form der Dichtematrix für N Qubits ermittelt [Hra04]. Für N>7 empfiehlt sich bereits der Einsatz von Parallelrechnern, da der Rechenaufwand exponentiell steigt. So dauert es für acht Qubits auf einem aktuellen Desktop schon bis zu einer Woche, um die 2^{2N-1} freien Parameter der Dichtematrix zu bestimmen. Für neun Qubits würde der Rechenaufwand dann aber schon 24 Wochen sein, so dass diese Methode sehr schnell impraktikabel wird. Dennoch ist die hier vorgestellte Methode (und ihre Abarten), die einzige bekannte Möglichkeit alle Eigenschaften Quantenzustandes festzuhalten. Dies verdeutlicht den enormen Informationsgehalt von Quantenzuständen, den man gerade zur Quanteninformationsverarbeitung zu nutzen sucht. Diese so gewonnenen Dichtematrizen (Abb. 5) sind nun der Ausgangspunkt für die weiteren theoretischen Untersuchungen.

5. Untersuchung der Dichtematrizen

Mit gegebenen Dichtematrizen hat man nun die bestmögliche Beschreibung der erzeugten Zustandes. Damit kann man nun dessen Eigenschaften untersuchen, wobei sich verschiedene Fragen ergeben.

Zuerst kann man sich die Frage stellen, mit welcher Güte denn der gewünschte Zustand erzeugt wurde. Das wird durch den sogenannten Überlapp mit dem Zielzustand charakterisiert. Er ist definiert als

$$F = Spur\left(\rho_{\exp}|W_N\rangle\langle W_N|\right)$$

Wenn man den Zustand perfekt präpariert hätte, wäre $\rho_{\exp} = |W_N\rangle\langle W_N|$ und dann wäre $F = 1$. Wurde allerdings der komplett falschen Zustand präpariert, ist $F = 0$. Aus der Dichtematrix für den acht Qubit Fall ergibt sich experimentell

$$F = 0.722 \pm 0.001$$

Obwohl der Wert deutlich kleiner als eins ist, kann trotzdem von einer vergleichsweise sehr hohen Güte gesprochen werden. Dies liegt daran, dass die Zahl der Zustände exponentiell mit der Anzahl der qubits wächst. Damit wird es zunehmend schwieriger den Zielzustand herzustellen. Bisherige Experimente erreichen schon für sechs Qubits kaum mehr als 0.6.

Besonders interessant ist die Frage nach der quantenmechanische Natur des Zustandes. Im Bezug auf Dekohärenz kann man zunächst nach der Reinheit fragen. Wie bereits oben erwähnt, sind Zustände vom Typ $|\psi\rangle$ rein, andere Zustände (die in der Mitte der Blochkugel) sind gemischt. Ein Maß für die Reinheit einer Dichtematrix ist

$$R = Spur(\rho_{\exp}\rho_{\exp})$$

denn für einen reinen Zustand $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ist das gleich eins. Für ein einzelnes Qubit ist R außerdem nichts anderes als die Länge des Blochvektors. Experimentell finden wir für den in Abb. 5 abgebildeten Zustand

$$R = 0.575 \pm 0.002\,.$$

Auch das ist ein recht hoher Wert. Denn mit steigender Anzahl der Teilchen steigt auch die Dimension des Raums der Dichtematrizen, und die reinen Zustände, die an der Oberfläche liegen, werden immer seltener.

Besonders interessant ist auch, ob der hergestellte Zustand tatsächlich verschränkt ist. Um diese Frage zu entscheiden, definieren wir einen sogenannten Zeugenoperator [Bou04]. Dieser Operator ist so geartet, dass er angewandt auf die Dichtematrix aller separablen Zustände einen positiven Wert liefert. Dies bedeutet im Gegenzug, dass wenn der Operator einen negativen Wert liefert der zur Dichtematrix zugehörige Zustand vielteilchen-verschränkt ist. So ein Zeuge ist im allgemeinen nicht einfach zu finden, da im vorliegendan Fall aber die vollständige Dichtematrix bekannt ist, kann man verschiedene im nachinein ausprobieren. Für die Daten dargestellt in Abb. 5 haben wir solch einen Zeugenoperator gefunden [Häf05], der einen negativen Wert liefert. Damit ist gezeigt, dass der experimentell hergestellte Zustand tatsächlich nicht separiert werden kann und er tatsächlich verschränkt ist.

6. Zusammenfassung

Wir haben die quantenmechanischen Eigenschaften eines extrem großen Vielteilchenzustandes untersucht. Dazu wurde zunächst der Zustand mit Hilfe von Laserpulsen in eine Kette von acht Ionen eingeschrieben und dann die zugehörige Dichtematrix mit Quantentomografie vermessen. Mittels verschiedener theoretischer Werkzeuge waren wir dann in der Lage, die Güte und Reinheit des Zustandes zu charakterisieren. Zusätzlich konnten wir nachweisen, dass im hergestellten Zustand alle acht Ionen miteinander verschränkt sind.

Danksagung: Wir danken besonders W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, W. Dür und R. Blatt für die experimentellen und theoretischen Arbeiten, die diese Veröffentlichung ermöglichten. Weiterhin möchten wir uns beim Wissenschaftsfond Österreich für die finanzielle Unterstützung bedanken. Außerdem wurden die Arbeiten von der Europäischen Union (Projekte SCALA, OLAQI, QICS) unterstützt.

Literatur:

[Wer89] R. F. Werner, „Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model“, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).

[Per95] A. Peres, „Quantum Theory – Concepts and Methods“, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1995).

[Sch35] E. Schrödinger, „Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”, Naturwissenschaften **23**, 807-812, 823-828, 844-849 (1935).

[Dür00] W. Dür, G. Vidal, und J.I. Cirac, „Three qubits can be entangled in two inequivalent ways“, Phys. Rev. A **62**, 062314 (2000)

[Sch03] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, S. Gulde, M. Riebe, G. P.T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, W. Hänsel, J. Eschner, C. F. Roos, and R. Blatt, „How to realize a universal quantum gate with trapped ions", Appl. Phys. B **77**, 789 (2003).

[Kja00] N. Kjaergaard, L. Hornekaer, A.M. Thommesen, Z. Videsen, M. Drewsen, „Isotope selective loading of an ion trap using resonance-enhanced two-photon ionization", Appl. Phys. B **71**, 207 (2000).

[Gul01] S. Gulde, D. Rotter, P. Barton, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, W. Hogervorst, „Simple and efficient photoionization loading of ions for precision ion-trapping experiments", Appl. Phys. B **73**, 861 (2001).

[Pau90] W. Paul, W, „Electromagnetic traps for charged and neutral particles“, Rev. Mod. Phys. **62**, 531 (1990).

[Pau58] W. Paul, O. Osberghaus, and E. Fischer, Forschungsber. Wirtsch.-Verkehrminist. Nordrhein-Westfalen **415** (1958).

[Rai92] M.G. Raizen, J.M. Gilligan, J.C. Bergquist, W.M. Itano, and D.J. Wineland, „Ionic Crystals in a Linear Paul Trap," Phys. Rev. A **45**, 6493-6501 (1992).

[Win78] D.J. Wineland, R.E. Drullinger, and F.L. Walls, "Radiation-Pressure Cooling of Bound Resonant Absorbers", Phys. Rev. Lett. **40**, 1639-1642 (1978).

[Die89] F. Diedrich, J.C. Bergquist, W.M. Itano, and D.J. Wineland, „Laser Cooling to the Zero Point Energy of Motion", Phys. Rev. Lett. **62**, 403-406 (1989).

[Cir95] J.I. Cirac and P. Zoller, „Quantum computation with cold trapped ions”, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).

[Roo04a] C. F. Roos, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, J. Benhelm, G. P. T. Lancaster, C. Becher, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, „Control and Measurement of Three-Qubit Entangled States", Science **304**, 1478 (2004).

[Häf05] H. Häffner, W. Hänsel, C. F. Roos, J. Benhelm, D. Chek-al-kar, M. Chwalla, T. Körber, U. D. Rapol, M. Riebe, P. O. Schmidt, C. Becher, O. Gühne, W. Dür and R. Blatt, „Scalable multiparticle entanglement of trapped ions", Nature **438**, 643 (2005).

[Nie00] M. Nielsen, I. Chuang, „Quantum Computation and Quantum Information” (Cambridge Univ. Press, New York, 2000)

[Whi99] A.G. White, D. F.V. James, P. H. Eberhard, and P.G. Kwiat, „Nonmaximally Entangled States: Production, Characterization, and Utilization”, Phys. Rev. Lett. **83**, 3103 (1999).

[Roo04b] C. F. Roos, G. P. T. Lancaster, M. Riebe, H. Häffner, W. Hänsel, S. Gulde, C. Becher, J. Eschner, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt, „Bell States of Atoms with Ultralong Lifetimes and Their Tomographic State Analysis", Phys. Rev. Lett. **92**, 220402 (2004).

[Hra04] Z. Hradil, J. Rehacek, J. Fiurasek and M. Jezek, „Maximum-likelihood methods in quantum mechanics”, Lect. Notes Phys. **649**, 59-112 (2004).

[Bou04] M. Bourennane, M. Eibl, C. Kurtsiefer, S. Gaertner, H. Weinfurter, O. Gühne, P. Hyllus, D. Bruß, M. Lewenstein, und A. Sanpera, „Experimental Detection of Multipartite Entanglement using Witness Operators“, Phys. Rev. Lett. **92**, 087902 (2004).

Tabelle 1: Pulssequenz zur Herstellung eines N-Ionen-W-Zustandes. Die Operationen $R_N(\theta)$ beschreiben Pulse der Länge θ auf entweder dem Trägerübergang (Superskript C) oder auf dem blauen Seitenband (Superskript +). Eine Pulslänge von π entspricht einem kompletten Populationstransfer. Um die Tabelle zu vereinfachen, wurde die Phase der Pulse unterdrückt.

Abbildung 1: Bloch-Kugel. Ein Qubit kann als ein Punkt auf der sogenannten Blochkugel visualisiert werden. Die Pole können dabei mit den Eigenzuständen identifiziert werden. Alle Punten entsprechen Superpositionszuständen. Operationen auf dem Qubit entsprechen Drehungen des Blochvektors. Die Drehachse liegt im resonanten Fall in der Äquatorialebene und wird durch die Phase φ spezifiziert. Der Zustand $|0\rangle$ ist als Pfeil eingezeichnet.

Abbildung 2: Ion-Kette aus sechs Kalziumionen. Dieses Bild wurde mit Hilfe einer CCD (charge-coupled device) Kamera aufgenommen.

Abbildung 3: Niveauschema eines Kalzium-Ions. Das Qubit wird durch Superpositionen des $S_{1/2}$ und des metastabilen $D_{5/2}$-Niveaus (Lebensdauer $\tau = 1s$) realisiert. Die Manipulation findet durch einen ultrastabilen Ti:Sa-Laser bei 729 nm statt. Detektion und Doppler-Kühlen der Ionen wird mit einem frequenzverdoppelten Laser bei 397 nm erreicht. Befindet sich das Ion im Grundzustand wird Fluoreszenz beobachtet, befindet es sich dagegen im angeregten D-Zustand bleibt das Ion dunkel.

Abbildung 4: Energiestruktur eines Ion-Qubits in einem harmonischem Speicherpotential. Laserstrahlung resonant mit dem Qubitübergang ω_{qubit} treibt den Trägerübergang mit der Rabifrequenz Ω, bei dem nur der elektronische Freiheitsgrad verändert wird. Ist die

Strahlung dagegen mit $\omega_{qubit} + \omega_{Falle}$ resonant, wird das sogenannte blaue Seitenband getrieben, beidem simultan der elektronische Zustand und der Bewegungszustand geändert wird.

Abbildung 5: Dichtematrix eines experimentell erzeugten Acht-Ionen-W-Zustands. Fast 1 Million Messungen sind nötig, um einen Acht-Qubit Zustand zu charakterisieren. Die Rekonstruktion der Dichtematrix erfolgt mit Hilfe einer Maximum-Likelyhood-Methode. Der Zustand hat einen Überlapp von 0.72 mit dem idealen Acht-Ionen-W-Zustand.